Université Pierre et Marie Curie 2014–2015
1M002, Examen partiel du 25 février 2015

Version corrigée

Exercice 1 (Question de cours)**.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Donner la définition de :

la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.

Solution : Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy si elle vérifie :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall p \geq N,\ |u_n - u_p| \leq \varepsilon.$$

Exercice 2. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ les deux fractions rationnelles suivantes :

$$1)\quad \frac{2X+1}{(X+1)^2}\ ; \qquad\qquad 2)\quad \frac{1}{X^3-1}.$$

Solution :

1. D'après le théorème de décomposition en éléments simples, il existe deux nombres réels a et b tels que $S = \frac{a}{X+1} + \frac{b}{(X+1)^2}$. En mettant au même dénominateur, on obtient la relation $S = \frac{aX+a+b}{(X+1)^2}$. On peut alors identifier les coefficients : $a = 2$ et $b = -1$. On conclut que la décomposition en éléments simples de S est $S = \frac{2}{X+1} - \frac{1}{(X+1)^2}$.
   De façon alternative, on peut aussi directement constater :
   $$\frac{2X+1}{(X+1)^2} = \frac{2(X+1)-1}{(X+1)^2} = \frac{2}{X+1} - \frac{1}{(X+1)^2}.$$
2. On commence par factoriser le dénominateur : $X^3 - 1 = (X-1)(X^2+X+1)$ et X^2+X+1 n'a pas de racines réelles. D'après le théorème de décomposition en éléments simples, il existe trois nombres réels a, b et c tels que $T = \frac{a}{X-1} + \frac{bX+c}{X^2+X+1}$. Pour déterminer a, on peut multiplier l'égalité par $X-1$ puis évaluer en $X = 1$; on obtient $a = \frac{1}{3}$. En multipliant l'égalité par X puis en prenant la limite en $X \to +\infty$, on obtient $0 = a + b$, soit $b = -\frac{1}{3}$. Enfin, on peut évaluer l'égalité en 0 pour obtenir $-1 = -a + c$, soit $c = -\frac{2}{3}$. On conclut que la décomposition en éléments simples de T est $T = \frac{1}{3(X-1)} - \frac{X+2}{3(X^2+X+1)}$.

Exercice 3. On considère la fonction $f : \begin{cases} [0;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{2}{\sqrt{x}+1} \end{cases}$

1. Étudier la fonction et tracer approximativement son graphe sur $[0;2]$. On prendra une échelle où l'unité est d'environ 10 centimètres.

Solution : La fonction $x \to \sqrt{x}+1$ est définie, continue, strictement croissante et strictement positive sur $[0,+\infty[$, et dérivable sur $]0,+\infty[$. Donc f est définie et continue sur $[0,+\infty[$, dérivable sur $]0,+\infty[$ et strictement décroissante, comme inverse de fonction strictement croissante.
On calcule de plus $f(0) = 2$, $f(1) = 1$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
Pour le tracé du graphe, on renvoie à la figure 1 plus loin.

2. Démontrer que le point 1 est l'unique point fixe de f sur $[0, +\infty[$.

<u>Solution</u> : f est continue et strictement décroissante sur $[0, +\infty[$. Donc la fonction $x \mapsto f(x) - x$ est continue et strictement décroissante sur $[0, +\infty[$. Donc cette fonction s'annule au plus une fois sur $[0, +\infty[$. Or, on a déjà calculé $f(1) = 1$. Donc l'unique point fixe de f est 1.

3. Démontrer que les relations $u_0 = \dfrac{1}{4}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \geq 0$ définissent une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont tous les termes appartiennent à l'intervalle $\left[\dfrac{1}{4}, \dfrac{4}{3}\right]$.

<u>Solution</u> : Montrons que l'intervalle $I = \left[\dfrac{1}{4}, \dfrac{4}{3}\right]$ est stable par f. Comme f est continue et décroissante, l'image de I est l'intervalle $[f(\dfrac{4}{3}), f(\dfrac{1}{4})]$. Or on calcule

$$f(\frac{1}{4}) = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{4}} + 1} = \frac{2}{\frac{1}{2} + 1} = \frac{4}{3}.$$

De plus,

$$f(\frac{4}{3}) = \frac{2}{\sqrt{\frac{4}{3}} + 1} = \frac{2\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \geq \frac{2\sqrt{3}}{4} \geq \frac{1}{4}.$$

Donc l'image par f de l'intervalle I incluse dans I. L'intervalle I est donc stable.
Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et tous les termes appartiennent à l'intervalle $\left[\dfrac{1}{4}, \dfrac{4}{3}\right]$.

