Feuille 8
Intégration (deuxième feuille)

Exercice 1 (Intégration des fractions rationnelles)**.**

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle suivante sous la forme :

$$\varphi(X) = \frac{1}{X(X+1)} = \frac{A}{X} + \frac{B}{X+1},$$

où A et B sont deux constantes à déterminer. En déduire une primitive de φ sur un intervalle ne contenant pas les valeurs 0 et -1.

2. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle suivante sous la forme :

$$\psi(X) = \frac{1}{X^2(X+1)^2} = \frac{A}{X} + \frac{B}{X^2} + \frac{C}{X+1} + \frac{D}{(X+1)^2},$$

où A, B, C et D sont à déterminer. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_1^x \psi(t)\,dt$, pour $x > 1$.

Exercice 2 (Intégrale de Wallis)**.** Soit la suite d'intégrales définie par : $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$.

1. A l'aide d'une intégration par parties, trouver une relation entre I_{n+2} et I_n.
2. Montrer alors que $I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\dfrac{\pi}{2}$ et $I_{2p+1} = \dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$.

Exercice 3 (Intégrales impropres)**.**

1. Calculer, pour tout $X \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^X te^{-t^2}dt$. Cette intégrale admet-elle une limite quand $X \to +\infty$?
2. Montrer que la fonction $\varphi : X \to \displaystyle\int_1^X e^{-t^2}dt$ est croissante et majorée sur $\mathbb{R}_+$.

3. En déduire qu'elle admet une limite quand $X \to +\infty$.

   Dans ces cas-là, on note la limite $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t^2}dt$ et on parle d'intégrale impropre convergente.

   D'un manière générale, on peut établir que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^X P(t)e^{-t^2}dt$ admet une limite quand $X \to \infty$.

Exercice 4 (Lemme de Gronwall)**.** On considère une fonction $f : [1;+\infty[\to \mathbb{R}$ positive et continue et on fixe deux réels $0 < a < b$.

On suppose que pour tout $x \geq 1$, on a : $f(x) \leq a\displaystyle\int_1^x \frac{f(t)}{t^2}dt + b$.

1. On introduit la fonction $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{f(t)}{t^2}dt$ pour $x \geq 1$. Montrer que $F'(x) \leq \dfrac{a}{x^2}F(x) + \dfrac{b}{x^2}$.
2. On pose $G(x) = F(x)e^{\frac{a}{x}}$. Déduire de la question précédente une majoration de G', puis de $G(x)$.
3. En déduire une majoration de F, puis finalement que :

$$f(x) \leq b\,e^{(a-\frac{a}{x})}.$$

Exercice 5 (Méthode du point milieu)**.**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $h = \dfrac{(b-a)}{n}$ et considère la subdivision de l'intervalle $[a,b]$:

$$x_0 = a < x_1 = a + h < x_2 = a + 2h < \cdots < x_n = a + nh = b.$$

On définit $x'_k = \dfrac{x_k + x_{k+1}}{2}$ pour tout $k = 0, 1, \cdots, n-1$ et on considère une fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

On pose alors : $J_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(x'_k)h$.

1. On suppose que la fonction f est de classe C^2 et vérifie :
$$\forall x \in [a,b], \quad |f''(x)| \leq M_2.$$
Soit k fixé dans $0, 1, \cdots, n-1$. Montrer que pour tout $x \in [x_k, x_{k+1}]$, il existe un point $c_k \in]x_k, x_{k+1}[$ tel que :
$$f(x) = f(x'_k) + (x - x'_k)f(x'_k) + \frac{(x - x'_k)^2}{2} f''(c_k).$$
2. Montrer que pour tout $k = 0, 1, \cdots, n-1$: $\displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} (t - x'_k)\, dt = 0$.
3. En déduire que pour tout $k = 0, 1, \cdots, n-1$:
$$\left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - f(x'_k))\, dt \right| \leq \frac{M_2}{2} \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} (t - x'_k)^2\, dt \right|.$$
4. Montrer que pour tout $k = 0, 1, \cdots, n-1$: $\displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} (t - x'_k)^2\, dt = \frac{h^3}{12}$.
5. En déduire que
$$\left| \int_a^b f(t)\, dt - J_n \right| \leq \frac{(b-a)^3 M_2}{24n^2}.$$

Exercice 6 ((*) Suite d'intégrales)**.**

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2, (a < b)$. On considère la suite I_n définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}^* : I_n = \left[\displaystyle\int_a^b e^{-nt^2}\, dt \right]^{\frac{1}{n}}$.

1. En utilisant la décroissance de la fonction $f_n(t)$ définie par $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [a, b,] : f_n(t) = e^{-nt^2}$, montrer que :
$$I_n \leq e^{-a^2}(b-a)^{\frac{1}{n}}.$$
2. Ecrire la continuité de la fonction $f_n(t)$ au point a par valeur supérieure et établir que :
$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, (a + \alpha \leq b), \forall t \in [a, a+\alpha] : e^{-t^2} \geq e^{-a^2}(1 - \varepsilon).$$
3. En déduire alors que la limite de la suite I_n est donnée par : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} I_n = e^{-a^2}$.

Exercice 7 ((*) Inégalité de Poincaré)**.** Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, de classe C^1 et telle que $f(a) = 0$.

1. En écrivant la relation entre une fonction f et sa dérivée f' à l'aide d'une intégrale, montrer, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que pour tout $x \in [a,b]$ on a :
$$|f(x)|^2 \leq (x-a) \int_a^b |f'(t)|^2\, dt.$$
2. En déduire l'inégalité de Poincaré :
$$\int_a^b |f(x)|^2\, dx \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b |f'(t)|^2\, dt.$$
