Feuille 5
Matrices (Deuxième feuille)

Il y a plusieurs types d'exercices : les exercices dits « de calculs » – marqués par un (C) – que vous devez pouvoir traiter en autonomie et sans erreur : des questions de ce type seront posées à l'examen.

Exercice 1 ((C))**.** Soit $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. On considère le système linéaire : $(\mathcal{S}) \begin{cases} -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = b_1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = b_2 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = b_3 \end{cases}$

1. Écrire la matrice A du système $\mathcal{S}$, puis la matrice augmentée.
2. En faisant des opérations sur les lignes de la matrice augmentée, déterminer en fonction de b l'ensemble des solutions.
3. Quel est le rang de $\mathcal{S}$?

Exercice 2 ((C))**.** Soit $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. On considère le système linéaire : $(\mathcal{S}) \begin{cases} -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 = b_1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = b_2 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = b_3 \end{cases}$

1. Écrire la matrice B du système $\mathcal{S}$, puis la matrice augmentée.
2. En faisant des opérations sur les lignes de la matrice augmentée, déterminer en fonction de b l'ensemble des solutions.
3. Quel est le rang de $\mathcal{S}$?

Exercice 3 ((C))**.** Résoudre les systèmes suivants :

$$(\mathcal{S}_1) \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & - & z & + & t & = & 1 \\ x & + & 3y & + & z & - & t & = & 2 \\ -x & + & y & + & 7z & + & 2t & = & 3 \\ 2x & + & y & - & 8z & + & t & = & 4 \end{array} \right. \qquad (\mathcal{S}_2) \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & - & 3z & - & 4t & = & -1 \\ 2x & + & 2y & + & 2z & - & 3t & = & 2 \\ 3x & + & 6y & - & 2z & + & t & = & 8 \\ 2x & + & y & + & 5z & + & t & = & 5 \end{array} \right.$$

$$(\mathcal{S}_3) \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & + & z & + & t & = & 3 \\ 5x & + & 2y & - & z & - & 3t & = & 5 \\ -3x & - & 4y & + & 3z & + & 2t & = & 1 \\ 6x & + & y & & & - & 2t & = & 8 \end{array} \right.$$

Exercice 4. Trouver trois nombres réels α, β et γ tels que, pour tout polynôme P de degré 3,

$$\int_2^4 P(t)\,dt = \alpha P(2) + \beta P(3) + \gamma P(4).$$

Exercice 5. Résoudre en fonction du paramètre réel m les systèmes linéaires suivants :

$$(\mathcal{S}_1) \begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ x + 3y - 4z = 2 \\ 2x + 3y - 5z = m \end{cases} \qquad (\mathcal{S}_2) \begin{cases} 2x + y - 3z = 1 \\ x + 3y - 2z = 2 \\ 7x - 4y - m^2 z = m - 4 \end{cases} \qquad (\mathcal{S}_3) \begin{cases} x + my + 2z = m \\ -2x + y + (m-2)z = 1 \\ mx + y + 2z = 2m - 1 \end{cases}$$

Exercice 6 (Inversion d'une matrice carrée)**.** Soit $b = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$. On considère les systèmes linéaires suivants :

$$(\mathcal{S}_1) \begin{cases} -8x_1 - 8x_2 = b_1 \\ 7x_1 + 9x_2 + 9x_3 = b_2 \\ -8x_1 - x_2 - x_3 = b_3 \end{cases} \qquad (\mathcal{S}_2) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = b_1 \\ -4x_1 + 2x_2 + x_3 = b_2 \\ -2x_1 + x_2 + 4x_3 = b_3 \end{cases}$$

Les résoudre pour $b = (1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$. Que peut-on en déduire sur les matrices des deux systèmes ?

Exercice 7 (Inversion d'une matrice carrée)**.** En résolvant un système linéaire, inverser la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8. Soit k un nombre réel et soient

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ k^2 - 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ k^2 - 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

quatre vecteurs dans $\mathbb{R}^4$. Déterminer pour quelles valeurs de k le vecteur w s'écrit sous la forme $av_1 + bv_2 + cv_3$ pour des nombres réels a, b et c.