4. Calculer u_1 et u_2. Représenter graphiquement sur le graphe de f les termes u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 sans les calculer.

<u>Solution</u> : On a $u_1 = f(\dfrac{1}{4}) = \dfrac{4}{3}$ comme on l'a déjà calculé. De plus $u_2 = f(\dfrac{4}{3}) = \dfrac{2\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}$.
On représente les termes sur le graphe de f (voir figure 1).

5. Prouver que la sous-suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que la sous-suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

<u>Solution</u> : La fonction f est décroissante. Donc les deux sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones de sens contraires. Or on a déjà montré que $u_2 = \dfrac{2\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \geq \dfrac{1}{4} = u_0$. Donc la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

6. En déduire que ces deux sous-suites sont convergentes.

<u>Solution</u> : Ces deux suites sont bornées (minorées par $\dfrac{1}{4}$ et majorées par $\dfrac{4}{3}$) et monotones. Elles sont donc convergentes.

7. Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer sa dérivée. Quelle est la valeur maximale de $|f'(x)|$ sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{4}, \dfrac{4}{3}\right]$?

<u>Solution</u> : f est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme quotient défini de fonctions dérivables. On calcule

$$f'(x) = -\frac{2\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x} + 1)^2} = -\frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)^2}.$$

Sa valeur absolue $|f'(x)| = \dfrac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)^2}$ est décroissante sur $]\dfrac{1}{4}, \dfrac{4}{3}[$. Elle atteint donc sa valeur maximum en $x = \dfrac{1}{4}$. Cette valeur maximale est $|f'(\dfrac{1}{4})| = \dfrac{1}{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} + 1)^2} = \dfrac{8}{9}$.

8. Montrer qu'on a $|f(x) - f(y)| \leq \frac{8}{9}|x - y|$ pour x, y dans $\left[\frac{1}{4}, \frac{4}{3}\right]$. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Quelle est sa limite ?

Solution : On a montré que sur $\left[\frac{1}{4}, \frac{4}{3}\right]$, on a $|f'(x)| \leq \frac{8}{9}$. D'après l'inégalité des accroissements finis, on obtient que, pour x, y dans $\left[\frac{1}{4}, \frac{4}{3}\right]$, on a $|f(x) - f(y)| \leq \frac{8}{9}|x - y|$.
La fonction f est donc contractante sur $\left[\frac{1}{4}, \frac{4}{3}\right]$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors vers l'unique point fixe de f sur $\left[\frac{1}{4}, \frac{4}{3}\right]$. Elle converge donc vers 1.

Exercice 4. On considère la fraction rationnelle $\frac{1}{X^3 - X}$.

1. Déterminer les coefficients de sa décomposition en éléments simples $\frac{a}{X} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{X+1}$.

Solution : On vérifie bien que $X^3 - X = X(X-1)(X+1)$. La décomposition en éléments simples est donc de la forme $R = \frac{a}{X} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{X+1}$. Pour déterminer a, on peut multiplier l'égalité par X et évaluer en $X = 0$: $a = -1$. Pour b, on multiplie l'égalité par $X - 1$ et on évalue en $X = 1$: $b = \frac{1}{2}$. Pour c, on multiplie l'égalité par $X + 1$ et on évalue en $X = -1$: $c = \frac{1}{2}$. La décomposition est donc :

$$R = -\frac{1}{X} + \frac{1}{2(X-1)} + \frac{1}{2(X+1)}.$$

2. Démontrer en utilisant la question précédente que pour tout entier $n \geq 2$ on a :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^3 - k} = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1} + \frac{1}{k+1}\right) - \frac{1}{k}\right).$$

Solution : En évaluant la fraction rationnelle en $X = k$, pour un entier $k \geq 2$, et en utilisant l'égalité de la question précédente, on obtient $\frac{1}{k^3 - k} = -\frac{1}{k} + \frac{1}{2(k-1)} + \frac{1}{2(k+1)}$. Il reste à faire la somme pour k compris entre 2 et n :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^3 - k} = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1} + \frac{1}{k+1}\right) - \frac{1}{k}\right).$$

