

## 1M002, PARTIEL DU 2 MAI 2014 - Partie II (environ 12 pts)

L'usage d'un quelconque matériel électronique n'est pas autorisé

<b>SECTION</b>							
<b>Numéro d'anonymat</b>							

Il y a 6 exercices. Pour chacun, il est demandé de faire figurer les réponses aux emplacements correspondants. On ne demande pas de justifications, **seulement les résultats** du calcul.

Soit  $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 5 \\ 3 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ . Déterminer une base du noyau de  $A$ .

a) Décomposer en éléments simples dans  $\mathbb{R}(X)$  la fraction rationnelle  $F(X) = \frac{X^2}{X^4 - 1}$ .

b) Déterminer une primitive sur  $I = ]1, +\infty[$  de la fonction  $t \mapsto f(t) = \frac{t^2}{t^4 - 1}$ .

Calculer  $\int_0^\pi t \sin(t) dt$ .

- a) Exprimer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + 2\frac{k}{n}}$  sous la forme d'une intégrale.  
b) Donner la valeur de cette intégrale.

Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ .

- a) Calculer le polynôme caractéristique de A.  
b) Déterminer les valeurs propres de A et la dimension des espaces propres associés.

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite réelle définie par  $u_0 = 1 = u_1$  et la relation de récurrence :  $u_{n+2} = -u_{n+1} - u_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

- a) Écrire l'équation caractéristique associée et déterminer ses racines dans  $\mathbb{C}$ .  
b) Donner une formule explicite exprimant  $u_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .