Université Pierre et Marie Curie 2015–2016
1M002, Rattrapage
Durée : 3 heures

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de tout appareil électronique de calcul et des téléphones portables est interdite. Les correcteurs tiendront compte de la qualité de la rédaction et de la précision des raisonnements.

Cet examen comporte **8** exercices indépendants qui peuvent être traités dans le désordre. Il est noté suivant le barème indicatif suivant :
Exercice 1 : 4 points ; exercice 2 : 6 points ; exercice 3 : 6 points ; exercice 4 : 4 points ; exercice 5 : 8 points ; exercice 6 : 8 points ; exercice 5 : 12 points ; exercice 8 : 8 points. Le total est de 56 points et la note sera ramenée sur **50**.

Exercice 1. Pour les matrices suivantes, déterminer si elles sont inversibles :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2. Donner une primitive sur $\mathbb{R}$ de chacune des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \sin(x)\cos^{10}(x)$.
2. $x \mapsto xe^x$.

Exercice 3. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{t^2-1}dt$.
2. $\displaystyle\int_1^e \frac{\cos(\ln(t))}{t}dt$

Exercice 4. On considère l'équation différentielle

$$y'' + 3y' + 2y = 0.$$

Déterminer la solution $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de cette équation différentielle qui vérifie $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

Exercice 5. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x(2-x)$.

1. Déterminer les points fixes de f.
2. Montrer que pour tout x dans $[0,1]$, on a $x \leq f(x) \leq 1$.
3. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :
$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = u_n(2-u_n) \end{cases}$$
Montrer que cette suite est monotone et bornée.
4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la question précédente est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 6. On considère les trois matrices suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le noyau de M.
2. Montrer que $\frac{1}{2}X_0$ est solution de l'équation $MX = B$.
3. Donner l'ensemble des solutions de l'équation $MX = B$.

Exercice 7. On considère la fonction :

$$\begin{array}{cccc} F: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ 2x+y \end{pmatrix} \end{array}$$

et les deux vecteurs $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que F est linéaire.
2. Montrer que la famille (u, v) forme une base de $\mathbb{R}^2$. On note $\mathcal{B}$ cette base.
3. Calculer la matrice de F dans la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ et la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
4. Montrer que F est injective.
5. Quelle est la dimension de l'image de F ?

Exercice 8. On considère la suite complexe définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 + i \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n - 1}{2i} \end{cases}$$

1. Calculer et représenter dans le plan complexe les termes u_0, u_1, u_2.
2. Soit a un nombre complexe et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_n = u_n + a$ pour tout entier n. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n et a. En déduire qu'il existe un unique a tel que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{1}{2i}$ et donner la valeur de a.
3. Pour la valeur de a trouvée dans la question précédente, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ? Si oui, déterminer sa limite.
4. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ? Si oui, déterminer sa limite.