3. En déduire, pour tout entier $n \geq 2$, l'égalité :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^3 - k} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right).$$

Solution : On peut manipuler les sommes :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^3 - k} &= \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1} + \frac{1}{k+1}\right) - \frac{1}{k}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k+1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}
\end{aligned}$$

Dans la première somme apparaissent tous les inverses d'entiers entre 1 et $n-1$ tandis que dans la deuxième somme apparaissent les inverses des entiers entre 3 et $n+1$. Donc on peut écrire :

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^3-k} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}+\frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n+1}\frac{1}{k}-\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\\ &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\sum_{k=3}^{n-1}\frac{1}{k}\right)+\frac{1}{2}\left(\sum_{k=3}^{n-1}\frac{1}{k}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=3}^{n-1}\frac{1}{k}+\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

La somme $\sum_{k=3}^{n-1}\frac{1}{k}$ se simplifie, il reste $\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)$ qui donne bien le terme $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right)$.

Méthode alternative : on montre l'égalité par récurrence. C'est vrai pour $n=2$ car le terme de gauche vaut $\frac{1}{6}$ et le terme de droite $\frac{1}{4}-\frac{1}{2}(\frac{1}{3}-\frac{1}{2})=\frac{1}{6}$.

Supposons que c'est vrai au rang $n-1$ et montrons le au rang n :

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^3-k} &= \sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k^3-k}+\frac{1}{n^3-n}\\ \text{[par hypothèse de récurrence]} &= \frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n-1}\right)+\frac{1}{n^3-n}\\ \text{[d'après la question précédente]} &= \frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n-1}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n+1}\right)-\frac{1}{n}\\ &= \frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

4. On pose $u_n=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{n^3-n}$ pour $n\geq 2$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est convergente et déterminer sa limite.

Solution : On utilise la question précédente : $u_n=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right)$. Ainsi, on obtient que $(u_n)_{n\geq 2}$ converge vers $\frac{1}{4}$.

Exercice 5. Soit a un nombre complexe tel que $|a|=1$ et $a\neq 1$.

1. On considère la suite géométrique $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que si elle converge vers une limite L, alors on a $L=aL$.

Solution : Notons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cette suite et supposons qu'elle converge vers L. La suite vérifie la relation $u_{n+1}=au_n$. Or, quand n tend vers l'infini, on sait que u_{n+1} tend vers L et au_n tend vers aL. Par unicité de la limite, on a $L=aL$.

2. Montrer que cette suite n'est pas convergente.

Solution : On a supposé que $a\neq 1$. Donc l'équation $L=aL$ a une unique solution dans $\mathbb{C}$: c'est $L=0$. Or la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0. En effet, en fixant $\varepsilon=\frac{1}{2}$, on a pour tout entier n

$$|u_n-0|=|a^n|=|a|^n=1>\frac{1}{2}.$$

3. Montrer qu'elle possède une sous-suite convergente.

Solution : Pour tout entier n, le module de u_n vaut 1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite complexe et bornée. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, elle admet une sous-suite convergente.

4. Soit l la limite d'une telle sous-suite convergente. Montrer que $|l| = 1$.

Solution : D'abord, comme a est de module 1, tous les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont de module 1. Soit donc $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite qui converge vers l. Alors, par théorème du cours, sa partie réelle $(\mathrm{Re}(u_{\varphi(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\mathrm{Re}(l)$ et de même pour les parties imaginaires. Donc la suite de terme général

$$|u_{\varphi(n)}| = \sqrt{(\mathrm{Re}(u_{\varphi(n)}))^2 + (\mathrm{Im}(u_{\varphi(n)}))^2}$$

converge vers $\sqrt{(\mathrm{Re}(l))^2 + (\mathrm{Im}(l))^2} = |l|$. Comme $|u_{\varphi(n)}| = 1$, on obtient $|l| = 1$

5. Quelles sont les valeurs possibles de l quand $a = i$.

Solution : Dans le cas où $a = i$, la suite est périodique et prend les valeurs 1, i, -1 et $-i$. Donc une sous-suite ne peut converger que vers une de ces quatre valeurs. On vérifie que ces quatre valeurs sont possibles, en considérant respectivement les sous-suites $(u_{4n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{4n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{4n+2})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{4n+3})_{n\in\mathbb{N}}$, qui sont chacune des suites constantes, donc convergentes.

