# 1M002 ; Partiel du 1er mars. Corrigé

Durée 2h.

**Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de tout appareil électronique de calcul et des téléphones portables est interdite**. Les correcteurs tiendront compte de la qualité de la rédaction et de la précision des raisonnements.

Cet examen comporte **5** exercices indépendants qui peuvent être traités dans le désordre. Il est noté suivant le barème indicatif suivant :
Exercice 1 : 5 points ; exercice 2 : 3 points ; exercice 3 : 10 points ; exercice 4 : 6 points ; exercice 5 : 4 points. Le total est de 28 points et la note sera ramenée sur **25**.

**Exercice 1.**

1. Énoncer le théorème de Bolzano-Weierstrass.

Solution : L'énoncé de ce théorème est : de toute suite réelle ou complexe bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.

2. Vrai ou Faux : pour deux matrices $A$ et $B$ carrées de taille 2, on a $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$ ? On donnera une preuve ou un contre-exemple.

Solution : C'est faux : en prenant $A = I_2$ et $B = -I_2$, la matrice $A+B$ est la matrice nulle. Donc $\text{dét}(A+B) = 0$. Mais $\text{dét}(I_2) = 1$ et $\text{dét}(-I_2) = 1$. Donc $\text{dét}(A) + \text{dét}(B) = 2$. Ca montre bien que l'égalité proposée n'est pas vérifiée.

3. Vrai ou Faux : toute suite complexe dont les parties réelle et imaginaire sont bornées est convergente ? On donnera une preuve ou un contre-exemple.

Solution : C'est faux. On peut prendre par exemple la suite $(i^n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont les parties réelle et imaginaire sont bornées, mais qui n'est pas convergente.

**Exercice 2.** Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les matrices $AB$ et $BA$.

Solution : Le calcul direct donne $AB = \begin{pmatrix} 0 & 18 \\ 9 & -9 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 0 & 18 \\ 9 & -9 \end{pmatrix}$. On remarque que $AB = BA$ !

2. Soit $X = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Calculer la matrice colonne $U = ABX$.

Solution : On a déjà calculé $AB = \begin{pmatrix} 0 & 18 \\ 9 & -9 \end{pmatrix}$. En multipliant à droite par $X$, on trouve $U = ABX = \begin{pmatrix} -18 \\ -9 \end{pmatrix}$. On peut remarquer qu'on obtient $U = 9X$.

3. On pose $V = BX$. Calculer la matrice colonne $W = BAV - 9V$.

Solution : On peut réaliser le calcul direct de $V = \begin{pmatrix}-6\\-3\end{pmatrix}$ et $BAV = \begin{pmatrix}-54\\-27\end{pmatrix}$ pour obtenir que $W = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.
Une autre solution est d'utiliser les remarques qu'on a faites : $W = BAV - 9V = BABX - 9BX$. Or $ABX = 9X$ (question précédente). Donc $BABX = B(ABX) = B(-9X) = -9BX$. Ainsi, $W = 0$.

**Exercice 3.** Soit $f$ l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{1-\frac{x}{2}}$. (On rappelle que $2 < e < 3$.)

1. Étudier les variations de $f$ (on pourra calculer sa dérivée) et les limites en $-\infty$ et $+\infty$.

Solution : La fonction $f$ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée vaut $f'(x) = -\dfrac{1}{2}e^{1-\frac{x}{2}}$.
Cette dérivée est donc strictement négative pour tout réel $x$. La fonction $f$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
De plus, connaissant les limites de l'exponentielle en $\pm\infty$, on déduit :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$$

2. Montrer que $f(1) = \sqrt{e}$ et $f(\sqrt{e}) > 1$. En déduire que $f([1, \sqrt{e}]) \subset [1, \sqrt{e}]$.

Solution : On a $f(1) = e^{1-\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$. De plus, $f(\sqrt{e}) = e^{1-\frac{\sqrt{e}}{2}}$. Pour montrer que ce nombre est $> 1$, il suffit de montrer que $1 - \dfrac{\sqrt{e}}{2} > 0$, ou encore que $\sqrt{e} < 2$. Or on nous a rappelé que $e < 3$, donc $e < 4$ et $\sqrt{e} < 2$.
Comme $f$ est continue sur $[1, \sqrt{e}]$ et décroissante, on a $f([1, \sqrt{e}]) = [f(\sqrt{e}), f(1)]$. Les inégalités obtenues donnent $[f(\sqrt{e}), f(1)] \subset [1, \sqrt{e}]$. Finalement, on a bien $f([1, \sqrt{e}]) \subset [1, \sqrt{e}]$.

3. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans $[1, \sqrt{e}]$ que l'on notera $\ell$.

Solution : $f$ est une application continue, et l'intervalle $[1, \sqrt{e}]$ est stable par $f$, donc on sait que $f$ a un point fixe dans $[1, \sqrt{e}]$, c'est à dire une solution de $f(x) = x$. Il reste à montrer l'unicité. Pour ça on pourrait utiliser le fait que $f$ est décroissante. Une autre possibilité est de constater que $f$ est contractante sur cet intervalle : si $x \in [1, \sqrt{e}]$, on a

$$|f'(x)| = \left|-\frac{1}{2}e^{1-\frac{x}{2}}\right| = \frac{1}{2}f(x).$$

Or $f(x)$ appartient à $[1, \sqrt{e}]$, donc est inférieur à $\sqrt{e}$. Ainsi, sur $[1, \sqrt{e}]$, on a $|f'(x)| \leq \dfrac{\sqrt{e}}{2}$. On a déjà vu à la question précédente que ce dernier nombre est $< 1$.
Ainsi $f$ est contractante sur $[1, \sqrt{e}]$, et le cours nous garantit qu'elle possède un unique point fixe sur cet intervalle.

4. On définit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ par la donnée de $u_0 \in [1, \sqrt{e}]$ et $u_{n+1} = e^{1-\frac{u_n}{2}}$ pour tout entier naturel $n$.

