Sorbonne Université - 1M002 - Examen de la session 1 – 14/5/2019 – 14h-17h

---

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de tout appareil électronique de calcul et des téléphones portables est interdite. Les correcteurs tiendront compte de la qualité de la rédaction et de la précision des raisonnements. Cet examen comporte 5 exercices indépendants. Le barème est sur 58 points avec 8 points de bonus.

Exercice 1. total : **10 pt**.

Vrai ou faux ? Justifier votre réponse.

1. **1 pt**. Vrai. $\ker = \{0\} \Leftrightarrow f$ injective.
2. **1 pt**. Vrai, tout endomorphisme d'un espace de dimension finie E est injectif ($\ker = 0$) si et seulement s'il est surjectif (grâce au théorème du rang).
3. **1 pt**. Vrai, pour tout suite réelle (c_n) la suite $b_n = \sin(c_n)$ est bornée (car sin l'est). On peut extraire une suite convergente de la suite (b_n) grâce a Bolzano–Weirstraß.
4. **1 pt**. Vrai. La suite $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ définie par $a_0 = 1$ et $a_{n+1} = \ln(a_n + 1)$ converge car elle est monotone et bornée. Elle est bornée car l'intervalle $[0, 1] \ni a_0$ est stable par rapport à la fonction $x \mapsto \ln(x + 1)$; elle est monotone car $\ln(x + 1) \leq x$ sur $[0, 1]$ et donc $a_{n+1} \leq a_n$.
5. **1 pt**. Faux. la matrice ayant comme seul valeur non nulle $a_{1,2} = 1$ satisfait $A^2 = 0$ et $A \neq 0$.
6. **2 pt**. Vrai. $e \geq x^n e^x$ pour tout $x \in [0, 1]$. Noter que $\int_0^1 e = e$.
7. **3 pt**. Vrai, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $x^n \leq x$ sur $[0, 1]$; ainsi $x^n e^x \leq xe^x$. On calcule $\int_0^1 xe^x dx = -\int_0^1 e^x dx + [xe^x]_0^1 = -e + 1 + e - 0 = 1$.

Exercice 2. total : **11 pt**. Pour $a, b, c \in \mathbb{R}$, on considère le système linéaire suivant

$$\begin{cases} 9x - 2y + 7z = a \\ -2y + 4z = b \\ -3x + 2y - 5z = c \end{cases}$$

1. **1 pt**. La matrice A associée au système linéaire et sa matrice augmentée sont les matrices suivantes
$$\begin{pmatrix} 9 & -2 & 7 \\ 0 & -2 & 4 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 9 & -2 & 7 & a \\ 0 & -2 & 4 & b \\ -3 & 2 & -5 & c \end{pmatrix}$$
2. **3 pt**. On peut procéder par des opération élémentaires sur les lignes.
$L_1 \leftrightarrow L_3$ donne
$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & -5 & c \\ 0 & -2 & 4 & b \\ 9 & -2 & 7 & a \end{pmatrix}.$$
$L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1$ donne
$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & -5 & c \\ 0 & -2 & 4 & b \\ 0 & 4 & -8 & a + 3c \end{pmatrix}.$$
$L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$ donne
$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & -5 & c \\ 0 & -2 & 4 & b \\ 0 & 0 & 0 & a + 2b + 3c \end{pmatrix}.$$

$L_1 \leftarrow L_1 + L_2$ donne
$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 & c+b \\ 0 & -2 & 4 & b \\ 0 & 0 & 0 & a+2b+3c \end{pmatrix}.$$
La matrice échelonnée réduite est
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{c+b}{3} \\ 0 & 1 & -2 & -\frac{b}{2} \\ 0 & 0 & 0 & a+2b+3c \end{pmatrix}.$$
Le système admet une solution si et seulement si le terme $a+2b+3c$ est nul.

