Université Pierre et Marie Curie 2015–2016
1M002, Deuxième Partiel — Corrigé

Durée : 3 heures

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de tout appareil électronique de calcul et des téléphones portables est interdite. Les correcteurs tiendront compte de la qualité de la rédaction et de la précision des raisonnements.

Cet examen comporte **5** exercices indépendants qui peuvent être traités dans le désordre. Il est noté suivant le barème indicatif suivant :
Exercice 1 : 5 points ; exercice 2 : 6 points ; exercice 3 : 6 points ; exercice 4 : 5 points ; exercice 5 : 5 points. Le total est de 27 points et la note sera ramenée sur **25**.

Exercice 1. 1. Soit f une fonction continue et impaire sur $\mathbb{R}$. Que vaut $\int_{-2}^{2} f(t)dt$?

Solution : La fonction est continue et impaire : son intégrale sur l'intervalle $[-2, 2]$ vaut 0.

2. Vrai ou Faux : Toute application linéaire surjective entre deux espaces vectoriels de dimension finie est aussi injective ? On donnera une justification ou un contre-exemple.

Solution : C'est faux : l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ donnée par $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x$ est surjective mais non injective.
(Pour que l'affirmation soit vraie, il faut que les deux espaces soient de même dimension.)

3. Une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui admet 0, 1 et 2 comme valeurs propres est-elle diagonalisable ? Est-elle inversible ? On justifiera la réponse.

Solution : Elle est diagonalisable car elle a 3 valeurs propres distinctes et est de taille 3. Elle n'est pas inversible : 0 est valeur propre, donc le noyau n'est pas réduit à 0.

Exercice 2.

1. (a) Donner une primitive sur $]0, +\infty[$ de la fonction $x \mapsto x\ln(x)$. (*Indication :* on pourra faire une intégration par parties).

Solution : On peut faire une intégration par parties, en dérivant $\ln(x)$ et en intégrant x. On obtient qu'une primitive est $\frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4}$.

(b) À l'aide d'un changement de variables, en déduire la valeur de $\int_0^1 2(t^3 + t)\ln(t^2 + 1)dt$.

Solution : Effectuons le changement de variable $x = t^2 + 1$. On a :

$$\int_0^1 2(t^3 + t)\ln(t^2 + 1)dt = \int_0^1 (t^2 + 1)\ln(t^2 + 1)(2t)dt = \int_1^2 x\ln(x)dx$$

D'après la question précédente, on en déduit :

$$\begin{aligned}\int_0^1 2(t^3 + t)\ln(t^2 + 1)dt &= \left[\frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4}\right]_1^2 \\ &= (2\ln(2) - 1) - (-\frac{1}{4}) \\ &= 2\ln(2) - \frac{3}{4}\end{aligned}$$

2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(\frac{k\pi}{n})}{1+\cos^2(\frac{k\pi}{n})}$.

   (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et exprimer sa limite sous forme d'une intégrale.

Solution : On reconnaît une somme de Riemann : d'après un théorème du cours, cette suite converge vers

$$\int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{1+\cos(\pi x)}dx.$$

   (b) En effectuant un changement de variables, montrer que cette suite tend vers :

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}dx.$$

Solution : On fait dans l'intégrale précédente le changement de variable $t = \cos(\pi x)$. Notons que t varie de 1 à -1 quand x varie de 0 à 1. On remarque que $\dfrac{dt}{dx} = -\pi\sin(\pi x)$. Ainsi, on obtient bien que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers :

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}dx.$$

   (c) Donner la valeur de cette intégrale.

Solution : On connaît une primitive de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$: c'est la fonction arctan. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}dx &= \frac{1}{\pi}\left[\arctan(x)\right]_{-1}^{1} \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\arctan(1) - \arctan(-1)\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right) \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Exercice 3. On pose $a_0 = 6$ et $b_0 = 0$. On considère les suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$(\star) \qquad \begin{cases} a_{n+1} = & -a_n + 5b_n \\ b_{n+1} = & a_n + 3b_n \end{cases}$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Notamment, $X_0 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que la relation $(\star)$ s'écrive $X_{n+1} = AX_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution : Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

La relation $(\star)$ s'écrit bien sous la forme matricielle $X_{n+1} = AX_n$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer X_n en fonction de A^n et X_0.