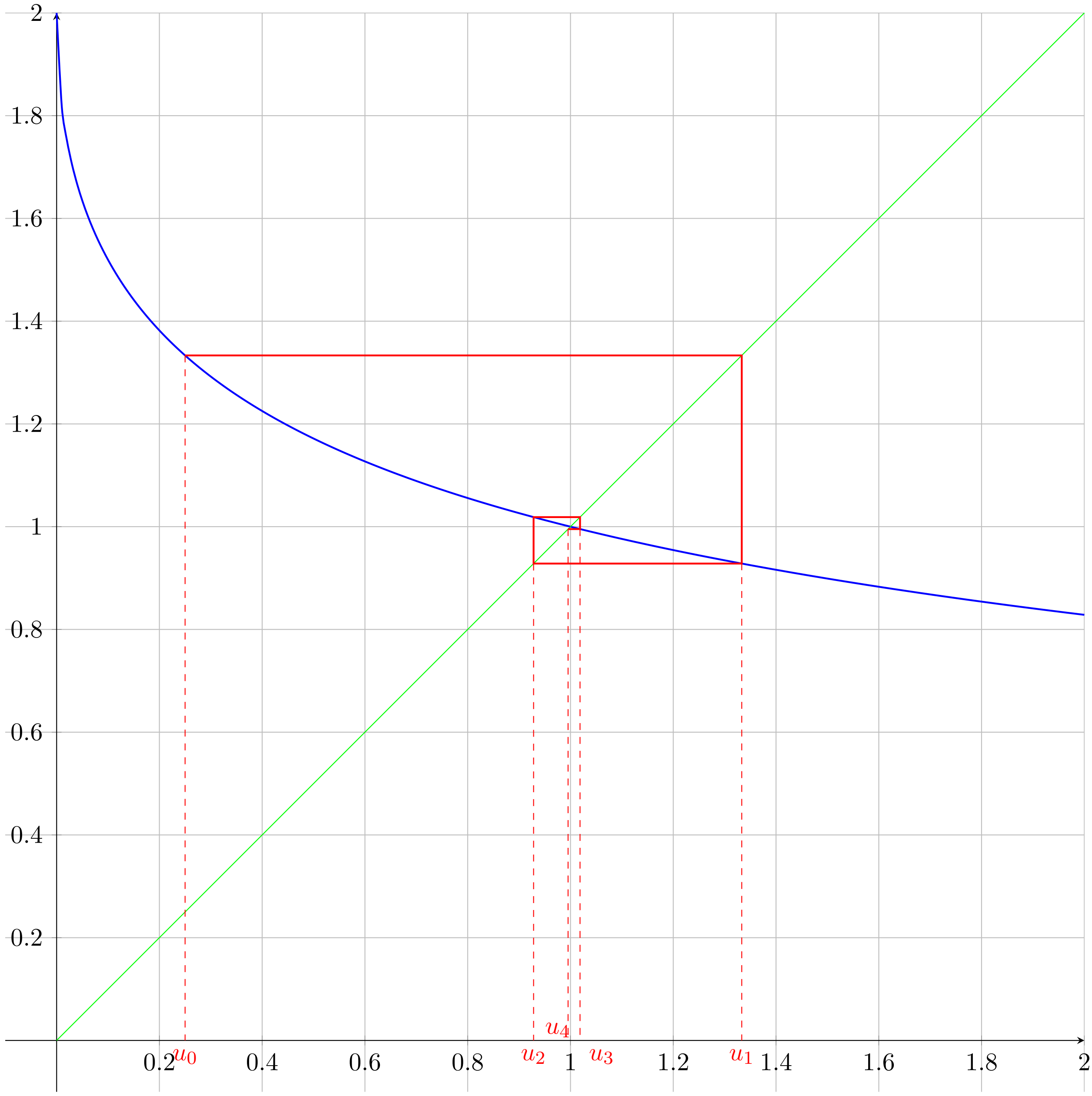

FIGURE 1 – Le graphe de f (en bleu) et les 5 premiers termes de la suite