Université Pierre et Marie Curie 2014–2015
1M002, Examen 11 juin 2015
Durée : 3 heures

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de tout appareil électronique de calcul et des téléphones portables est interdite. Les correcteurs tiendront compte de la qualité de la rédaction et de la précision des raisonnements.

Le barême approximaif est le suivant. Exercice 1 : 2 points, exercice 2 : 12 points, exercice 3 : 9 points, exercice 4 : 7 points, exercice 5 : 10 points, exercice 6 : 15 points. Le total est de 55 points et la note sera ramenée sur 50.

Exercice 1. Soient a_1, a_2, a_3, a_4 des réels et $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ la matrice diagonale :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{pmatrix},$$

1. Que vaut le déterminant de A ?
2. À quelles conditions sur a_1, a_2, a_3, a_4, la matrice A est-elle inversible ?

Exercice 2. Les questions sont indépendantes.

1. Calculer $\displaystyle\int_0^\pi t^2 \cos(t)dt$ (Indication : on pourra faire une double intégration par parties).
2. Exprimer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{3}{n+3k}$ comme une intégrale et calculer cette intégrale.
3. Calculer $\displaystyle\int_0^1 t\tan(t^2)dt$ (Indication : on pourra commencer par un changement de variables).
4. Démontrer que $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\sin(x)}{x^4+x^2+1}dx = 0$ (Indication : n'essayez pas de calculer !).

Exercice 3. On considère l'application linéaire $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$h\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ 2x+y+2z \\ x+3y+z \end{pmatrix}.$$

1. Donner la matrice de h dans la base canonique.
2. On considère les trois vecteurs $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Montrer qu'ils forment une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Quelle est la matrice de h dans la base (v_1, v_2, v_3) de la question précédente ?
4. h est-elle inversible ?

Exercice 4. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x - x^2$.

1. Montrer que l'intervalle $[0,1]$ est stable par f.
2. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = \dfrac{1}{2}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer qu'elle est croissante.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 5. On considère la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres de B
2. Pour chaque valeur propre trouvée, déterminer l'espace propre correspondant.
3. La matrice B est-elle diagonalisable ? Si oui, construire une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $D = P^{-1}BP$.
4. Calculer B^{30}.

Exercice 6. On considère la fraction rationnelle $\dfrac{16X^4 + 8X^2 + X + 1}{X(1+4X^2)^2}$.

1. Montrer qu'il existe cinq réels $a_1, \ldots, a_5$ tels que
$$\frac{16X^4 + 8X^2 + X + 1}{X(1+4X^2)^2} = \frac{a_1}{X} + \frac{a_2X + a_3}{1+4X^2} + \frac{a_4X + a_5}{(1+4X^2)^2}.$$
2. Déterminer les cinq réels $a_1, \ldots, a_5$.
3. Dériver la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{x}{1+4x^2}$ et donner le résultat sous la forme :
$$g'(x) = \frac{b}{1+4x^2} + \frac{c}{(1+4x^2)^2}, \text{ où } b \text{ et } c \text{ sont deux réels à déterminer.}$$
4. Donner une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+4x^2}$.
5. Déduire des deux questions précédentes qu'une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \dfrac{1}{(1+4x^2)^2}$ est la fonction
$$F(x) = \frac{1}{4}\arctan(2x) + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+4x^2}\right).$$
6. Donner une primitive sur $]0, +\infty[$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{16x^4 + 8x^2 + x + 1}{x(1+4x^2)^2}$.