

---

# THÉORIE

## DES

# FONCTIONS ANALYTIQUES,

### CONTENANT

*Les Principes du Calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infiniment petits, d'évanouissans, de limites et de fluxions, et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies.*

---

## INTRODUCTION.

*Des Fonctions en général. Des Fonctions primitives et dérivées.  
Des différentes manières dont on a envisagé le Calcul différentiel. Objet de cet Ouvrage.*

On appelle *fonction* d'une ou de plusieurs quantités, toute expression de calcul dans laquelle ces quantités entrent d'une manière quelconque, mêlées ou non avec d'autres quantités qu'on regarde comme ayant des valeurs données et invariables, tandis que les quantités de la fonction peuvent recevoir toutes les valeurs possibles. Ainsi, dans les fonctions, on ne considère que les quantités qu'on suppose variables, sans aucun égard aux constantes qui peuvent y être mêlées.

Le mot *fonction* a été employé par les premiers analystes pour désigner en général les puissances d'une même quantité. Depuis, on a étendu la signification de ce mot à toute quantité formée

## THÉORIE DES FONCTIONS.

d'une manière quelconque d'une autre quantité. *Leibnitz* et les *Bernoulli* l'ont employé les premiers dans cette acception générale, et il est aujourd'hui généralement adopté.

Lorsqu'à la variable d'une fonction on attribue un accroissement quelconque, en ajoutant à cette variable une quantité indéterminée, on peut par les règles ordinaires de l'algèbre, si la fonction est algébrique, la développer suivant les puissances de cette indéterminée. Le premier terme du développement sera la fonction proposée qu'on appellera *fonction primitive*; les termes suivans seront formés de différentes fonctions de la même variable, multipliées par les puissances successives de l'indéterminée. Ces nouvelles fonctions dépendront uniquement de la fonction primitive dont elles dérivent, et pourront s'appeler *fonctions dérivées*. En général, quelle que soit la fonction primitive, algébrique ou non, elle peut toujours être développée ou censée développée de la même manière, et donner ainsi naissance à des fonctions dérivées. Les fonctions considérées sous ce point de vue, constituent une analyse d'un genre supérieur à l'analyse ordinaire, par sa généralité et ses nombreux usages; et l'on verra dans cet ouvrage que l'analyse qu'on appelle vulgairement *transcendante* ou *infinitésimale*, n'est au fond que l'analyse des fonctions primitives et dérivées, et que les calculs différentiel et intégral ne sont, à proprement parler, que le calcul de ces mêmes fonctions.

Les premiers géomètres qui ont employé le calcul différentiel, *Leibnitz*, les *Bernoulli*, *Hopital*, etc. l'ont fondé sur la considération des quantités infiniment petites de différens ordres, et sur la supposition qu'on peut regarder et traiter comme égales, les quantités qui ne diffèrent entre elles que par des quantités infiniment petites à leur égard. Contens d'arriver par les procédés de ce calcul d'une manière prompte et sûre à des résultats exacts, ils ne se sont point occupés d'en démontrer les principes. Ceux qui les ont suivis, *Euler*, *d'Alembert*, etc., ont cherché à suppléer à ce défaut, en faisant voir, par des applications particulières, que les différences qu'on suppose infiniment petites, doivent être absolument nulles, et que leurs rapports, seules quantités qui entrent réellement dans le calcul, ne sont autre chose que les limites des rapports des différences finies ou indéfinies.

Mais il faut convenir que cette idée, quoique juste en elle-même, n'est pas assez claire pour servir de principe à une science dont la certitude doit être fondée sur l'évidence, et surtout pour être présentée aux commençans; d'ailleurs, il me semble que comme dans le calcul différentiel, tel qu'on l'emploie, on considère et on calcule en effet les quantités infiniment petites ou supposées infiniment petites elles-mêmes, la véritable métaphysique de ce calcul consiste en ce que l'erreur résultant de cette fausse supposition est redressée ou compensée par celle qui naît des procédés mêmes du calcul, suivant lesquels on ne retient dans la différentiation que les quantités infiniment petites du même ordre. Par exemple, en regardant une courbe comme un polygone d'un nombre infini de côtés chacun infiniment petit, et dont le prolongement est la tangente de la courbe, il est clair qu'on fait une supposition erronée; mais l'erreur se trouve corrigée dans le calcul par l'omission qu'on y fait des quantités infiniment petites. C'est ce qu'on peut faire voir aisément dans des exemples, mais dont il serait peut-être difficile de donner une démonstration générale.

