Matrices d'une application linéaire, changement de bases, réduction

Exercice 1. Déterminer les matrices des applications linéaires suivantes dans les bases indiquées (on vérifiera le cas échéant que ce sont bien des bases) :

1. L'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ donnée par $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x-3y \\ -y \\ x-2y \end{pmatrix}$, d'abord dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, puis en remplaçant la base de $\mathbb{R}^2$ par $e'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $e'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
2. L'application de dérivation $D : \mathbb{R}_4[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ dans les bases canoniques $(1, X, X^2, X^4)$ et $(1, X, X^2, X^3)$.
3. Dans l'espace vectoriel E des solutions de la récurrence $u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = 0$, l'application T de décalage de 2 : $T(u)$ est la suite $(u_{n+2})_{n\in\mathbb{N}}$ (dans une base de E à choisir !).

Exercice 2. Pour chacune des questions de l'exercice précédent, et le vecteur proposé ci-dessous : écrire son vecteur des coordonnées dans la base de l'espace de départ, et calculer les coordonnées de son image dans la base de l'espace d'arrivée :

1. $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.
2. $P = X^3 + 2X^2 + 3X + 4$.
3. $u_n = n$.

Exercice 3. Dans chacun des cas ci-dessous, écrire la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et calculer son inverse :

1. Dans $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B}$ est la base canonique et $\mathcal{B}'$ est composée de $e'_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $e'_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
2. Dans $\mathbb{R}_4[X]$, $\mathcal{B}$ est la base canonique et $\mathcal{B}'$ est composée des vecteurs $e'_1 = 1$, $e'_2 = 1+X$, $e'_3 = 1+X+X^2$, $e'_4 = 1+X+X^2+X^3$ et $e'_5 = 1+X+X^2+X^3+X^4$.
3. Dans l'espace vectoriel E du premier exercice, $\mathcal{B}$ est la base $(1)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\mathcal{B}'$ est la base $(n+1)_{n\in\mathbb{N}}$, $(n-1)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 4. Pour chacune des matrices suivantes, il faut :

1. Déterminer ses valeurs propres,
2. Montrer qu'elle est diagonalisable,
3. La diagonaliser, c'est-à-dire trouver une base de diagonalisation et calculer la matrice de passage et son inverse.
4. Calculer la puissance n-ème de la matrice.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 6 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. Soit $n \geq 2$ un entier ; on considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer ses valeurs propres et ses espaces propres (on pourra considérer $A + I_n$).
2. Déterminer si elle est diagonalisable.

Exercice 6 (Matrice compagnon pour $n = 2$)**.** Soit $P = T^2 - aT - b \in \mathbb{K}[T]$ et soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K})$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique $P_A(T) = \text{dét}(A - TI_2)$. (La matrice A est appelée la *matrice compagnon* de P.)
2. Soit α une racine de P dans $\mathbb{K}$. Déterminer l'espace propre $V_\alpha = \{X \in \mathbb{K}^2 \mid AX = \alpha X\}$ et donner un vecteur $v_\alpha \in V_\alpha$ de la forme $v_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}$.
3. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si P a dans $\mathbb{K}$ deux racines distinctes α et β. Donner dans ce cas une base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{K}^2$ formée de vecteurs propres comme à la question précédente.
4. Écrire la matrice de passage $Q = \text{Mat}_\mathcal{B}(\mathcal{C})$, où $\mathcal{B}$ désigne la base canonique de $\mathbb{K}^2$, puis calculer Q^{-1} et $D = Q^{-1}AQ$.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer A^n en fonction de Q et D^n, puis calculer explicitement A^n.

Exercice 7. Soit u_n et v_n deux suites définies par : $u_0 = v_0 = 1$; pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = v_n$ et $v_{n+1} = 2u_n + v_n$. Pour tout entier n, on note X_n le vecteur

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}.$$

On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

1. Exprimez la relation de récurrence sous la forme $X_{n+1} = AX_n$ où A est une matrice à déterminer.
2. Calculez le polynôme caractéristique $P_A(X)$.
3. Expliquez, sans calcul, pourquoi A est diagonalisable.
4. Déterminez une base $\mathcal{C} = (v_1, v_2)$ de vecteurs propres, telle que la 1ère coordonnée de v_1 et de v_2 soit égale à 1.
5. Écrivez la matrice de passage $P = \text{Mat}_\mathcal{B}(\mathcal{C})$ et calculez P^{-1} ainsi que $D = P^{-1}AP$.
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer A^n en fonction de P et D^n, puis calculer explicitement A^n.
7. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer U_n en fonction de A et U_0 puis calculer explicitement U_n.

Exercice 8 (Matrices stochastiques pour $n = 2$)**.** Soient $b, c \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $b + c = 1$ et soit $A = \begin{pmatrix} 1-b & b \\ c & 1-c \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. (Une matrice $B \in M_n(\mathbb{R})$ est dite stochastique si elle est à coefficients ≥ 0 et si la somme des coefficients de chaque ligne vaut 1. La matrice A est donc la transposée d'une matrice stochastique.)

1. Montrer que 1 est valeur propre de A et déterminer un vecteur propre associé $v_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tel que $x + y = 1$.
2. Montrer que $\alpha = 1 - b - c$ est valeur propre de A et déterminer un vecteur propre associé $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ z \end{pmatrix}$.
3. On pose $\mathcal{C} = (v_1, v_2)$. Écrire la matrice de passage $P = \text{Mat}_\mathcal{B}(\mathcal{C})$, où $\mathcal{B}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^2$, puis calculer P^{-1} ainsi que $D = P^{-1}AP$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer A^n en fonction de P et de D^n, puis calculer explicitement A^n en fonction de b, c et α^n.
5. Pour tout $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ tel que $x + y = 1$, calculer $\lim_{n \to +\infty} A^n u$.