Université Pierre et Marie Curie 2015–2016
1M002, Deuxième Partiel
Durée : 3 heures

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de tout appareil électronique de calcul et des téléphones portables est interdite. Les correcteurs tiendront compte de la qualité de la rédaction et de la précision des raisonnements.

Cet examen comporte **5** exercices indépendants qui peuvent être traités dans le désordre. Il est noté suivant le barème indicatif suivant :
Exercice 1 : 5 points ; exercice 2 : 6 points ; exercice 3 : 6 points ; exercice 4 : 5 points ; exercice 5 : 5 points. Le total est de 27 points et la note sera ramenée sur **25**.

Exercice 1.

1. Soit f une fonction continue et impaire sur $\mathbb{R}$. Que vaut $\displaystyle\int_{-2}^{2} f(t)dt$?
2. Vrai ou Faux : Toute application linéaire surjective entre deux espaces vectoriels de dimension finie est aussi injective ? On donnera une justification ou un contre-exemple.
3. Une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui admet 0, 1 et 2 comme valeurs propres est-elle diagonalisable ? Est-elle inversible ? On justifiera la réponse.

Exercice 2.

1. (a) Donner une primitive sur $]0, +\infty[$ de la fonction $x \mapsto x\ln(x)$. (*Indication :* on pourra faire une intégration par parties).
   (b) À l'aide d'un changement de variables, en déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 2(t^3+t)\ln(t^2+1)dt$.
2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(\frac{k\pi}{n})}{1+\cos^2(\frac{k\pi}{n})}$.
   (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et exprimer sa limite sous forme d'une intégrale.
   (b) En effectuant un changement de variables, montrer que cette suite tend vers :
   $$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}dx.$$
   (c) Donner la valeur de cette intégrale.

Exercice 3. On pose $a_0 = 6$ et $b_0 = 0$. On considère les suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$(\star) \qquad \begin{cases} a_{n+1} &= -a_n + 5b_n \\ b_{n+1} &= a_n + 3b_n \end{cases}$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Notamment, $X_0 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que la relation $(\star)$ s'écrive $X_{n+1} = AX_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer X_n en fonction de A^n et X_0.

On considère les deux vecteurs $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$.

3. Montrer qu'ils forment une base de $\mathbb{R}^2$.
4. Écrire X_0 comme combinaison linéaire de V_1 et V_2.

5. Montrer que $AV_1 = 4V_1$ et $AV_2 = -2V_2$. En déduire l'écriture des vecteurs A^nV_1 et A^nV_2 dans la base (V_1, V_2), pour tout entier $n \geq 1$.
6. Exprimer les coordonnées du vecteur A^nX_0 dans la base (V_1, V_2), pour tout entier $n \geq 1$.
7. Pour tout $n \geq 1$, donner une formule explicite exprimant X_n. Montrer que $\dfrac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$.

Exercice 4. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = \displaystyle\int_0^1 \cos(t^n\pi)\,dt$.

1. Calculer v_0 et v_1.
2. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
3. Montrer que pour tout réel $0 \leq x \leq 1$, on a $-\pi x \leq \cos(\pi x) - 1 \leq 0$.
4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $-\pi \displaystyle\int_0^1 t^n dt \leq v_n - 1 \leq 0$.
5. En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et donner sa limite.

Exercice 5. On considère l'équation différentielle $y'' - 6y' + 9y = 0$. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifient l'équation.

1. Déterminer une base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{S}$.

On considère maintenant l'application $T : \mathcal{S} \to \mathbb{R}^2$ définie par :

$$T(y) = \begin{pmatrix} y(1) \\ y'(1) \end{pmatrix}.$$

2. Montrer que T est linéaire.
3. Déterminer la matrice M de T dans la base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{S}$ et la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
4. Montrer que M est inversible et calculer son inverse.
5. Déterminer la solution de l'équation qui vérifie $y(1) = y'(1) = 0$.