

La plupart des exercices de cette partie du cours s'axient être des "applications", dans le sens où ils se présentent sous forme de problèmes (plus ou moins succincts) qu'il faut traduire à l'aide des notions mathématiques introduites en cours (ou vues au lycée). C'est, la plupart du temps, cette phase de "traduction" qui est la partie la plus compliquée de l'exercice. Une fois passée cette étape, les opérations mathématiques et l'application systématique des théorèmes sont relativement simples.

Notez que les cas les plus simples peuvent se résoudre à l'intuition. Il faut cependant se méfier de l'intuition qui est souvent induit en erreur. Je reviendrai sur ce point dans la correction de certains exercices réputés pour avoir une solution contre intuitive. Je vous conseille, de votre côté, d'essayer de résoudre un maximum d'exercice d'abord "à l'intuition", puis rigoureusement avec le formalisme du cours, et de conclure en identifiant la "bonne" intuition qui amène au résultat correct (sachant que la 1^{ère} intuition est tout de même parfois la bonne!).

appel : il n'y a pas de "s" à la fin de "parmi".

CF
section

3.4

1°) Ici il faut se demander si un code de cadenas est un arrangement, une combinaison, un m -uplet ou un ensemble.

Dans un tel code, l'ordre compte :

⇒ il ne s'agit ni d'une combinaison, ni d'un ensemble.

Dans un tel code, un chiffre peut apparaître plusieurs fois :

⇒ il ne s'agit ni d'une combinaison, ni d'un arrangement.

Il s'agit d'un quadruplet (m_1, m_2, m_3, m_4)
 $\in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}^4$.

Remarque : Le terme d'usage dans le langage courant est "combinaison". Le langage courant et les mathématiques sont en effet deux langues vivantes présentant des différences (de par leur construction et leur usage) et elles contiennent un certain nombre de faux amis.

Par exemple, le terme "chiffre", qui en mathématique sert à désigner les éléments d'un alphabet permettant d'écrire les nombres, est souvent utilisé dans le langage courant pour désigner les nombres eux-mêmes (ex : "les chiffres parlent d'eux-mêmes").

Le nombre de codes possibles pour notre cadenas est donc :

CF
section 3.3

$$\text{card} \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}^4 = 10000$$

Enfin, on nous demande de considérer le cas où aucun chiffre ne peut être répété dans le code. Dans ce cas, l'ordre compte et il n'y a pas de répétition.

CF
section 3.4.1

⇒ Il s'agit d'un arrangement de quatre chiffres parmi 10.

Le nombre de codes possibles vaut alors :

EI 63

$$A_{10}^4 = \frac{10!}{(10-4)!} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$$

2°) Sur un podium, l'ordre compte (évidemment) et un participant ne peut pas occuper plus d'une place (évidemment).

⇒ Il s'agit d'un arrangement de trois cyclistes parmi 10.

Le nombre de podias possibles vaut donc :

$$A_{10}^3 = \frac{10!}{7!} = 10 \times 9 \times 8 = 720$$

∴ ∴ ∴

3°) Pour ce genre de problème, je vous conseille de commencer par traiter un ou deux cas spécifiques (en s'assurant qu'ils soient généralisables).

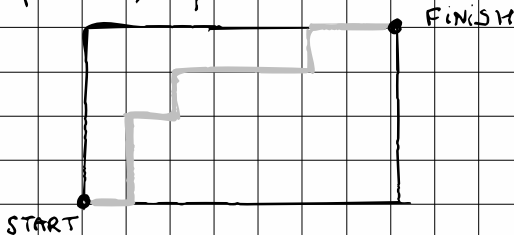
Ex: * $p = 2$, $q = 3$



En notant "d" et "h" un déplacement vers la droite et vers le haut respectivement, le chemin indiqué en gris correspond à :

d, h, d, d, h

* $p = 4$, $q = 7$



Chemin gris = d, h, h, d, h, d, d, d, h, d, d

On voit se profiler les conclusions suivantes :

- Chaque chemin envisageable comporte exactement $p+q$ déplacements : p "h" et q "d".
- Choisir un chemin revient à arranger les q déplacements "d" relativement aux p déplacements "h".

La mauvaise intuition serait ici de conclure que le nombre de chemins est en nombre d'arrangements, voir suite

Notes bien que décider de la position des "d" fixe implicitement aussi la position des "h", et réciproquement.