*Newton*, pour éviter la supposition des infiniment petits, a considéré les quantités mathématiques comme engendrées par le mouvement, et il a cherché une méthode pour déterminer directement les vitesses ou plutôt le rapport des vitesses variables avec lesquelles ces quantités sont produites; c'est ce qu'on appelle, d'après lui, la *méthode des fluxions* ou le *calcul fluxionnel*, parce qu'il a nommé ces vitesses *fluxions* des quantités. Cette méthode ou ce calcul s'accorde pour le fond et pour les opérations, avec le calcul différentiel, et n'en diffère que par la métaphysique qui paraît en effet plus claire, parce que tout le monde a ou croit avoir une idée de la vitesse. Mais, d'un côté, introduire le mouvement dans un calcul qui n'a que des quantités algébriques pour objet, c'est y introduire une idée étrangère, et qui oblige à regarder ces quantités comme des lignes parcourues par un mobile; de l'autre, il faut avouer qu'on n'a pas même une idée bien nette de ce que c'est que la vitesse d'un point à chaque instant, lorsque cette vitesse est variable; et on peut voir par le savant *Traité des fluxions* de *Maclaurin*, combien il est difficile de démon-

trer rigoureusement la méthode des fluxions, et combien d'artifices particuliers il faut employer pour démontrer les différentes parties de cette méthode.

Aussi *Newton* lui-même, dans son livre des Principes, a préféré, comme plus courte, la méthode des dernières raisons des quantités évanouissantes; et c'est aux principes de cette méthode que se réduisent en dernière analyse les démonstrations relatives à celle des fluxions. Mais cette méthode a, comme celle des limites dont nous avons parlé plus haut, et qui n'en est proprement que la traduction algébrique, le grand inconvénient de considérer les quantités dans l'état où elles cessent, pour ainsi dire, d'être quantités; car quoiqu'on conçoive toujours bien le rapport de deux quantités tant qu'elles demeurent finies, ce rapport n'offre plus à l'esprit une idée claire et précise, aussitôt que ses termes deviennent l'un et l'autre nuls à-la-fois.

C'est pour prévenir ces difficultés, qu'un habile Géomètre anglais, qui a fait dans l'analyse des découvertes importantes, a proposé dans ces derniers temps, de substituer à la méthode des fluxions jusqu'alors suivie scrupuleusement par tous les géomètres anglais, une autre méthode purement analytique, et analogue à la méthode différentielle, mais dans laquelle, au lieu de n'employer que les différences infiniment petites ou nulles des quantités variables, on emploie d'abord des valeurs différentes de ces quantités, qu'on égale ensuite, après avoir fait disparaître par la division, le facteur que cette égalité rendrait nul. Par ce moyen, on évite à la vérité les infiniment petits et les quantités évanouissantes; mais les procédés et les applications du calcul sont embarrassans et peu naturels, et on doit convenir que cette manière de rendre le calcul différentiel plus rigoureux dans ses principes, lui fait perdre ses principaux avantages, la simplicité de la méthode et la facilité des opérations. Voyez l'ouvrage intitulé : *the residual analysis a new branch of the Algebraic art*, by John Landen, London, 1764, ainsi que le discours publié par le même auteur, en 1758, sur le même objet.

Ces variations dans la manière d'établir et de présenter les principes du calcul différentiel, et même dans la dénomination de ce

calcul, montrent, ce me semble, qu'on n'en avait pas saisi la véritable théorie, quoiqu'on eût trouvé d'abord les règles les plus simples et les plus commodes pour le mécanisme des opérations.

On trouvera de nouvelles considérations sur cet objet dans la première leçon sur le Calcul des fonctions.

Dans un mémoire imprimé parmi ceux de l'Académie de Berlin, de 1772, et dont l'objet était l'analogie entre les différentielles et les puissances positives, et entre les intégrales et les puissances négatives, j'avancai que la théorie du développement des fonctions en série, contenait les vrais principes du calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infiniment petits ou de limites, et je démontrai par cette théorie le théorème de *Taylor*, qui est le fondement de la méthode des séries, et qu'on n'avait encore démontré que par le secours de ce calcul, ou par la considération des différences infiniment petites.

Depuis, *Arbogast* a présenté à l'Académie des Sciences, un Mémoire où la même idée est exposée avec des développemens et des applications qui lui appartiennent. Mais l'auteur n'ayant encore rien publié sur ce sujet (\*), et m'étant trouvé engagé par des circonstances particulières à développer les principes généraux de l'analyse, j'ai rappelé mes anciennes idées sur ceux du calcul différentiel, et j'ai fait de nouvelles réflexions tendantes à les confirmer et à les généraliser; c'est ce qui a occasionné cet Ecrit, que je ne me détermine à publier que par la considération de l'utilité dont il peut être à ceux qui étudient cette branche importante de l'analyse.

Il peut, au reste, paraître surprenant que cette manière d'envisager le calcul différentiel ne se soit pas offerte plus tôt aux géomètres, et surtout qu'elle ait échappé à *Newton*, inventeur de la méthode des séries et de celle des fluxions. Mais nous observerons à cet égard qu'en effet *Newton* n'avait d'abord employé que la simple considération des séries pour résoudre le problème

---

(\*) L'ouvrage que feu *Arbogast* a donné en 1800, sous le titre de *Calcul des Dérivations*, a un objet différent, comme l'auteur en avertit lui-même à la fin de sa préface.

