Feuille 12
Réduction

Exercice 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 6 & -1 \\ 6 & 0 & 6 \\ -1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Trouver les valeurs propres de A et montrer que A est diagonalisable.

2) Trouver une base de vecteurs propres de A.

3) Montrer que les sous-espaces propres de A sont orthogonaux.

Exercice 2. Soit S une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même telle que $S^2 = I$.

1) Montrer que S est diagonalisable.

2) Supposons que S ne soit ni l'identité ni l'opposée de l'identité et soit $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ une base de vecteurs propres de S. Montrer que S est une isométrie (c'est-à dire $||S(\vec{w})|| = ||\vec{w}||$) si et seulement si $(\vec{u} \mid \vec{v}) = 0$.

Exercice 3. *1)* Trouver les valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et en déduire que A est diagonalisable.

2) Trouver une base de vecteurs propres de A.

3) Calculer P^{-1} et déterminer le produit $P^{-1}AP$.

Exercice 4. *1)* Montrer sans calcul que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \pi & 1 & 1 \\ 0 & \pi & 1 \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix}$$

n'est pas diagonalisable.

2) Montrer sans calcul que la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable.

3) Soit a, $b \in \mathbb{R}$ avec $a \neq b$. Est-ce que les matrices

$$C = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

sont diagonalisables ?

Exercice 5. *1)* Montrer que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable.

2) Trouver une matrice de passage P de la base canonique à une base de vecteurs propres. de A

3) Calculer P^{-1}.

Exercice 6. Montrer que la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

n'est pas diagonalisable.

Exercice 7. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

1) Diagonaliser A.

2) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 8. Soit a, b deux nombres réels. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par les deux valeurs $u_0 = a$ et $u_1 = b$ et la relation de récurrence

$$u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$.

1) Montrer que la suite de vecteurs $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une relation de récurrence telle que $U_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $U_{n+1} = AU_n$ où A est une matrice 2×2 que l'on déterminera.

2) Montrer que la matrice A est diagonalisable et donner une matrice de passage P telle que $A = PDP^{-1}$ où D est une matrice diagonale.

3) En déduire une expression explicite de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
