# MIPI 23 - Devoir du 7 avril 2015

Durée 1h

---

Merci d'indiquer sur la copie la version de votre devoir :
**version A**

---

**Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de tout appareil électronique de calcul et des téléphones portables est interdite**. Les correcteurs tiendront compte de la qualité de la rédaction et de la précision des raisonnements. Ce devoir comporte **4** exercices et est noté sur **15**.

**Exercice 1.**

1. Énoncer le théorème du rang.
2. Montrer que $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } 3x+y+z=0 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer sa dimension.
4. Déterminer une base de ce sous-espace vectoriel.

**Exercice 2.** On considère la fonction $f$ définie sur pour tout $x \neq -1$ réel par

$$f(x) = \frac{x^2-3x+6}{x^3+x^2+9x+9}.$$

1. Déterminer les trois réels $a$, $b$, $c$ tels qu'on a l'égalité pour tout réel $x \neq -1$ :
$$\frac{x^2-3x+6}{x^3+x^2+9x+9} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2+9}.$$
(*Indication :* on pourra mettre au même dénominateur la somme de droite pour déterminer $a$, $b$ et $c$.)
2. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+9}$.
3. Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$.

**Exercice 3.** On considère l'équation différentielle $y'' + 2y' - 2y = 0$.

1. Déterminer une base de l'ensemble des solutions complexes.
2. Montrer que pour tout $t$ réel, on a $e^{(-1+i)t} - e^{(-1-i)t} = 2i\dfrac{\sin(t)}{e^t}$.
3. Donner la solution de cette équation qui vérifie $y(0) = 0$, $y(1) = 1$.
4. Montrer que cette solution est à valeurs réelles.

**Exercice 4.** Soit $\mathbb{R}_2[X]$ l'ensemble des polynômes réels de degré inférieur ou égal à 2. On considère l'application $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ définie par $f(P) = XP' + P$.

1. Montrer que $f$ est linéaire.
2. Déterminer son noyau. (*Indication :* on pourra écrire les conditions sur les 3 coefficients du polynôme $P$ pour qu'il soit dans le noyau.)
3. $f$ est-elle bijective ?

# MIPI 25 - Devoir du 9 avril 2015

Durée 1h

---

Merci d'indiquer sur la copie la version de votre devoir :
**version B**

---

**Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de tout appareil électronique de calcul et des téléphones portables est interdite**. Les correcteurs tiendront compte de la qualité de la rédaction et de la précision des raisonnements. Ce devoir comporte **4** exercices et est noté sur **15**.

**Exercice 5.**

1. Énoncer le théorème du rang.
2. Montrer que $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } \begin{array}{cc} 3x+y+z & =0 \\ \text{et} & \\ x-z & =0 \end{array} \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer sa dimension.
4. Déterminer une base de ce sous-espace vectoriel.

**Exercice 6.** On considère la fonction $f$ définie sur pour tout $x \neq -1$ réel par

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 3}{x^3 + x^2 + 4x + 4}.$$

1. Déterminer les trois réels $a$, $b$, $c$ tels qu'on a l'égalité pour tout réel $x \neq -1$ :
$$\frac{x^2 - x + 3}{x^3 + x^2 + 4x + 4} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2+4}.$$
(*Indication :* on pourra mettre au même dénominateur la somme de droite pour déterminer $a$, $b$ et $c$.)
2. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+4}$.
3. Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$.

**Exercice 7.** On considère l'équation différentielle $y'' - 2y' + 2y = 0$.

1. Déterminer une base de l'ensemble des solutions complexes.
2. Montrer que pour tout $t$ réel, on a $e^{(1+i)t} - e^{(1-i)t} = 2ie^t \sin(t)$.
3. Donner la solution de cette équation qui vérifie $y(0) = 0$, $y(1) = 1$.
4. Montrer que cette solution est à valeurs réelles.

**Exercice 8.** Soit $\mathbb{R}_2[X]$ l'ensemble des polynômes réels de degré inférieur ou égal à 2. On considère l'application $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ définie par $f(P) = XP' - P$.

1. Montrer que $f$ est linéaire.
2. Déterminer son noyau. (*Indication :* on pourra écrire les conditions sur les 3 coefficients du polynôme $P$ pour qu'il soit dans le noyau.)
3. $f$ est-elle bijective ?