Sorbonne Université - 1M002 - Examen de la session 2 – 24/6/2019 – 14h-17h

---

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de tout appareil électronique de calcul et des téléphones portables est interdite. Les correcteurs tiendront compte de la qualité de la rédaction et de la précision des raisonnements. Cet examen comporte 5 exercices indépendants. Il est noté suivant le barème indicatif suivant. Exercice 1 : 10 points ; exercice 2 : 11 points ; exercice 3 : 10 points ; exercice 4 : 12 points ; exercice 5 : 15 points . Le total est de 58 points et la note sera ramenée sur 50.

Exercice 1.

1. Il est vrai qu'une application linéaire f de l'espace vectoriel de dimension finie E dans le même espace E satisfait $\text{rang}(f) = \dim(E)$ si et seulement si elle est surjective. La condition revient à dire que l'image de f a la même dimension que E et donc $\text{im}(E) = E$.
2. Il est également vrai qu'une application linéaire f comme ci-dessus est injective si et seulement si elle est surjective. Ceci découle du théorème du rang : la condition $\text{rang}(f) = \dim(E)$ équivaut à la condition $\ker(f) = \{0\}$.
3. **1 pt** La proposition est fausse. On peut considérer la suite définie par $c_n = 1/(n+1)$ avec $n \geq 0$. Elle est réelle et strictement supérieure à 0. Or, $b_n = n+1$ et on ne peut pas extraire une suite convergente de cette suite qui diverge.
4. Il est vrai que si $c_n > 1$ alors $0 < b_n < 1$. Comme $b\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ est une suite bornée, grace au théorème de Bolzano–Weierstraß, on peut extraire une suite convergente de la suite (b_n).
5. Vrai. On a $\sin(x) \leq x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$. La fonction sin transforme $[0,1]$ dans $[0,1]$. La suite est donc décroissante et bornée. Elle admet une limite qui est aussi le seul point où $\sin(x)$ est égal à x. La suite $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ définie par $a_0 = 1$ et $a_{n+1} = \sin(a_n)$ tend vers 0. Elle converge.
6. Il est faux que toute matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = \mathbb{I}_2$ est égale à $\mathbb{I}_2$ où $-\mathbb{I}_2$. On peut prendre la matrice diagonale de diagonale $(1,-1)$. Son carré vaut $\mathbb{I}_2$.
7. C'est vrai. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\int_0^1 x^n \ln(x+1)dx \leq \int_0^1 \ln(x+1)dx \leq \int_0^1 1dx = 1$. Ceci découle de $\ln(2) \leq 1$ et du fait que ln est croissante entre 0 et 1.

Exercice 2. Pour $a, b, c \in \mathbb{R}$, on considère le système linéaire suivant

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = a \\ 2x + 4y + 6z = b \\ -x - 2y - 3z = c \end{cases}$$

1. La matrice A associée au système linéaire est la matrice 3×3 ayant colonnes $(1,2,-1)$, $(2,4,-2)$ et $(3,6,-3)$. La matrice augmentée est cette même matrice avec comme dernière colonne (a,b,c).
2. La reduction de la matrice $(L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1)$ et $(L_3 \leftarrow L_3 + L_1)$ a comme premiere ligne $(1,2,3,a)$, et comme dernières lignes $(0,0,0,b-2a)$, $(0,0,0,c+a)$. Cette matrice est échelonnée et réduite. Le système admet une solution ssi $b = 2a$ et $c = -a$.
3. Le rang de A est 1 (la matrice réduite associée à A n'a qu'une ligne non nulle). Le noyau est donné par les vecteurs (x,y,z) qui satisfont $x + 2y + 3z = 0$. Il a dimension 2 $(= 3 - \text{rang}(A))$. La matrice n'est pas inversible car son noyau n'est pas nul.
4. Si (a,b,c) est la somme des termes des trois colonnes de la matrice A, alors le système admet comme solution $(1,1,1)$. Toutes les autres solutions appartiennent à $(1,1,1) + \ker(A)$. On a donc $(1-2y-3z, 1+y, 1+z)$ pour $y, z \in \mathbb{R}$.

