Université Pierre et Marie Curie 2014–2015
1M002, Examen 15 mai 2015
Durée : 3 heures

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de tout appareil électronique de calcul et des téléphones portables est interdite. Les correcteurs tiendront compte de la qualité de la rédaction et de la précision des raisonnements.

Cet examen comporte **6** exercices et est noté suivant le barème indicatif suivant. Exercice 1 : 3 points; exercice 2 : 5 points; exercice 3 : 4,5 points; exercice 4 : 3 points; exercice 5 : 6 points; exercice 6 : 7,5 points. Le total est de 29 points et la note sera ramenée sur **25**.

Questions de cours

Exercice 1. Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et $f : E \to F$ une application linéaire.

1. Définir le noyau et l'image de f.

Solution : Le noyau $\ker(f)$ de f est le sous-ensemble $\{v \in E \text{ tels que } f(v) = 0_F\}$ de E. L'image $\mathrm{im}(f)$ est le sous-ensemble $\{v' \in F \text{ tels que } \exists v \in E,\ f(v) = v'\}$ de F.

2. Énoncer le théorème du rang.

Solution : Le rang $\mathrm{rg}(f)$ de f est la dimension de $\mathrm{im}(f)$. Le théorème du rang énonce dans les conditions de l'énoncé :

$$\dim(\ker(f)) + \mathrm{rg}(f) = \dim(E).$$

Exercices d'Analyse

Exercice 2.

1. a. Donner une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $t \mapsto te^t$.

Solution : On peut tout d'abord imaginer, par expérience, qu'une primitive doit être de la forme $t \mapsto (at+b)e^t$ pour a et b deux réels. Il suffit de dériver pour s'apercevoir que $a = 1$ et $b = -1$ conviennent.
Une autre solution : notons $F(t) = \int_0^t ue^u du$ la primitive qui s'annule en 0. On effectue l'intégration par parties en dérivant u et intégrant e^u : Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $F(t) = [ue^u]_0^t - \int_0^t e^u du = te^t - e^t + 1 = (t-1)e^t + 1$.
Dans les deux cas, on obtient qu'une primitive est $t \mapsto (t-1)e^t$.

b. À l'aide d'un changement de variables, en déduire la valeur de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\cos(t)e^{\sin(t)}dt$.

Solution : On identifie dans la fonction à intégrer le produit $\sin(t)e^{\sin(t)}$. Pour faire apparaître la fonction $u \mapsto ue^u$, on effectue le changement de variables $u = \sin(t)$. Quand t varie entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, u varie entre 0 et 1. De plus, on a $\frac{du}{dt} = \cos(t)$, de sorte que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\cos(t)e^{\sin(t)}dt = \int_0^1 ue^u du.$$

La question précédente nous donne la valeur de cette dernière intégrale : $\int_0^1 ue^u du = 1$.

On en conclut que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\cos(t)e^{\sin(t)}dt = 1$.

2. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k+n}{k^2+n^2}$.

a. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx$.

Solution : D'après un résultat du cours, une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ est $x \mapsto \arctan(x)$, donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}$.
D'autre part, une primitive sur $\mathbb{R}$ de $\dfrac{x}{1+x^2}$ est $\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$, donc on obtient :

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\left(\ln(2) - \ln(1)\right) = \frac{\ln(2)}{2}.$$

b. Interpréter la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ comme une suite de sommes de Riemann.

Solution : Pour tout $k \geq 1$ et $n \geq 1$, on a $\dfrac{k+n}{k^2+n^2} = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{\frac{k}{n}+1}{\left(\frac{k}{n}\right)^2+1}\right)$. Autrement dit, on a, pour tout $n \geq 1$, $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{k}{n}+1}{\left(\frac{k}{n}\right)^2+1}$. Donc la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite de sommes de Riemann pour la fonction $x \mapsto \dfrac{x+1}{x^2+1}$.

c. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge et donner sa limite.

Solution : La fonction $x \mapsto \dfrac{x+1}{x^2+1}$ est continue sur $[0,1]$, donc par théorème de cours, la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente et sa limite vaut :

$$\int_0^1 \frac{x+1}{1+x^2}dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx + \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx.$$

La question 2.a permet de calculer cette limite : la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$ est $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\ln(2)}{2}$.

Exercice 3. On note exp la fonction exponentielle $t \mapsto e^t$. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = \displaystyle\int_0^1 \exp(t^n)dt$.

1. Calculer v_0 et v_1.

Solution : On a $v_0 = \displaystyle\int_0^1 e^1 dt = e$. De même, on a $v_1 = \displaystyle\int_0^1 e^t dt = e - 1$.

2. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive et décroissante.