Si on désigne un chemin par les positions de ses déplacements "d", celui du premier exemple est représenté par la combinaison :

$$\{1, 3, 4\} (= \{3, 1, 4\} = \dots)$$

↑ ↑ désignent un même chemin, l'ordre dans lequel on renseigne les positions de "d" ne compte pas.

Alternativement, on peut désigner un chemin par les positions de ses déplacements "h". Pour le même ex :

$$\{2, 5\} (= \{5, 2\})$$

⇒ la réponse peut donc se formuler de deux façons différentes :

"Le nombre de chemins possibles est le nombre de combinaisons de p positions parmi $p+q$ "

"Le nombre de chemins possibles est le nombre de combinaisons de q positions parmi $p+q$ "

Il s'agit bien entendu de deux formulations d'une seule et même réponse puisque :

$$\binom{p+q}{p} = \binom{p+q}{q} = \frac{(p+q)!}{p! \cdot q!}$$

4°) Il s'agit ici d'aligner 12 tomes d'une encyclopédie sur une étagère de bibliothèque.

Une façon d'ordonner un ensemble de n éléments s'appelle une permutation. Le nombre de permutations possibles vaut $n!$

$$n \times n-1 \times \dots \times 1 = n!$$

↑ ↑ ↑
nbre de choix du tome placé 1^{er} nbre de choix du tome placé 2^e nbre de choix du tome placé dernier

Il y a donc $12! = 479001600$ façons d'aligner les tomes.
s (!!!!)

Une permutation de n éléments n'est rien d'autre qu'un arrangement de n éléments parmi n .
On vérifie bien :

$$A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

(Attention, ne pas oublier que $0! = 1$ par définition de la factorielle)

Si on impose de placer le tome 2 juste après le tome 1, ceci revient à "relier" ces 2 tomes ensemble. Tout se passe comme s'il n'y avait que 11 tomes à aligner. Le nombre de permutations vaut alors $11! = 39916800$.

5°) On considère un ensemble E avec $\text{card } E = m$
 et un sous ensemble A de E avec $\text{card } A = p$,
 $p < m$ [ça fonctionne aussi avec $p \leq m$]

L'ensemble B des parties de E contenant exactement
 1 élément de A est le produit cartésien :

$$B = A \times \mathcal{P}(\bar{A}) ,$$

où (cf notations en début de chapitre 3) :

- * $\bar{A}$ est le complémentaire de A dans E ,
- * $\mathcal{P}(\bar{A})$ désigne l'ensemble des parties de $\bar{A}$.

Comme indiqué dans le cours, le complémentaire
 se désigne de plusieurs façons, chacune avec
 ses avantages (+) et ses inconvénients (-) :

+ : fait référence explicite à E
 - : un peu lourd à écrire

$$E \setminus A = A^c = \bar{A}$$

+ : notation compacte
 - : le "c" pour complément peut être
 confondu avec une puissance
 (notation privilégiée du doc de cours)

+ : notation compacte
 - : avec certaines typographies, la barre
 se lit mal
 (ma préférence)

cf
section 3.3

donc $\text{card}(B) = \text{card}(A) \times \text{card}(\mathcal{P}(\bar{A}))$

cf
exercice 3.7

avec $\text{card}(A) = p$ d'après l'énoncé
et $\text{card}(\mathcal{P}(\bar{A})) = 2^{\text{card}(\bar{A})} = 2^{n-p}$

Donc la réponse à la question est :

$$\text{card}(B) = p 2^{n-p}$$

Approche intuitive :

$$\begin{aligned} \text{card}(B) &= \text{nbre de façons de choisir} \\ &\quad \text{exactement 1 élément de } A \\ &\quad \times \\ &\quad \text{nbre de façons de choisir} \\ &\quad 0 \text{ à } n-p \text{ éléments de } \bar{A} \end{aligned}$$

Pour le 1^{er} facteur, c'est "évidemment" p

Pour le 2^e facteur, il faut parcourir $\bar{A}$ et se dire que, pour chacun des $(n-p)$ éléments, il y a 2 possibilités : on le prend ou on ne le prend pas
 $\Rightarrow 2^{n-p}$ parties envisageables

Cette approche "intuitive" est strictement équivalente au calcul détaillé précédent. On s'est juste débrouillés sans le formalisme du cours.