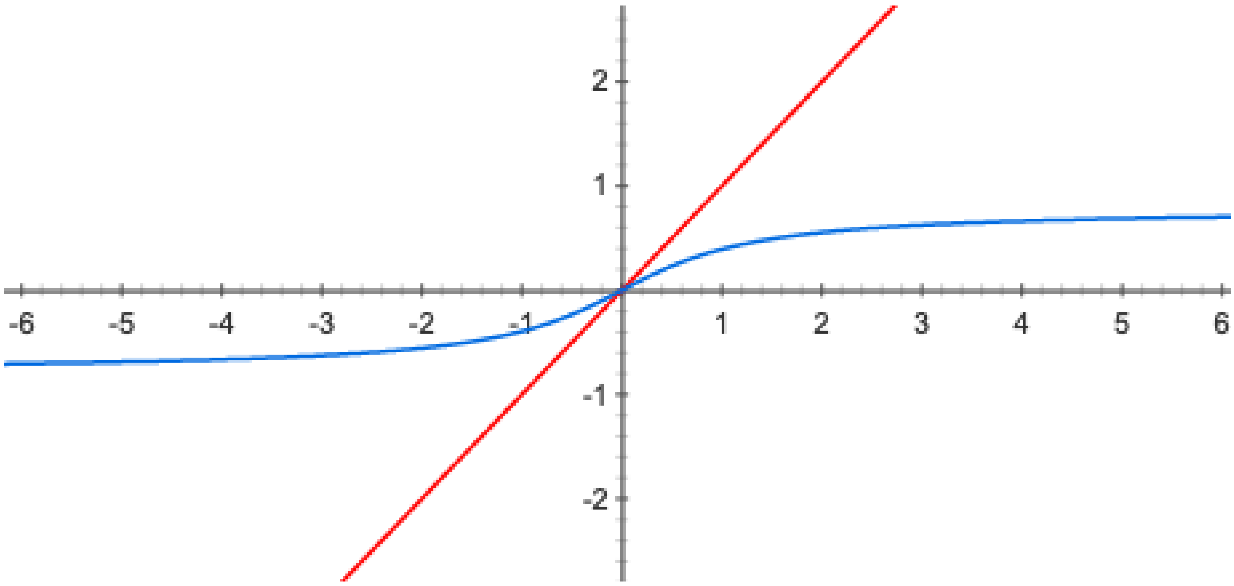
Exercice 3. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^1 x^2 e^x dx = [(x^2 - 2x + 2)e^x]_0^1 = e - 2$ (on peut proceder avec un intégral par partie, par exemple).
2. $\int_e^{e^e} \frac{1}{x\ln(x)} dx = [\ln(\ln(x))]_e^{e^e} = \ln(\ln(e^2)) - \ln(\ln(e)) = \ln(e) - \ln(1) = 1 - 0 = 1.$
3. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)e^x dx = [\frac{1}{2}(\sin(x) - \cos(x))]_{-\pi}^{\pi}$ en intégrant deux fois par parties. On obtient au final $e^\pi/2 - e^{-\pi}/2$.
4. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)e^{-x^2} dx = 0$ car la fonction est impaire (e^{x^2} est paire et sin est impair).

Exercice 4. la question 3 est correcte mais une question alternative a été proposée en salle d'examen, les deux réponses conviennent, ajouter un bonus de 2 points à tout étudiant ayant fait preuve d'avoir réfléchi à l'exercice.

Soit (u_n) la suite définie par recurrence par $u_{n+1} = \frac{1}{2}\arctan(u_n)$ où arctan est la fonction réciproque de la fonction $\tan\colon]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}$. La valeur initiale u_0 est un nombre réel $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. On trace le graphe de la fonction $f(x) = \frac{1}{2}\arctan(x)$ et, dans le même repère, celui de la fonction $g(x) = x$.