Solution : Pour tout $t \in [0,1]$ et tout $n \geq 0$, on a $\exp(t^n) \geq 0$. Par positivité de l'intégrale, tous les termes v_n sont positifs.
De plus, pour tout $n \geq 0$ et $t \in [0,1]$, on a $t^{n+1} \leq t^n$. Comme l'exponentielle est croissante, on a, pour tout $t \in [0,1]$, $\exp(t^{n+1}) \leq \exp(t^n)$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que, pour tout $n \geq 0$, on a $v_{n+1} \leq v_n$.
Ainsi la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive et décroissante.

3. Montrer que pour tout $u \in [0,1]$, on a $0 \leq e^u - 1 \leq eu$.

Solution : On applique l'inégalité des accroissements finis à la fonction $t \mapsto e^t$ entre 0 et u : pour tout $t \in [0,u]$, la dérivée de cette fonction vaut e^t et on a $0 \leq e^t \leq e$. L'inégalité des accroissements finis donne alors $0 \leq e^u - e^0 \leq e(u-0)$, c'est-à-dire l'inégalité demandée.

4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leq v_n - 1 \leq e \int_0^1 t^n dt$.

Solution : Soit $n \in \mathbb{N}$. On écrit $v_n - 1 = \int_0^1 \exp(t^n)dt - 1 = \int_0^1 (\exp(t^n) - 1)dt$. On utilise à présent l'inégalité de la question précédente avec $u = t^n$ (pour $t \in [0,1]$) : $0 \leq \exp(t^n) - 1 \leq et^n$. On peut intégrer cette inégalité sur $[0,1]$ et la croissance de l'intégrale donne $0 \leq \int_0^1 (\exp(t^n) - 1)dt \leq \int_0^1 et^n dt$. On obtient bien : $0 \leq v_n - 1 \leq e \int_0^1 t^n dt$.

5. En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et donner sa limite.

Solution : On sait que $\int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$. Donc l'inégalité de la question précédente se réécrit $0 \leq v_n - 1 \leq \frac{1}{n+1}$. On en déduit que $v_n - 1$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite 1.

Exercices d'Algèbre

Exercice 4. On se place dans l'espace vectoriel E des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2. On rappelle que la famille $(1, X, X^2)$ est une base de cet espace vectoriel.
On considère l'application f de E dans E définie par $f(P) = P + (X+1)P'$.

1. Montrer que f est une application linéaire de E dans E.

Solution : D'abord on remarque que l'image d'un polynôme de degré inférieur ou égal à 2 est encore de degré inférieur ou égal à 2 : f est bien une application de E dans E. Soient maintenant P et Q deux polynômes de E et s, t deux réels. On a

$$f(sP+tQ) = (sP+tQ) + (X+1)(sP+tQ)' = s(P+(X+1)P') + t(Q+(X+1)Q') = sf(P) + tf(Q).$$

Donc f est une application linéaire de E dans E.

2. Déterminer la matrice de f dans la base $(1, X, X^2)$.

Solution : On a $f(1) = 1$, $f(X) = 2X + 1$ et $f(X^2) = 3X^2 + 2X$. Donc la matrice de f dans la base $(1, X, X^2)$ est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

3. L'application f est-elle bijective ?

Solution : Plusieurs solutions ici : on pourrait par exemple directement déterminer le noyau de f en résolvant $f(aX^2 + bX + c) = 0$. Une solution rapide est d'utiliser que f est bijective si et seulement si sa matrice dans une base est inversible. Or la matrice trouvée dans la question précédente est inversible car son déterminant vaut $6 \neq 0$.
f est donc bijective.

Exercice 5. On considère le système linéaire à coefficients dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 + \ \ x_4 = b_1 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 4x_4 = b_2 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 6x_4 = b_3 \\ 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 5x_4 = b_4 \end{cases}$$

1. Écrire la matrice A du système.

Solution : La matrice du système est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur b_1, b_2, b_3, b_4 pour que le système ait des solutions.

Solution : On applique l'algorithme du pivot de Gauss au système. On obtient le système :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ \ x_3 + \ \ x_4 & = & b_1 \\ x_2 + 3x_3 + 3x_4 & = & b_2 - b_1 \\ x_4 & = & \dfrac{b_3 - b_2}{2} \\ 0 & = & b_4 + \dfrac{b_3}{2} - \dfrac{3b_2}{2} - 2b_1 \end{cases}$$

ou en d'autres termes la matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{cccc|l} 1 & 1 & 1 & 1 & b_1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dfrac{b_3 - b_2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_4 + \dfrac{b_3}{2} - \dfrac{3b_2}{2} - 2b_1 \end{array}\right)$$

Le calcul n'est pas détaillé ici car toutes les sections n'ont pas utilisé les mêmes notations.
Le système a donc des solutions si et seulement si $b_4 + \dfrac{b_3}{2} - \dfrac{3b_2}{2} - 2b_1 = 0$.