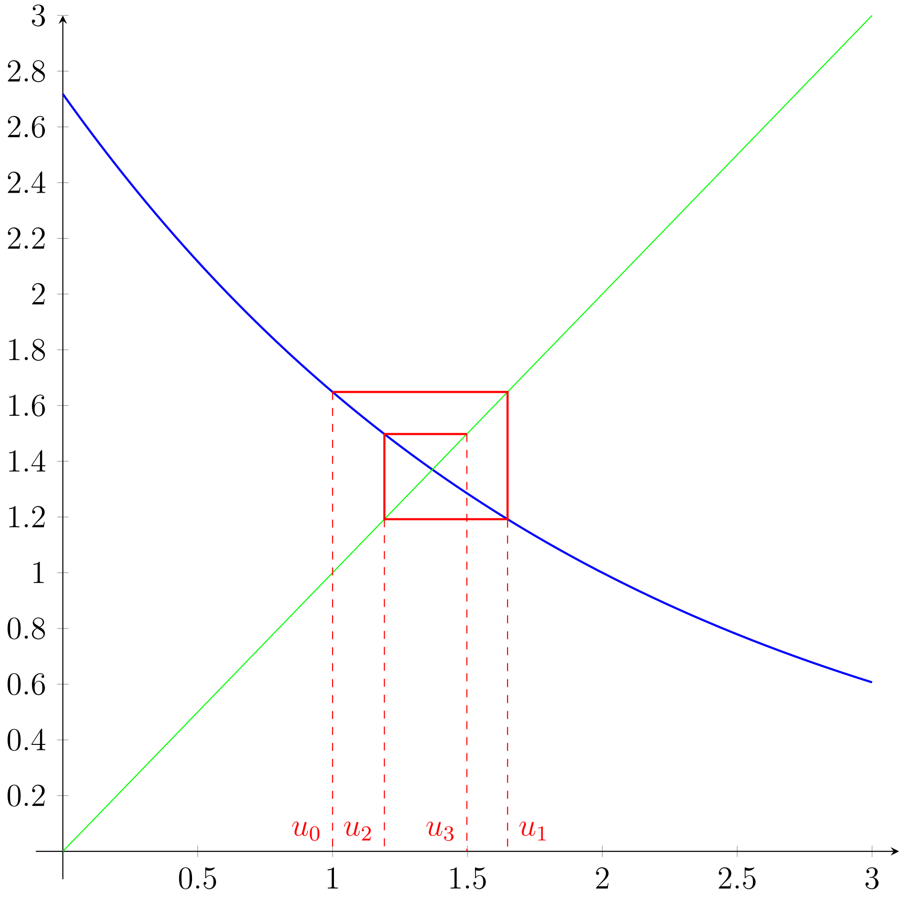



FIGURE 1 – Le graphe de $f$ (en bleu) et les 4 premiers termes de la suite

(a) Dans cette question uniquement on choisit $u_0 = 1$. Tracer approximativement le graphe de $f$ pour $x$ compris entre 0 et 3 et représenter les 4 premiers termes de cette suite sur ce graphe.

Solution :

(b) Montrer que la suite est bien définie et que $u_n$ appartient à $[1, \sqrt{e}]$ pour tout entier naturel $n$. Montrer de plus l'inégalité $|u_0 - \ell| < 1$.

Solution : On a vu que l'intervalle $[1, \sqrt{e}]$ est stable par $f$. Comme $u_0$ est dans cet intervalle, un résultat du cours nous garantit que la suite est bien définie et que tous les termes sont dans cet intervalle.
De plus, $u_0$ et $\ell$ sont deux points de cet intervalle, donc leur distance $|u_0 - \ell|$ est inférieure à la longueur de cet intervalle qui est $\sqrt{e} - 1$. Or, on a déjà vu que $\sqrt{e} < 2$, donc $\sqrt{e} - 1 < 1$. On obtient bien $|u_0 - \ell| < 1$.

(c) Montrer qu'il existe un réel $c < 1$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ |u_n - \ell| \leq c^n.$$

Solution : On a déjà vu plus haut que $f$ est $c = \frac{\sqrt{e}}{2}$ contractante. Par théorème du cours, on a pour tout $n \geq 0$, $|u_n - \ell| \leq c^n |u_0 - \ell|$. Or on a vu que $|u_0 - \ell| < 1$. Donc on obtient bien $|u_n - \ell| \leq c^n$.

(d) La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est-elle convergente ? Si oui donner sa limite.

Solution : D'après la question précédente, $|u_n - \ell|$ tend vers 0. On en déduit que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente, de limite $\ell$.

**Exercice 4.** Soient $b$ un nombre réel. On considère le système suivant en les variables $x, y, z, t$ :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -x + 2y + z + t &=& 2 \\ x - 2y + z + t &=& 4 \\ x - y - 2z + t &=& 2 \\ x - y + 3t &=& b \end{array}\right.$$

1. À quelle(s) condition(s) sur $b$ le système a-t-il des solutions ?

Solution : On réalise le pivot de Gauss sur la matrice augmentée :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 3 & b \end{array}\right)$$

On commence par ajouter la première ligne à chacune des trois autres lignes pour arriver à

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & b+2 \end{array}\right)$$

On peut alors multiplier la première ligne par $-1$ et échanger les lignes 2 et 3 :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & b+2 \end{array}\right)$$

On enlève la deuxième ligne à la quatrième pour obtenir

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & b-2 \end{array}\right)$$

Enfin, on enlève la troisième ligne à la quatrième, puis on divise la troisième par 2 :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-8 \end{array}\right)$$

La matrice obtenue est échelonnée. Le système de départ est alors équivalent à :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-2y-\ z-\ t &=& -2 \\ y-\ z+2t &=& 4 \\ z+\ t &=& 3 \\ 0 &=& b-8 \end{array}\right.$$

Le système a donc des solutions si et seulement si $b = 8$.