Solution : On a $X_1 = AX_0$, $X_2 = AX_1 = A^2X_0$. On montre par une récurrence immédiate que $X_n = A^nX_0$.

On considère les deux vecteurs $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$.

3. Montrer qu'ils forment une base de $\mathbb{R}^2$.

Solution : Les deux vecteurs forment une famille libre, car ils ne sont pas colinéaires. Comme $\mathbb{R}^2$ est de dimension 2, ils forment une base de $\mathbb{R}^2$.

4. Écrire X_0 comme combinaison linéaire de V_1 et V_2.

Solution : On cherche a et b tels que $X_0 = aV_1 + bV_2$. Autrement dit, on veut résoudre le système

$$\begin{cases} 6 = a + 6b \\ 0 = a - b \end{cases}.$$

La solution est $a = b = 1$. Autrement dit $X_0 = V_1 + V_2$.

5. Montrer que $AV_1 = 4V_1$ et $AV_2 = -2V_2$. En déduire l'écriture des vecteurs A^nV_1 et A^nV_2 dans la base (V_1, V_2), pour tout entier $n \geq 1$.

Solution : On a $AV_1 = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 4V_1$. De même, $AV_2 = \begin{pmatrix} -10 \\ 2 \end{pmatrix} = -2V_2$.
On en déduit par une récurrence immédiate que $A^nV_1 = 4^nV_1$ et $A^nV_2 = (-2)^nV_2$ pour tout entier naturel n.

6. Exprimer les coordonnées du vecteur A^nX_0 dans la base (V_1, V_2), pour tout entier $n \geq 1$.

Solution : On écrit, en utilisant la question précédente :

$$A^nX_0 = A^n(V_1 + V_2) = A^nV_1 + A^nV_2 = 4^nV_1 + (-2)^nV_2.$$

7. Pour tout $n \geq 1$, donner une formule explicite exprimant X_n. Montrer que $\dfrac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n \to \infty} 1$.

Solution : On a, d'après la question 2 et la question précédente :

$$X_n = A^nX_0 = 4^nV_1 + (-2)^nV_2 = \begin{pmatrix} 4^n \\ 4^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5(-2)^n \\ -(-2)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4^n + 5(-2)^n \\ 4^n - (-2)^n \end{pmatrix}.$$

Ainsi, on a $a_n = 4^n + 5(-2)^n$ et $b_n = 4^n - (-2)^n$ pour tout entier n. Leur quotient (pour $n \geq 1$) vaut :

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{4^n + 5(-2)^n}{4^n - (-2)^n} = \frac{1 + 5\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^n}.$$

Ainsi, ce quotient converge et $\dfrac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n \to \infty} 1$.

Exercice 4. On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $v_n = \displaystyle\int_0^1 \cos(t^n \pi)\, dt$.

1. Calculer v_0 et v_1.

Solution : On a $v_0 = \int_0^1 \cos(\pi)dt = -1$. D'autre part, $t \to \dfrac{\sin(t\pi)}{\pi}$ est une primitive de $t \to \cos(t\pi)$. On en déduit :

$$v_1 = int_0^1 \cos(t\pi)\, dt = \frac{1}{\pi}\left[\sin(t\pi)\right]_0^1 = 0.$$

Ainsi, on obtient $v_0 = -1$ et $v_1 = 0$.

2. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Solution : Pour tout $0 \leq t \leq 1$, et tout entier naturel n, on a $0 \leq t^{n+1}\pi \leq t^n\pi \leq \pi$. Or la fonction cosinus est décroissante sur $[0,\pi]$. On en déduit que pour tout entier naturel n et tout $0 \leq t \leq 1$, on a $\cos(t^n\pi) \leq \cos(t^{n+1}\pi$. En intégrant cette inégalité sur $[0,1]$, on obtient $v_n \leq v_{n+1}$. La suite est donc bien croissante.

3. Montrer que pour tout réel $0 \leq x \leq 1$, on a $-\pi x \leq \cos(\pi x) - 1 \leq 0$.

Solution : Considérons la fonction défine sur $[0,1]$ par $x \mapsto \cos(\pi x) - 1$. Elle vaut 0 en 0 et sa dérivée est $-\pi\sin(\pi x)$. Cette dérivée est donc comprise entre $-\pi$ et 0. D'après le théorème des accroissements finis, on a $-\pi x \leq \cos(\pi x) - 1 \leq 0$.

4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $-\pi \int_0^1 t^n dt \leq v_n - 1 \leq 0$.

Solution : Pour tout entier naturel n et tout $t \in [0,1]$, on a donc $-\pi t^n \leq \cos(\pi t^n) - 1 \leq 0$. En intégrant cette inégalité entre 0 et 1, on obtient

$$-\pi \int_0^1 t^n dt \leq v_n - 1 \leq 0.$$

5. En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et donner sa limite.

Solution : On a $\int_0^1 t^n dt = \dfrac{1}{n+1}$. Ainsi, pour tout entier n, on obtient l'encadrement :

$$\frac{-\pi}{n+1} \leq v_n - 1 \leq 0.$$

On en conclut que la suite v_n est convergente, de limite 1.

Exercice 5. On considère l'équation différentielle $y'' - 6y' + 9y = 0$. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifient l'équation.

1. Déterminer une base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{S}$.

Solution : On considère le polynôme caractéristique $X^2 - 6X + 9 = (X-3)^2$. Il a comme racine double 3. Une base de S est donc composée des fonctions $y_1 : t \mapsto e^{3t}$ et $y_2 = te^{3t}$.

On considère maintenant l'application $T : \mathcal{S} \to \mathbb{R}^2$ définie par :

$$T(y) = \begin{pmatrix} y(1) \\ y'(1) \end{pmatrix}.$$

2. Montrer que T est linéaire.

Solution : Si y et z sont deux solutions, et λ un nombre réel, alors $y + \lambda z$ est solution, et on peut écrire :

$$T(y+\lambda z) = \begin{pmatrix} (y+\lambda z)(1) \\ (y+\lambda z)'(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(1) + \lambda z(1) \\ y'(1) + \lambda z'(1) \end{pmatrix} = T(y) + \lambda T(z).$$

L'application T est donc linéaire.

3. Déterminer la matrice M de T dans la base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{S}$ et la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Solution : On a $T(y_1) = \begin{pmatrix} e^3 \\ 3e^3 \end{pmatrix}$ et $T(y_2) = \begin{pmatrix} e^3 \\ 4e^3 \end{pmatrix}$. Ainsi, la matrice M est :

$$M = \begin{pmatrix} e^3 & e^3 \\ 3e^3 & 4e^3 \end{pmatrix}.$$

4. Montrer que M est inversible et calculer son inverse.

Solution : On calcule le déterminant de M : $\det(M) = (e^3)^2 = e^6$. Ce déterminant est non-nul, donc M est inversible. On peut calculer l'inverse de M :

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \begin{pmatrix} 4e^3 & -e^3 \\ -3e^3 & e^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4e^{-3} & -e^{-3} \\ -3e^{-3} & e^{-3} \end{pmatrix}.$$

5. Déterminer la solution de l'équation qui vérifie $y(1) = y'(1) = 0$.

Solution : On peut remarquer directement que la fonction nulle est solution !
Sinon, par construction, les coefficients de cette solution dans la base $\mathcal{B}$ sont donnés par le produit $M^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Donc la solution cherchée vaut $0 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2$: on retrouve que c'est la fonction nulle.