Sorbonne Université - 1M002 - Examen de la session 1 – 14/5/2019 – 14h-17h

---

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de tout appareil électronique de calcul et des téléphones portables est interdite. Les correcteurs tiendront compte de la qualité de la rédaction et de la précision des raisonnements. Cet examen comporte 5 exercices indépendants. Il est noté suivant le barème indicatif suivant. Exercice 1 : 10 points ; exercice 2 : 11 points ; exercice 3 : 10 points ; exercice 4 : 12 points ; exercice 5 : 15 points . Le total est de 58 points et la note sera ramenée sur 50.

Exercice 1.

Vrai ou faux ? Justifier votre réponse.

1. Soit f une application linéaire de l'espace vectoriel E dans le même espace E. Alors $\ker(f) = \{0\}$ si et seulement si f est injective.
2. Soit f une application linéaire de l'espace vectoriel de dimension finie E dans le même espace E. Alors $\ker(f) = \{0\}$ si et seulement si f est surjective.
3. Soit (c_n) une suite réelle quelconque. Soit $b\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ une suite définie par $b_n = \sin(c_n)$. Alors, on peut extraire une suite convergente de la suite (b_n).
4. La suite $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ définie par $a_0 = 1$ et $a_{n+1} = \ln(a_n + 1)$ converge.
5. Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$ une matrice carrée à deux colonnes et deux lignes. Si $A^2 = 0$ alors $A = 0$.
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\int_0^1 x^n e^x dx \leq e$.
7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ non nul on a $\int_0^1 x^n e^x dx \leq 1$.

Exercice 2. Pour $a, b, c \in \mathbb{R}$, on considère le système linéaire suivant

$$\begin{cases} 9x - 2y + 7z = a \\ -2y + 4z = b \\ -3x + 2y - 5z = c \end{cases}$$

1. Écrire la matrice A associée au système linéaire ainsi que la matrice augmentée.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b et c pour que le système ait une solution.
3. Determiner le rang de A, son noyau, et la dimension du noyau. La matrice est elle inversible ?
4. Soit (a, b, c) le vecteur ayant comme coordonnées les termes de la deuxième colonne de la matrice A. En faisant aussi peu de calculs que possible, écrire toutes les solutions du système pour ces valeurs de a, b et c.

Exercice 3. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^{\pi/2} x^2 \sin(x) dx$,
2. $\int_0^1 \frac{2x^2}{x^3+1} dx$,
3. $\int_0^{\pi} \sin(\cos(x)) \sin(x) dx$.
4. $\int_0^{\pi} \sin(\cos(x)) dx$.

Exercice 4. Soit (u_n) la suite définie par recurrence par $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}\sin(u_n)$. La valeur initiale u_0 est un nombre réel $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Tracer le graphe de la fonction $f(x) = x + \frac{1}{2}\sin(x)$ et, dans le même repère, celui de la fonction $g(x) = x$.

2. Montrer que pour $x \in [\frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi]$ on a $|f'(x)| \leq \frac{3}{4}$.
3. Considerer les suites dont la valeur initiale u_0 est égale à $\lambda \in [\frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi]$. Montrer que ces suites ont une limite ℓ finie et démontrer l'inégalité
$$|u_n - \ell| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n \frac{\pi}{3}$$
pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Dire pour quels valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ la suite converge et déterminer la limite $\ell(\lambda)$ dans ces cas en fonction du choix de λ.

Exercice 5. Soit n un entier strictement positif. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes réels dans la variable X, de degré inférieur ou égal à n. Soit $a \in \mathbb{R}$ et ϕ_a l'application $\mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ définie par
$$P(X) \mapsto P(X + a).$$

1. Montrer que ϕ_a est une application linéaire pour tout $a \in \mathbb{R}$.
2. Pour $a, b \in \mathbb{R}$, écrire une formule qui exprime ϕ_{a+b} en fonction de ϕ_a et ϕ_b.
3. Apres avoir montré que les polynômes $1, X, \ldots, X^n$ forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$, on définit
$$A_n \in M_{n+1}(\mathbb{R})$$
comme la matrice qui représente l'application
$$\begin{aligned} \phi_1 \colon \mathbb{R}_n[X] &\to \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) &\mapsto P(X+1) \end{aligned}$$
par rapport à cette base. Écrire la matrice A_3. Fournir une expression générale de A_n pour tout n.
4. Les matrices A_n ci-dessus sont-elles inversibles ? En faisant aussi peu de calculs que possible, déterminer la matrice inverse.
5. Pour $n > 1$, démontrer l'identité suivante
$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k \binom{n}{k} = 0$$
(on rappelle que $\binom{n}{k}$ est le nombre de sous-ensembles de k éléments dans un ensemble de n éléments ; on le note $\binom{n}{k}$ ou C_n^k ; il est donné par $n!/(k!(n-k)!)$).