2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $|f'(x)| = \frac{1}{2}|1/(1 + x^2)| \leq \frac{1}{2}$.
3. On observe que f envoie l'intervalle $[-\lambda, \lambda]$ dans $[-\lambda/2, \lambda/2]$; l'intervalle $[-\lambda, \lambda]$ est donc stable. La question précédente montre que la suite est 1/2-contractante. On conclut que la suite converge et que 0, seul point fixe de f, est sa limite. Comme elle est 1/2-contractante on a

$$|u_n - \ell| = |u_n - 0| \leq \frac{1}{2^n}|u_0 - 0| = \frac{1}{2^n}u_0.$$

   De même en considérant la suite extraite u_{n+1}

$$|u_{n+1}| \leq \frac{1}{2^n}|u_1| = \frac{1}{2^n}|\frac{1}{2}\arctan(\lambda)| < \frac{1}{2^n}$$

   car la fonction $\frac{1}{2}|\arctan| < \pi/4 < 1$.
4. Pour tout valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ la suite tend vers 0 car la limite de $\frac{1}{2^n}$ vaut 0 pour $n \to \infty$.

Exercice 5. Soit n un entier strictement positif. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes réels dans la variable X, de degré inférieur ou égal à n. Soit D l'application $\mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ définie par

$$P(X) \mapsto XP'(X).$$

1. En effet D est une application linéaire car, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et pour tout polynôme P et Q on a
$$D(P(X) + \lambda Q(X)) = X(P(X) + \lambda Q(X))' = XP'(X) + X\lambda Q(X)' = D(P(X)) + \lambda D(Q(X))$$
2. On a $D^2(P(X)) = D(XP'(X)) = X^2P''(X) + XP'(X)$.
De même $D^3(P(X)) = D(X^2P''(X) + XP'(X)) = X^3P'''(X) + 3X^2P''(X) + XP'(X)$.
3. Tout polynôme s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de $1, X, \ldots, X^n$: $P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ pour $a_i \in \mathbb{R}$. Les coefficients de la i-ème colonne de A sont les coefficients de $D(X^i) = iX^i$ par rapport à la base $1, X, \ldots, X^n$. Il s'agit des coefficients i pour $k = i$ et 0 autrement. En particulier, la matrice A est de type $(n+1) \times (n+1)$ et diagonale. Ses valeurs sur la diagonale sont $(0, 1, 2, 3, 4, \ldots, n)$, valeurs propres da l'application D.
4. Déterminer le noyau et le rang de A. La matrice $(n+1) \times (n+1)$est diagonale et le seul valeur nul de la diagonale est $a_{1,1}$. Elle a donc rang n. Par conséquent le noyaux a dimension 1. Il s'agit de l'espace propre de valeur propre 0 engendré par le premier vecteur de la base $X^0 = 1$. Les matrice A n'est pas inversible car l'application qui lui est associée n'est pas injective ($\ker \neq \{0\}$)
5. La matrice qui représente les applications composées D^2 et D^3 sont les puissances A^2 et A^3. Remarquons que A est diagonale ; il s'agit de matrices $(n+1) \times (n+1)$ et diagonales. Leurs valeurs sur la diagonale sont $(0, 1, 4, 9, \ldots, n^2)$ et $(0, 1, 8, 27, \ldots, n^3)$.
6. Pour $N > 1$, la matrice qui représente l'application composée D^N est donnée par l'N-ème puissance A^N de A. La matrice A^N est de type $(n+1) \times (n+1)$ et diagonale. Ses valeurs sur la diagonale sont $(0, 1^N, 2^N, 3^N, 4^N, \ldots, n^N)$. En particulier $D^N(X^i) = i^N X^i$.
7. Grace à la question précédente, l'image via D^N du polynôme $\sum_{i=1}^{k} i^{-N} X^i$ vaut $\sum_{i=1}^{k} i^{-N} D(X^i) = \sum_{i=1}^{k} X^i = X + X^2 + \cdots + X^k$.