3. **3 pt**. Il y a *une* variable libre z et *deux* variables pivot x et y. La dimension du noyau et celle du rang sont donc 1 et 2. Comme A est une matrice carrée qui n'a pas rang maximal (3) elle n'est pas inversible. En réécrivant le système ci-dessus pour $a = b = c = 0$ dans sa forme réduite on trouve que
$$\begin{cases} x + \frac{1}{3}z = 0 \\ y - 2z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}.$$
Le noyau est formé par les vecteurs de coordonnées (x, y, z) qui satisfont
$$\begin{cases} x = -\frac{1}{3}z \\ y = 2z \end{cases};$$
il s'agit des multiples $(-\frac{1}{3}z, 2z, 1z)$ de $(-\frac{1}{3}, 2, 1)$.

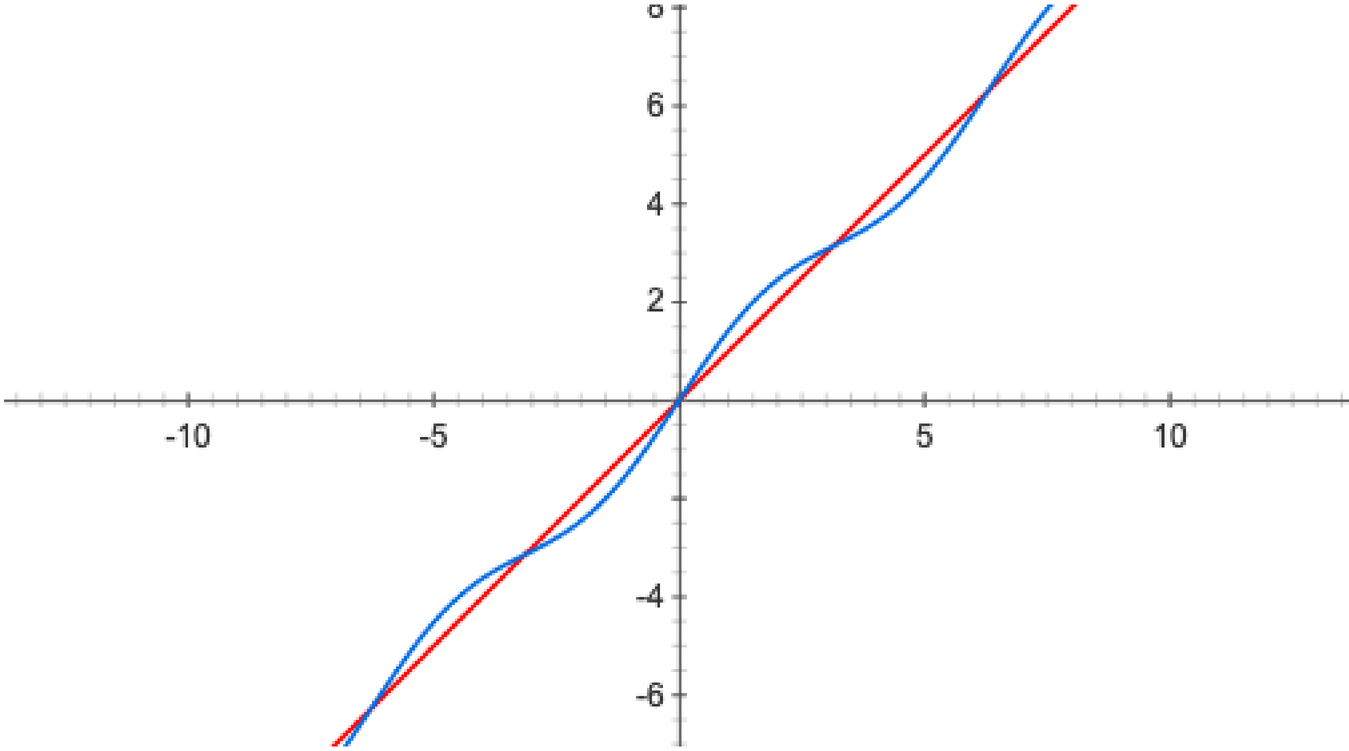
4. **4 pt**. La deuxième colonne $(a = -2, b = -2, c = 2)$ est le vecteur $f_A(\vec{e}_2)$, image de $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$ via l'application linéaire f_A associée à A. Autrement dit $x = 0, y = 1, z = 0$ est une solution "particulière". Les autres solutions du système sont données en ajoutant à $\vec{e}_2$ un vecteur du noyau. L'ensemble des solutions est donc
$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 + -\frac{1}{3}z \\ 1 + 2z \\ 0 + z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 3. total : **10 pt**.