6°) Chaque bit peut prendre 2 valeurs : 0 ou 1. Un octet, qui est constitué de 8 bits, peut donc prendre $2^8 = 256$ valeurs $\Rightarrow$ On peut coder 256 caractères sur 8 bits.

Remarques :

- Approche formelle :
Un octet est un ensemble ordonné de 8 entiers pouvant chacun prendre les valeurs 0, 1.
C'est donc un élément de l'ensemble
$$O = \{0, 1\}^8$$

Donc $\text{card}(O) = \text{card}(\{0, 1\})^8 = 2^8$
- Dénumérer les éléments de O revient à dénumérer le nombre de parties d'un ensemble de 8 éléments (c'est bien 2^8). Pour s'en convaincre, il suffit de faire l'équivalence :

octet $\Leftrightarrow$ partition

bit = 1 $\Leftrightarrow$ élément $\in$ partie

bit = 0 $\Leftrightarrow$ élément $\notin$ partie

- "octet" n'est rien d'autre qu'un diminutif pour oct-uplet (ou 8-uplet).

7°) Chaque vers peut prendre 10 "valeurs"
(1 par page de l'œuvre) et il y
a 14 vers, donc il y a 10^{14} poèmes.

$$\text{Or } 10^{14} = \underbrace{100}_{\text{cent}} \underbrace{000}_{\text{mille}} \underbrace{000}_{\text{milliards}} 000 000$$

(Formellement, c'est le m^o pb qu'à la
question 6, on remplace juste 2 par 10
et 8 par 14).

8°)

- Une sélection de 5 amis parmi 11 est
une combinaison de 5 éléments parmi 11
(1 ami est sélectionné une fois maximum, et
l'ordre de sélection ne compte pas). C'est
aussi un bon moyen de perdre 6 amis mais
là n'est pas la question.

$$\Rightarrow \text{la réponse est } \binom{11}{5} = \frac{11!}{6!5!} = 462$$

Donc il faut prévoir 462 repas si vous ne voulez
pas perdre d'amis.

- Si parmi ces 11 amis se trouve un et un
seul couple inséparable :
 - soit on invite ni l'un ni l'autre, ce
qui revient à choisir 5 amis parmi $11-2=9$,
 - soit on invite les deux, et il ne reste qu'à
choisir $5-2=3$ amis parmi $11-2=9$.

$$\Rightarrow \text{la réponse est } \binom{9}{5} + \binom{9}{3} = 126 + 84 = 210$$

- Si parmi ces 11 amis se trouve un et un seul couple irrécconciliable :
 - soit on invite ni l'un ni l'autre, ce qui revient à choisir 5 amis parmi $11-2 = 9$,
 - soit on invite l'un des deux, et reste à choisir $5-1 = 4$ amis parmi $11-2 = 9$,
 - soit on invite l'autre, ce qui revient au même en termes de dénombrement.

$\Rightarrow$ la réponse est $\binom{9}{5} + \binom{9}{4} + \binom{9}{4} = 378$

Remarque : Dans les deux derniers cas (amis inséparables et amis incompatibles), on a identifié plusieurs façons d'organiser le repas, chaque façon ayant un nombre bien déterminé de possibilités. Ces "façons" forment des sous-ensembles disjoints de combinaisons (ex: on ne peut pas choisir simultanément d'inviter les 2 tourtereaux ET de n'inviter ni l'un ni l'autre), le nombre total de possibilités est bien la somme du nombre de possibilités de chaque façon de faire.

EI62

9) Pour savoir combien un entier possède de diviseurs, il faut le décomposer en facteurs premiers.

Ici : $1800 = 5^2 \times 3^2 \times 2^3$

$\Rightarrow$ les diviseurs de 1800 s'écrivent

$5^m \times 3^p \times 2^q$ avec $m \in \{0, 1, 2\}$,
 $p \in \{0, 1, 2\}$ et $q \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Il y a donc autant de diviseurs de 1800
qu'il y a de triplets (m, p, q) appartenant
à l'ensemble produit cartésien :

$$E = \{0, 1, 2\} \times \{0, 1, 2\} \times \{0, 1, 2, 3\}$$

→ la réponse est :

$$\begin{aligned}\text{card}(E) &= \text{card}\{0, 1, 2\} \times \text{card}\{0, 1, 2\} \times \text{card}\{0, 1, 2, 3\} \\ &= 3 \times 3 \times 4 \\ &= 36.\end{aligned}$$

Fin de l'exercice