Université Pierre et Marie Curie
Certificat 1M002 - L1 - 2013/14
Suites et intégrales - Algèbre linéaire
Section renforcée

Partiel du 3 mars 2014 - Durée 2h30

Les documents et les appareils électroniques sont interdits

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Questions de cours

1) Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres complexes et ℓ un nombre complexe. Exprimer à l'aide des quantificateurs l'assertion suivante :

la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ ne converge pas vers ℓ.

2) Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $v_1, \cdots, v_n$ des vecteurs de E. Rappeler les définitions des assertions suivantes :

   2.1) $(v_1, \cdots, v_n)$ est une famille libre.

   2.2) $(v_1, \cdots, v_n)$ est une famille génératrice de E.

3) Soient E et F des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application.

   3.1) Que signifie l'assertion selon laquelle f est linéaire ?

   3.2) Supposons f linéaire. Montrer que son noyau est un sous-espace vectoriel de E.

Les quatre exercices qui suivent sont indépendants.

Exercice 1

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite de nombres complexes définie par l'égalité

$$u_n = \frac{\sin n}{n}\left(\frac{2+i}{2-i}\right)^n.$$

La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est-elle convergente ?

Exercice 2

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par l'égalité

$$f(x) = \sqrt{x+3}.$$

1) Montrer que $f\big([1,6]\big)$ est inclus dans $[1,6]$.
2) Montrer qu'il existe un unique nombre réel $\ell \geq 1$ tel que $f(\ell) = \ell$. Calculer ℓ.
3) Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par les égalités

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{pour tout } n \geq 0.$$

3.1) Montrer que pour tout $n \geq 0$, on a

$$|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{|u_n - \ell|}{4}.$$

3.2) En déduire que $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 3

Dans l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels, posons

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1) Exprimer $A^2 - 3A$ en fonction de I.
2) Déterminer les racines du polynôme $X^2 - 3X + 2$.

   Rappelons que pour tout $n \geq 1$, il existe un polynôme $Q_n(X) \in \mathbb{R}[X]$ et des réels α_n et β_n tels que l'on ait l'égalité

$$X^n = (X^2 - 3X + 2)Q_n(X) + \alpha_n X + \beta_n.$$

3) Calculer α_n et β_n en fonction de n.
4) Pour tout $n \geq 1$, exprimer A^n en fonction de A, I et n, puis calculer A^n.

Exercice 4

Soit a un nombre réel. Résoudre le système linéaire

$$\begin{cases} x + y + (a+2)z = a \\ x + 2y - z = -1 \\ 2x + 2y + 4z = -2. \end{cases}$$

Pour quelle valeur de a ce système n'a-t-il aucune solution ?
