Université Pierre et Marie Curie 2013–2014
1M002, Examen partiel du 8 mars 2014 (2h30), sections MIPI 21, 22 & 23

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de tout appareil électronique de calcul et des téléphones portables est interdite. Pendant l'épreuve, les téléphones portables doivent être éteints et rangés. Les correcteurs tiendront compte de la qualité de la rédaction et de la précision des raisonnements. Cet examen comporte **5** exercices et sera noté sur **26**. (Le total des points fait 30 et les notes > 26 seront ramenées à 26.)

Exercice 1 (5 pts)**.** Soit $\mathcal{S}$ le système linéaire à coefficients dans $\mathbb{R}$: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = b_1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = b_2 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 = b_3 \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 5x_4 = b_4 \end{cases}$

1. Écrire la matrice A du système, puis la matrice augmentée.
2. En faisant des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice augmentée, déterminer $\mathrm{rang}(A)$ et une ou des équation(s) de $\mathrm{Im}(A)$. Vous indiquerez les opérations élémentaires effectuées.
3. Préciser les variables libres et donner des équations de $\mathrm{Ker}(A)$.
4. Quelle est la dimension de $\mathrm{Ker}(A)$? En déterminer une base.
5. Résoudre le système lorsque $b_1 = b_2 = b_3 = 1$ et $b_4 = 2$.

Exercice 2 (4 pts)**.** Soient $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}$. On considère le déterminant $V(a_1, a_2, a_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{vmatrix}$.

1. Montrer que $V(a_1, a_2, a_3) = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)$. (On pourra faire des opérations sur les lignes puis développer par rapport à la 1ère colonne.)

Soit $t \in \mathbb{R}$. On considère le déterminant $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & e^{it} & e^{2it} \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

2. Calculer D. Quand a-t-on $D = 0$?
3. Soient $R = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & \cos(t) & \cos(2t) \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ et $S = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & \sin(t) & \sin(2t) \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$. En utilisant la question précédente, exprimer R et S en fonction de $\cos(t)$ et $\sin(t)$.
4. Pour quelles valeurs de t a-t-on $S = 0$?
5. (bonus) Pour quelles valeurs de t a-t-on $R = 0$?

Exercice 3 (6 pts)**.** Soit $(*_0)$ l'équation différentielle linéaire homogène $x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = 0$. On rappelle que l'ensemble E de ses solutions est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2. Soit $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'unique solution telle que $u(0) = 0$ et $u'(0) = 1$.

1. Écrire le polynôme (ou équation caractéristique) associé(e) à $(*_0)$ et déterminer ses racines dans $\mathbb{R}$.
2. Donner une base $\mathcal{B} = (f, g)$ de E, puis exprimer u dans cette base.

Soit $(**)$ l'équation différentielle linéaire $z''(t) - 3z'(t) + 2z(t) = e^{it}$, où z est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

3. Déterminer une solution $z_0(t)$ de $(**)$ de la forme $z_0(t) = Ce^{it}$, pour un $C \in \mathbb{C}$ que l'on déterminera.

Soit $(*)$ l'équation différentielle $x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = \cos(t)$.

4. Montrer que $x_0(t) = \mathrm{Re}(z_0(t))$ est solution de $(*)$ puis déterminer toutes les solutions de $(*)$.
5. Exprimer $x_0(t)$ puis $x_0'(t)$ en fonction de $\cos(t)$ et $\sin(t)$.
6. Soit $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'unique solution de $(*)$ telle que $v(0) = 0$ et $v'(0) = -1/2$. Exprimer v en fonction de x_0, f et g.

Exercice 4 (7 pts)**.** On considère la fonction

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{\sqrt{x+1}} \end{cases} ;$$

et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Dresser le tableau des variations de f et tracer approximativement son graphe en prenant approximativement 2 cm comme unité de longueur sur chacun des axes.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n \in [\frac{1}{2}, 3]$.
3. Calculer et comparer u_1 et u_2. Représenter graphiquement sur le graphe de f les termes $u_0, \ldots, u_4$ (on ne demande pas de calculer u_3 et u_4).
4. Montrer que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et que la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
5. Déterminer un réel $k \in]0,1[$ tel que $|f'(x)| \leq k$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. En déduire que, pour tout $n \geq 1$, on a $|u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{2}|u_n - u_{n-1}|$.
6. En étudiant les variations de $g(x) = f(x) - x$, montrer que f admet dans $\mathbb{R}_+$ un unique point fixe p. Montrer de plus que $p \in [\frac{1}{2}, 1]$.
7. Montrer par récurrence que $|u_n - p| \leq \frac{5}{2^{n+1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers p.

Exercice 5 (8 pts)**.** On note $D = \{z \in \mathbb{C} \text{ tels que } |z| \leq 1\}$ et on définit la fonction

$$F : \begin{cases} D & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \dfrac{z^3 + 3i}{4} \end{cases} ;$$

1. Montrer que $F(D)$ est inclus dans D.
2. On pose $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = F(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que tous ses termes sont dans D.
3. Pour tout $a \in \mathbb{C}$, montrer que $X^3 - a^3 = (X - a)Q(X)$ pour un polynôme Q de degré 2 que l'on déterminera. (On pourra faire la division euclidienne de $X^3 - a^3$ par $X - a$.)
4. Déduire de la question 3 que pour tous x et y dans D, on a $|F(x) - F(y)| \leq \frac{3}{4}|x - y|$.
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $|u_{n+1} - u_n| \leq \frac{3}{4}|u_n - u_{n-1}|$.
6. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. En déduire qu'elle est convergente. Notons ℓ sa limite.
7. Montrer que $\ell \in D$ et $F(\ell) = \ell$.
8. Est-ce que la limite ℓ dépend du choix de la condition initiale $u_0 \in D$? Justifiez votre réponse.