Sorbonne Université - 1M002 - Examen de la session 2 – 24/6/2019 – 14h-17h

---

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de tout appareil électronique de calcul et des téléphones portables est interdite. Les correcteurs tiendront compte de la qualité de la rédaction et de la précision des raisonnements. Cet examen comporte 5 exercices indépendants qui peuvent être traités dans un ordre choisi librement. Il est noté suivant le barème indicatif suivant. Exercice 1 : 10 points ; exercice 2 : 11 points ; exercice 3 : 10 points ; exercice 4 : 12 points ; exercice 5 : 15 points . Le total est de 58 points et la note sera ramenée sur 50.

Exercice 1.

Vrai ou faux ? Justifier votre réponse.

1. Soit f une application linéaire de l'espace vectoriel de dimension finie E dans le même espace E. Alors $\text{rang}(f) = \dim(E)$ si et seulement si f est surjective.
2. Soit f une application linéaire de l'espace vectoriel de dimension finie E dans le même espace E. Alors $\text{rang}(f) = \dim(E)$ si et seulement si f est injective.
3. Soit (c_n) une suite réelle strictement positive. Soit $b\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ une suite définie par $b_n = 1/c_n$. Alors, on peut extraire de la suite (b_n) une suite qui tend vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$.
4. Soit (c_n) une suite réelle strictement supérieure à 1. Soit $b\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ une suite définie par $b_n = 1/c_n$. Alors, on peut extraire de la suite (b_n) une suite qui tend vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$.
5. La suite $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ définie par $a_0 = 1$ et $a_{n+1} = \sin(a_n)$ converge.
6. Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$ une matrice carrée à deux colonnes et deux lignes. Si A^2 est la matrice identité $\mathbb{I}_2$, alors A est égale à $\mathbb{I}_2$ où $-\mathbb{I}_2$.
7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\int_0^1 x^n \ln(x+1)dx \leq 1$.

Exercice 2. Pour $a, b, c \in \mathbb{R}$, on considère le système linéaire suivant

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = a \\ 2x + 4y + 6z = b \\ -x - 2y - 3z = c \end{cases}$$

1. Écrire la matrice A associée au système linéaire ainsi que la matrice augmentée.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b et c pour que le système ait une solution.
3. Determiner le rang de A, son noyau, et la dimension du noyau. La matrice est elle inversible ?
4. Soit (a, b, c) le vecteur ayant comme coordonnées la somme des trois colonnes de la matrice A. En faisant aussi peu de calculs que possible, écrire toutes les solutions du système pour ces valeurs de a, b et c.

Exercice 3. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^1 x^2 e^x dx$,
2. $\int_a^b \frac{1}{x\ln(x)} dx$, où $a = e$ et $b = e^e$,
3. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x) e^x dx$,
4. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x) e^{-x^2} dx$.

Exercice 4. Soit (u_n) la suite définie par recurrence par $u_{n+1} = \frac{1}{2}\arctan(u_n)$ où arctan est la fonction réciproque de la fonction $\tan \colon]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$. La valeur initiale u_0 est un nombre réel $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Tracer le graphe de la fonction $f(x) = \frac{1}{2}\arctan(x)$ et, dans le même repère, celui de la fonction $g(x) = x$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.
3. Considérer les suites dont la valeur initiale u_0 est égale à $\lambda \in \mathbb{R}$. Démontrer l'inégalité
$$|u_{n+1}| \leq \frac{1}{2^n}$$
pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n) en fonction de la valeur initiale $u_0 = \lambda$.

Exercice 5. Soit n un entier strictement positif. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes réels dans la variable X, de degré inférieur ou égal à n. Soit D l'application $\mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ définie par
$$P(X) \mapsto XP'(X).$$

1. Montrer que D est une application linéaire.
2. Écrire une formule qui exprime les application linéaires D^2 et D^3 en fonction de $P(X) \in \mathbb{R}_n[X]$.
3. Apres avoir montré que les polynômes $1, X, \ldots, X^n$ forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$, on définit
$$A \in M_{n+1}(\mathbb{R})$$
comme la matrice qui représente l'application D. Fournir une expression générale de A pour tout n.
4. Déterminer le noyau et le rang de A. La matrice A est-elle inversible ?
5. Écrire la matrice qui représente l'application composée D^2 et D^3.
6. Pour $N > 1$, écrire la matrice qui représente l'application composée D^N.
7. Pour $N > 1$, calculer l'image via D^N du polynôme $\sum_{i=1}^{k} i^{-N} X^i$.