1. **2 pt**. $\int_0^{\pi/2} x^2 \sin(x)dx = \int_0^{\pi/2} 2x\cos(x)dx - [\cos(x)x^2]_0^{\pi/2}$. Le premier terme est nul. On fait une autre intégration par parties et on obtient $-[\cos(x)x^2]_0^{\pi/2} = -\int_0^{\pi/2} 2\sin(x)dx + [\sin(x)2x]_0^{\pi/2} = \pi - 2$.
2. **2 pt**. La fonction $\frac{2}{3}\ln(x^3+1)$ est une primitive. On a $\int_0^1 \frac{2x^2}{x^3+1}dx = [\frac{2}{3}\ln(x^3+1)]_0^1 = \frac{2}{3}\ln(2)$.
3. **2 pt**. La fonction $\cos(\cos(x)$ est un primitive. On a $\int_0^\pi \sin(\cos(x)\sin(x)dx = [\cos(\cos(x)]_0^\pi = \cos(-1) - \cos(1) = 0$
4. **4 pt**. $\int_0^\pi \sin(\cos(x))dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(\cos(x+\pi/2))dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(-\sin(x))dx$ par un changement de variable et la relation trigonométrique élémentaire $-\sin(x) = \cos(\pi/2 + x)$. On obtient 0, la composée de fonctions impaires étant impaire et l'intervalle étant centré en 0.

Exercice 4. total : **12 pt**. Soit (u_n) la suite définie par recurrence par $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}\sin(u_n)$. La valeur initiale u_0 est un nombre réel $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. **1 pt**. La dérivée de la fonction f est $1+\frac{1}{2}\cos(x) \geq 0$ (car $|\frac{1}{2}\cos(x)| < 1$. On a donc une fonction toujours croissante. Inférieure ou égale à x sur les intervalles $[\pi, 2\pi]+2k\pi$ et supérieure ou égale à x sur les intervalles $[0, \pi] + 2k\pi$. Les graphes sont les suivants. Notons que les intervalles ci-dessus sont tous stables par rapport à f qui est continue et non décroissante sur tout $\mathbb{R}$.



