# 1M002 ; Partiel du 1er mars.

Durée 2h. Sur 25 points

**Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de tout appareil électronique de calcul et des téléphones portables est interdite**. Les correcteurs tiendront compte de la qualité de la rédaction et de la précision des raisonnements.

Cet examen comporte **5** exercices indépendants qui peuvent être traités dans le désordre. Il est noté suivant le barème indicatif suivant :
Exercice 1 : 5 points ; exercice 2 : 3 points ; exercice 3 : 10 points ; exercice 4 : 6 points ; exercice 5 : 4 points. Le total est de 28 points et la note sera ramenée sur **25**.

**Exercice 1.**

1. Énoncer le théorème de Bolzano-Weierstrass.
2. Vrai ou Faux : pour deux matrices $A$ et $B$ carrées de taille $2 \times 2$, on a $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$ ? On donnera une preuve ou un contre-exemple.
3. Vrai ou Faux : toute suite complexe dont les parties réelle et imaginaire sont bornées est convergente ? On donnera une preuve ou un contre-exemple.

**Exercice 2.** Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les matrices $AB$ et $BA$.
2. Soit $X = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Calculer la matrice colonne $U = ABX$.
3. On pose $V = BX$. Calculer la matrice colonne $W = BAV - 9V$.

**Exercice 3.** Soit $f$ l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{1-\frac{x}{2}}$. (On rappelle que $2 < e < 3$.)

1. Étudier les variations de $f$ (on pourra calculer sa dérivée) et les limites en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Montrer que $f(1) = \sqrt{e}$ et $f(\sqrt{e}) > 1$. En déduire que $f([1, \sqrt{e}]) \subset [1, \sqrt{e}]$.
3. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans $[1, \sqrt{e}]$ que l'on notera $\ell$.
4. On définit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ par la donnée de $u_0 \in [1, \sqrt{e}]$ et $u_{n+1} = e^{1-\frac{u_n}{2}}$ pour tout entier naturel $n$.
   (a) Dans cette question uniquement on choisit $u_0 = 1$. Tracer approximativement le graphe de $f$ pour $x$ compris entre 0 et 3 et représenter les 4 premiers termes de cette suite sur ce graphe.
   (b) Montrer que la suite est bien définie et que $u_n$ appartient à $[1, \sqrt{e}]$ pour tout entier naturel $n$. Montrer de plus l'inégalité $|u_0 - \ell| < 1$.
   (c) Montrer qu'il existe un réel $c < 1$ tel que
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \ |u_n - \ell| \leq c^n.$$
   (d) La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est-elle convergente ? Si oui donner sa limite.

**Exercice 4.** Soit $b$ un nombre réel. On considère le système suivant en les variables $x, y, z, t$ :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -x+2y+\ z+\ t & = & 2 \\ x-2y+\ z+\ t & = & 4 \\ x-\ y-2z+\ t & = & 2 \\ x-\ y\qquad +3t & = & b \end{array}\right.$$

1. À quelle(s) condition(s) sur $b$ le système a-t-il des solutions ?
2. Dans ce(s) cas, donner l'ensemble des solutions du système et donner la solution du système qui vérifie $t = 1$.

**Exercice 5.** On considère la suite complexe définie par $u_0 = 1 + i$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n - 1}{2i}$

1. Calculer et représenter dans le plan complexe les termes $u_0$, $u_1$, $u_2$.
2. Soit $a$ un nombre complexe et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_n = u_n + a$ pour tout entier $n$. Exprimer $v_{n+1}$ en fonction de $v_n$ et $a$. En déduire qu'il existe un unique $a$ tel que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{2i}$ et donner la valeur de $a$.
3. Pour la valeur de $a$ trouvée dans la question précédente, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ? Si oui, déterminer sa limite.
4. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ? Si oui, déterminer sa limite.