Université Pierre et Marie Curie 2015–2016
1M002, Rattrapage
Durée : 3 heures

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de tout appareil électronique de calcul et des téléphones portables est interdite. Les correcteurs tiendront compte de la qualité de la rédaction et de la précision des raisonnements.

Cet examen comporte **8** exercices indépendants qui peuvent être traités dans le désordre. Il est noté suivant le barème indicatif suivant :
Exercice 1 : 4 points ; exercice 2 : 6 points ; exercice 3 : 6 points ; exercice 4 : 4 points ; exercice 5 : 8 points ; exercice 6 : 8 points ; exercice 5 : 12 points ; exercice 8 : 8 points. Le total est de 56 points et la note sera ramenée sur **50**.

Exercice 1 (4 = 2+2 pts). Pour les matrices suivantes, déterminer si elles sont inversibles :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solution : La matrice A a ses deux premières colonnes identiques, elle n'est donc pas inversible. La matrice B est triangulaire supérieure, son déterminant est le produit des coefficients sur la diagonal. Ce déterminant vaut donc 1, il est non nul. On en déduit que B est inversible.

Exercice 2 (6 = 3+3 pts). Donner une primitive sur $\mathbb{R}$ de chacune des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \sin(x)\cos^{10}(x)$.

Solution : En notant $f(x) = \cos(x)$ et $g(t) = t^10$, la fonction de l'énoncé s'écrit $-f' \times g \circ f$. Une primitive est donc $-\dfrac{\cos^{11}(x)}{11}$.

2. $x \mapsto xe^x$.

Solution : On utilise une intégration par parties, en posant $u(x) = x$ et $v(x) = e^x$. La fonction de l'énoncé s'écrit $u \times v'$. Or on a $u' \times v = e^x$ et donc une primitive de $u' \times v$ est $x \to e^x$.
D'après la formule d'intégration par parties, un primitive de $u \times v'$ est donc

$$x \to u(x) \times v(x) - e^x = (x-1)e^x.$$

Exercice 3 (6 = 3+3 pts). Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{t^2-1}dt$.

Solution : On peut écrire $\dfrac{1}{t^2-1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{t-1} - \dfrac{1}{t+1}\right)$.
Or $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{t-1}dt = [\ln(|t-1|)]_2^3 = \ln(2)$ et $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{t+1}dt = [\ln(|t+1|)]_2^3 = \ln(4) - \ln(3)$.
Donc $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{t^2-1}dt = \frac{1}{2}(\ln(2) - (\ln(4) - \ln(3))) = \frac{\ln(\frac{3}{2})}{2}$.

2. $\displaystyle\int_1^e \frac{\cos(\ln(t))}{t}dt$

Solution : On fait le changement de variable $u = \ln(t)$. u varie entre 0 et 1 quand t varie entre 1 et e. De plus, $du = \dfrac{dt}{t}$.
Ainsi, $\displaystyle\int_1^e \frac{\cos(\ln(t))}{t}dt = \int_0^1 \cos(u)du = \sin(1)$.

Exercice 4 (4pts). On considère l'équation différentielle

$$y'' + 3y' + 2y = 0.$$

Déterminer la solution $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de cette équation différentielle qui vérifie $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

Solution : On considère le polynôme caractéristique $x^2 + 3x + 2$. Ses deux racines sont -1 et -2. Par théorème, toute solution de l'équation différentielle s'écrit $y(t) = Ae^{-t} + Be^{-2t}$, où A et B sont des réels. En évaluant en 0, on obtient $y(0) = A + B$ et $y'(0) = -A - 2B$.
On doit donc résoudre le système $\begin{cases} A + B & = 1 \\ A + 2B & = 0 \end{cases}$.
L'unique solution est $A = 2$, $B = -1$.
La solution est donc $y(t) = 2e^{-t} - e^{-2t}$.

Exercice 5 (8 = 2+2+2+2). On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x(2 - x)$.

1. Déterminer les points fixes de f.

Solution : Un nombre réel x est point fixe de f si et seulement si $f(x) = x$. On doit donc résoudre l'équation $x(2 - x) = x$, autrement dit $x^2 - x = 0$. Les points fixes de f sont donc les points 0 et 1.

2. Montrer que pour tout x dans $[0, 1]$, on a $x \leq f(x) \leq 1$.

Solution : Supposons $x \in [0, 1]$. On a donc $2 - x \geq 1$ et donc (comme x est positif) :

$$f(x) = x(2 - x) \geq x.$$

D'autre part, $1 - f(x) = 1 - x(2 - x) = 1 - 2x + x^2 = (1 - x)^2$ est toujours positif. Donc on obtient bien $f(x) \leq 1$.

3. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = u_n(2 - u_n) \end{cases}$$

Montrer que cette suite est monotone et bornée.

Solution : D'après la question précédente, l'intervalle $[0, 1]$ est stable par f. Comme $u_0 = \dfrac{1}{2}$ est dans cet intervalle, tous les termes u_n de la suite sont dans cet intervalle.
D'après la question précédente, on en déduit que $u_n \leq f(u_n) = u_{n+1}$ pour tout entier n.
La suite est donc bien croissante et bornée.

4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la question précédente est convergente et déterminer sa limite.

Solution : La suite est croissante et bornée, elle converge donc vers une limite l plus grande que $u_0 = \frac{1}{2}$. Comme f est continue, la limite l doit être un point fixe de f. L'unique point fixe de f supérieur à $\frac{1}{2}$ est 1.

Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.

Exercice 6 (8 = 4+1+3 pts). On considère les trois matrices suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le noyau de M.

Solution : Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$

2. Montrer que $\frac{1}{2}X_0$ est solution de l'équation $MX = B$.

Solution : Un calcul direct donne $MX_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$. On en déduit bien que $M\left(\frac{1}{2}X_0\right) = B$

3. Donner l'ensemble des solutions de l'équation $MX = B$.

Exercice 7 (12 = 2+2+3+2+3 pts). On considère la fonction :

$$F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ 2x+y \end{pmatrix} \end{array}$$

et les deux vecteurs $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que F est linéaire.
2. Montrer que la famille (u, v) forme une base de $\mathbb{R}^2$. On note $\mathcal{B}$ cette base.
3. Calculer la matrice de F dans la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ et la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
4. Montrer que F est injective.
5. Quelle est la dimension de l'image de F ?

Exercice 8 (8 = 2+2+2+2pts). On considère la suite complexe définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 + i \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n - 1}{2i} \end{cases}$$

1. Calculer et représenter dans le plan complexe les termes u_0, u_1, u_2.
2. Soit a un nombre complexe et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_n = u_n + a$ pour tout entier n. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n et a. En déduire qu'il existe un unique a tel que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{2i}$ et donner la valeur de a.
3. Pour la valeur de a trouvée dans la question précédente, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ? Si oui, déterminer sa limite.
4. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ? Si oui, déterminer sa limite.