2. Dans ce(s) cas, donner l'ensemble des solutions du système et donner la solution du système qui vérifie $t = 1$.

Solution : Pour écrire les solutions, on peut continuer l'algorithme et rendre la matrice du sytème échelonnée réduite : on ajoute d'abord 2 fois la deuxième ligne à la première pour obtenir :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-8 \end{array}\right)$$

Ensuite, on ajoute 3 fois la troisième ligne à la première et on ajoute la troisième ligne à la deuxième :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 6 & 15 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-8 \end{array}\right)$$

Le système est donc équivalent à :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 15-6t \\ y &=& 7-3t \\ z &=& 3-t \end{array}\right.$$

Ainsi, sous la condition $b = 8$, l'ensemble des solutions du systèmes est :

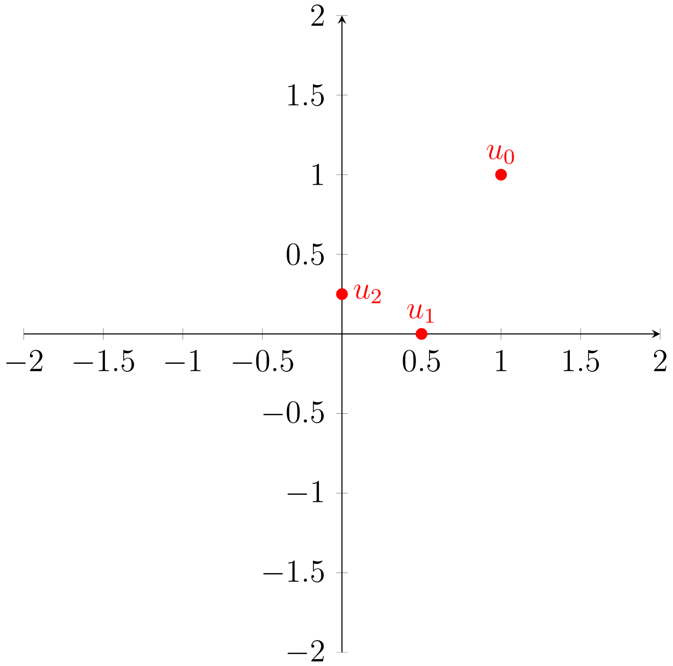
$$\left\{ \begin{pmatrix} 15-6t \\ 7-3t \\ 3-t \\ t \end{pmatrix} \text{ pour } t \in \mathbb{R} \right\}$$

et l'unique solution vérifiant $t = 1$ est $x = 9$, $y = 4$, $z = 2$, $t = 1$.

**Exercice 5.** On considère la suite complexe définie par $u_0 = 1 + i$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n - 1}{2i}$

1. Calculer et représenter dans le plan complexe les termes $u_0$, $u_1$, $u_2$.

Solution : On a $u_0 = 1 + i$, $u_1 = \dfrac{1+i-1}{2i} = \dfrac{1}{2}$ et $u_2 = \dfrac{u_1 - 1}{2i} = \dfrac{-\frac{1}{2}}{2i} = \dfrac{1}{4}i$.




2. Soit $a$ un nombre complexe et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_n = u_n + a$ pour tout entier $n$. Exprimer $v_{n+1}$ en fonction de $v_n$ et $a$. En déduire qu'il existe un unique $a$ tel que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{1}{2i}$ et donner la valeur de $a$.

Solution : On a $v_{n+1} = u_{n+1} + a$. En utilisant la formule pour $u_{n+1}$, puis que $u_n = v_n - a$, on a

$$v_{n+1} = \frac{u_n - 1}{2i} + a = \frac{1}{2i}(v_n - a - 1 + 2ia) = \frac{1}{2i}(v_n - 1 + (-1+2i)a).$$

La suite $v_n$ est géométrique si et seulement si $-1 + (-1+2i)a = 0$, soit $a = \frac{1}{-1+2i}$.

3. Pour la valeur de $a$ trouvée dans la question précédente, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ? Si oui, déterminer sa limite.

Solution : La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{1}{2i}$. Le module de la raison est $\frac{1}{2}$ donc est strictement inférieur à 1. Ainsi la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

4. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ? Si oui, déterminer sa limite.

Solution : On a par construction que pour tout entier $n$, $u_n = v_n - a = v_n - \frac{1}{-1+2i}$. Comme on vient de montrer que $v_n \to 0$, on obtient que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $-\frac{1}{-1+2i} = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$.