3. Déterminer le rang de A.

Solution : Le rang de A est le nombre de lignes non-nulles après applications du pivot de Gauss. C'est donc 3.

4. Résoudre le système quand $b_1 = b_2 = 1$, $b_3 = 3$ et $b_4 = 2$.

Solution : Dans ce cas, l'équation $b_4 + \dfrac{b_3}{2} - \dfrac{3b_2}{2} - 2b_1$ est vérifiée. Donc le système a des solutions. On le réécrit :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ \ x_4 & = & 1 - x_3 \\ x_2 + 3x_4 & = & -3x_3 \\ x_4 & = & 1 \end{cases}$$

On obtient successivement $x_4 = 1$, $x_2 = -3x_3 - 3$ et $x_1 = 3 + 2x_3$. Donc l'ensemble des solutions est :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 3 + 2x_3 \\ -3 - 3x_3 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ pour } x_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

5. Résoudre le système quand $b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = 1$.

Solution : L'équation $b_4 + \frac{b_3}{2} - \frac{3b_2}{2} - 2b_1 = 0$ n'est pas vérifiée quand $b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = 1$. Donc le système n'a pas de solutions.

Exercice 6. On considère la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que B est inversible et calculer son inverse.

Solution : En développant le déterminant suivant la deuxième ligne, on obtient $\det(B) = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$. Donc B est inversible. En appliquant votre méthode préférée pour inverser une matrice de taille 3, on obtient

$$B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Calculer le polynôme caractéristique et déterminer les valeurs propres de B.

Solution : Le polynôme caractéristique de B est $\chi_B(X) = \det(B - XI_3) = \begin{vmatrix} 1-X & -1 & 1 \\ -1 & -X & 0 \\ 1 & 1 & 1-X \end{vmatrix}$. On peut le calculer en développant suivant la dernière colonne :

$$\begin{aligned} \chi_B(X) &= \begin{vmatrix} -1 & -X \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (1-X)\begin{vmatrix} 1-X & -1 \\ -1 & -X \end{vmatrix} \\ &= -(1-X) + (1-X)(X^2 - X - 1) \\ &= (1-X)(X^2 - X - 2) \end{aligned}$$

La valeurs propres de B sont les racines de ce polynômes. Les racines de $X^2 - X - 2$ sont -1 et 2. Donc les valeurs propres de B sont -1, 1 et 2.

3. La matrice B est-elle diagonalisable ?

Solution : La matrice B a trois valeurs propres distinctes et est de taille 3 : elle est donc diagonalisable.

4. Déterminer l'espace propre de B associé à la valeur propre 1.

Solution : Il s'agit de déterminer le noyau de de $B - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, ou encore de résoudre le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -x_2 + x_3 &=& 0 \\ -x_1 - x_2 &=& 0 \\ x_1 + x_2 &=& 0 \end{array} \right.$$

L'ensemble des solutions et donc l'espace propre de B associé à 1 est :

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 \\ -x_1 \end{pmatrix} \text{ pour } x_1 \in \mathbb{R} \right\}.$$

5. Déterminer l'espace propre de B associé à la valeur propre 2.

Solution : Il s'agit de déterminer le noyau de de $B - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, ou encore de résoudre le système

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 & = & 0 \\ -x_1 - 2x_2 & = & 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 & = & 0 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions et donc l'espace propre de B associé à 2 est :

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2x_2 \\ x_2 \\ -x_2 \end{pmatrix} \text{ pour } x_1 \in \mathbb{R} \right\}.$$

6. Déterminer l'espace propre de B associé à la valeur propre -1.

Solution : Il s'agit de déterminer le noyau de de $B + I_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, ou encore de résoudre le système

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 & = & 0 \\ -x_1 + x_2 & = & 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 & = & 0 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions et donc l'espace propre de B associé à -1 est :

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ -x_1 \end{pmatrix} \text{ pour } x_1 \in \mathbb{R} \right\}.$$

7. Donner une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $B = PDP^{-1}$. On ne cherchera pas à calculer P^{-1}.

Solution : Considérons les trois vecteurs $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $v_{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Ce sont chacun des vecteurs propres de B associés respectivement à 1, 2 et -1. Donc dans la famille (v_1, v_2, v_{-1}) est une base. Et dans cette base, la matrice de l'application linéaire associée à B est la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Définissons P comme la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base (v_1, v_2, v_{-1}). Alors on a $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. De plus, d'après le cours, on a la relation $B = PDP^{-1}$.