Feuille 4
Matrices (Première feuille)

Il y a plusieurs types d'exercices : les exercices dits « de calculs » – marqués par un (C) – que vous devez pouvoir traiter en autonomie et sans erreur : des questions de ce type seront posées à l'examen.

Exercice 1 ((C) Produits de matrices)**.** On considère : $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $Z = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$,

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \ D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Quels sont les produits matriciels possibles ? Les calculer.

Exercice 2 (Matrices de rotation)**.** Soit θ un nombre réel. On considère la matrice

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

1. On considère un vecteur non nul $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$. Montrer qu'il existe $r > 0$ et $\phi \in \mathbb{R}$ tel que $v = \begin{pmatrix} r\cos(\phi) \\ r\sin(\phi) \end{pmatrix}$.
2. Calculer $R_\theta \cdot v$.
3. Montrer que l'application $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donnée par $v \to R_\theta v$ est la rotation de centre 0 et d'angle θ.
4. On considère un autre nombre réel θ'. Calculer $R_\theta R_{\theta'}$. Quelle est l'application de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ correspondante ?

Exercice 3 (Identités remarquables ?)**.** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer AB et BA.
2. Calculer $(A+B)^2$.
3. Calculer $A^2 + 2AB + B^2$ et $A^2 + AB + BA + B^2$ et conclure.

Exercice 4 (Puissance n-ième)**.** On considère une matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ (a et b réels) et la matrice $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer par récurrence les puissances n-ièmes D^n et T^n.
2. Calculer la matrice $X = D + T - \mathrm{I}_2$.
3. Montrer que $X^n = \begin{pmatrix} a^n & (X^n)_{12} \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$, avec $(X^n)_{12} = \sum_{i=0}^{n-1} a^i b^{n-i-1}$.

Exercice 5 (Produit de matrices élémentaires)**.**

1. Calculer un produit de matrices élémentaires $E_{ij}E_{kl}$.
2. Pour une matrice carrée quelconque A, calculer AE_{kl} et $E_{ij}A$

Exercice 6. (C) Dans $M_{3,4}(\mathbb{R})$ soient $A = \begin{pmatrix} -5 & -4 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Écrire la matrice ${}^tA$ puis calculer $B\,{}^tA$.

Exercice 7 (La transposée)**.** Soient $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $A \in M_{p,n}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{n,r}(\mathbb{K})$.

1. Montrer que ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$. (Calculer le terme d'indice (i, j) de chaque matrice.)
2. Pour tout i, j, calculer $(A\,{}^tA)_{ij}$. En déduire que si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $A\,{}^tA = 0$ alors $A = 0$.

Exercice 8 (La trace)**.** Soient $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, A et B dans $M_n(\mathbb{K})$.

1. Calculer $\mathrm{tr}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$.
2. Montrer que pour tous s et t dans $\mathbb{K}$, on a $\mathrm{tr}(sA + tB) = s\mathrm{tr}(A) + t\mathrm{tr}(B)$.
3. Montrer que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.
4. Calculer $\mathrm{tr}(A\,{}^tA)$.
5. En déduire que si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors $\mathrm{tr}(A\,{}^tA) \geq 0$ et que ça vaut 0 si et seulement si $A = 0$.

Exercice 9 ((*) Une matrice remarquable)**.** Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, tel que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. On pose :

$$M = \begin{pmatrix} 1+a^2 & ab & ac \\ ab & 1+b^2 & bc \\ ac & bc & 1+c^2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = M - I_3.$$

1. Montrer que N peut s'écrire comme produit d'une matrice colonne et d'une matrice ligne.
2. Calculer N^n, où n désigne un entier naturel.
3. En déduire l'expression de M^n.

Exercice 10 (La suite de Fibonacci)**.** On considère la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ et pour tout $n \geq 0$, $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. On note $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Soit k un entier naturel.

1. Calculer par récurrence, en termes des éléments de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la valeur de $M^k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
2. Exprimer les coefficients de M^k en termes de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. (*) Comment doit-on adapter la matrice M pour voir apparaître une suite récurrente d'ordre 2 autre que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$?