2. **1 pt**. La dérivée vaut $1+\frac{1}{2}\cos(x)$. Entre $2/3\pi$ et $4/3\pi$ elle est contenue entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{4}$. On a donc $|f'| \leq 3/4$.
3. **5 pt**. Les suites dont la valeur initiale u_0 est égale à $\lambda \in [\frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi]$ sont 3/4-contractantes. En effet $|f'(x)| = |1 + \frac{1}{2}\cos(x)| \leq \frac{3}{4}$ sur cet intervalle. La fonction est contractante et converge vers $\ell = \pi$. En effet, sur $]2/3\pi, \pi[$ on a $f(x) \geq x$, donc $u_{n+1} \geq u_n$. Pour tout λ in $]2/3\pi, \pi]$ la suite est croissante et bornée par π (l'intervalle $]2/3\pi, \pi]$ est stable par rapport à f car f est croissante et continue). On conclut que la suite converge et que π, seul point fixe de l'intervalle, est sa limite. On raisonne de la même façon pour $]\pi, 4/3\pi[$ ou $f(x) \leq x$, la suite est décroissante et bornée. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ in $]2/3\pi, 4/3\pi[$ la suite converge vers la limite $\ell = \pi$. Comme elle est 3/4-contractante, on a
$$|u_n - \ell| = |u_n - \pi| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n (u_0 - \pi) \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n \frac{\pi}{3},$$
4. **5 pt**. La suite est constante pour $\lambda \in \pi\mathbb{Z}$; en effet les multiples de π sont les points fixes de la fonction $f(x) = x + \frac{1}{2}\sin(x)$. Pour tout entier k la fonction $f(x)$ est supérieure à x sur $]2k\pi, 2k\pi + \pi[$; on a donc $u_{n+1} \geq u_n$. Pour tout λ in $]2k\pi, 2k\pi + \pi]$ la suite est croissante et bornée par $2k\pi + \pi$ (l'intervalle est stable par rapport à f). On conclut que la suite converge et que $2k\pi + \pi$, seul point fixe de l'intervalle, est la limite. On raisonne de la même façon pour $]2k\pi+\pi, 2k\pi+2\pi[$ ou $f(x) \leq x$, la suite dont la valeure initiale contenue dans $[2k\pi+\pi, 2k\pi+2\pi[$ est décroissante et bornée. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ in $]2k\pi, 2k\pi + 2\pi[$ la suite converge vers la limite $\ell(\lambda) = 2k\pi + \pi$ dans ces cas. Sinon, si λ est un multiple de $2k\pi$, la suite est constante : $\ell(k\pi) = k\pi$. Conclusion, sur l'intervalle $[0, 2\pi[$, la fonction $t \to \ell(t)$ vaut
$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0\,; \\ \pi & \text{autrement.} \end{cases}$$
Sur $[0, 2\pi[+2k\pi$ elle vaut $g(t) + 2k\pi$.

Exercice 5. total : **15 pt**. Soit n un entier strictement positif. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes réels dans la variable X, de degré inférieur ou égal à n. Soit $a \in \mathbb{R}$ et ϕ_a l'application $\mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ définie par

$$P(X) \mapsto P(X+a).$$

1. **1 pt**. L'application ϕ_a est linéaire car $(P + \lambda Q)(X + a) = P(X + a) + \lambda Q(X + a)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.
2. **1 pt**. Pour $a, b \in \mathbb{R}$, on $\phi_{a+b} = \phi_a \circ \phi_b = \phi_b \circ \phi_a$. En effet $P((X + a) + b) = P((X + b) + a) = P(X + a + b)$.
3. **3 pt**. Tout polynôme s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de $1, X, \ldots, X^n$: $P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ pour $a_i \in \mathbb{R}$. Les coefficients de la i-ème colonne de A_n sont les coefficients de $(X + 1)^i$. Il s'agit des coefficients $\binom{i}{k}$ pour $k \leq i$ et 0 pour $k > i$. En particulier, la matrice A_3 est donnée par
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
4. **5 pt**. Les matrices A_n sont inversibles car ϕ_1 est inversible. En effet $\phi_1 \circ \phi_{-1} = \phi_0 = \mathrm{id}$. La matrice inverse de A_n est la matrice B_n qui represente ϕ_{-1}. Les coefficients de la i-ème colonne de B_n sont les coefficients de $(X - 1)^i$. Il s'agit des coefficients $(-1)^k \binom{i}{k}$ pour $k \leq i$ et 0 pour $k > i$.
5. **5 pt**. On a $n > 1$ et donc $n + 1 > 2$. Le produit scalaire de la deuxième ligne $(0, 1, 2, 3, \ldots, n)$ de A_n et de la $n + 1$-ième colonne $(1, -\binom{n}{k}, \ldots, (-1)^n \binom{n}{k})$ de B_n vaut zéro. On a donc
$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k \binom{n}{k} = 0$$
(on rappelle que $\binom{n}{k}$ est le nombre de sous-ensembles de k éléments dans un ensemble de n éléments ; on le note $\binom{n}{k}$ ou C_n^k ; il est donné par $n!/(k!(n-k)!)$).