troisième du second livre des Principes, dans lequel il cherche la loi de la résistance nécessaire pour qu'un corps pesant décrive librement une courbe donnée, problème qui dépend naturellement du calcul différentiel ou fluxionnel. On sait que *Jean Bernoulli* trouva cette solution fautive, en la comparant avec celle qui résulte du calcul différentiel ; et son neveu, *Nicolas*, prétendit que l'erreur venait de ce que *Newton* avait pris le troisième terme de la série convergente dans laquelle il réduisait l'ordonnée de la courbe donnée, pour la différentielle seconde de cette ordonnée, et le quatrième pour la différentielle troisième, au lieu que, suivant les règles du calcul différentiel, ces termes ne sont, l'un que la moitié, l'autre que la sixième partie des mêmes différentielles. (*Voyez* les Mémoires de l'Académie des Sciences, de 1711, et le tome I des Œuvres de *Jean Bernoulli*.) *Newton*, sans répondre, abandonna entièrement sa première méthode, et donna dans la seconde édition des Principes, une solution différente du même problème, fondée sur la méthode même du calcul différentiel. Depuis, on n'a plus parlé de l'application de la méthode des séries à ce genre de problèmes, que pour avertir de la méprise dans laquelle *Newton* était tombé, et faire sentir la nécessité d'avoir égard à l'observation de *Nicolas Bernoulli*. (*Voyez* l'Encyclopédie, aux articles *différentiel*, *force*.) Mais nous ferons voir que cette méprise ne vient point du fond de la méthode, mais simplement de ce que *Newton* n'a pas tenu compte de tous les termes auxquels il fallait avoir égard ; et nous rectifierons de cette manière sa première solution, dont aucun des commentateurs des Principes n'a fait mention.

L'objet de cet Ouvrage est de donner la théorie des fonctions, considérées comme primitives et dérivées ; de résoudre par cette théorie, les principaux problèmes d'analyse, de géométrie et de mécanique, qu'on fait dépendre du calcul différentiel ; et de donner par là, à la solution de ces problèmes, toute la rigueur des démonstrations des Anciens.

---

---

# PREMIÈRE PARTIE.

EXPOSITION DE LA THÉORIE, AVEC SES PRINCIPAUX USAGES  
DANS L'ANALYSE.

---

## CHAPITRE PREMIER.

*Développement en série d'une fonction d'une variable, lorsqu'on attribue un accroissement à cette variable. Formation successive des termes de la série. Théorème important sur la nature de ces séries.*

1. **N**ous désignerons en général par la caractéristique  $f$  ou  $F$ , placée devant une variable, toute fonction de cette variable, c'est-à-dire, toute quantité dépendante de cette variable, et qui varie avec elle suivant une loi donnée. Ainsi  $fx$  ou  $Fx$  désignera une fonction de la variable  $x$ ; mais lorsqu'on voudra désigner la fonction d'une quantité déjà composée de cette variable, comme  $x^2$ ,  $a + bx$ , etc., on renfermera cette quantité entre deux parenthèses. Ainsi  $f(x)$  désignera une fonction de  $x$ ,  $f(x^2)$ ,  $f(a + bx)$ , etc. désigneront des fonctions de  $x^2$ , de  $a + bx$ , etc.

Pour marquer une fonction de deux variables indépendantes, comme de  $x$ ,  $y$ , nous écrirons  $f(x, y)$ , et ainsi des autres.

Lorsque nous voudrions employer d'autres caractéristiques pour marquer les fonctions, nous aurons soin d'en avertir.

Considérons donc une fonction  $fx$  d'une variable quelconque  $x$ . Si à la place de  $x$ , on y met  $x + i$ ,  $i$  étant une quantité quelconque indéterminée, elle deviendra  $f(x + i)$ , et par la théorie

des séries, on pourra la développer en une série de cette forme

$$fx + pi + qi^2 + ri^3 + \text{etc.},$$

dans laquelle les quantités  $p, q, r$ , etc., coefficients des puissances de  $i$ , seront de nouvelles fonctions de  $x$ , dérivées de la fonction primitive  $x$ , et indépendantes de l'indéterminée  $i$ .

2. Mais pour ne rien avancer gratuitement, nous commencerons par examiner la forme même de la série qui doit représenter le développement de toute fonction  $fx$ , lorsqu'on y substitue  $x + i$  à la place de  $x$ , et que nous avons supposée ne devoir contenir que des puissances entières et positives de  $i$ .

Cette supposition se vérifie en effet par le développement des différentes fonctions connues; mais personnellement, que je sache, n'a cherché à la démontrer *à priori*; ce qui me paraît néanmoins d'autant plus nécessaire, qu'il y a des cas particuliers où elle ne peut pas avoir lieu. D'ailleurs, le calcul différentiel porte expressément sur cette même supposition, et les cas qui font exception, sont précisément ceux où ce calcul a été accusé d'être en défaut.

Je vais d'abord démontrer que dans la série résultante du développement de la fonction  $f(x+i)$ , il ne peut se trouver aucune puissance fractionnaire de  $i$ , à moins qu'on ne donne à  $x$  des valeurs particulières.

En effet, il est clair que les radicaux de  $i$  ne pourraient venir que des radicaux renfermés dans la fonction primitive  $fx$ , et il est clair en même temps que la substitution de  $x + i$  au lieu de  $x$ , ne pourrait ni augmenter ni diminuer le nombre de ces radicaux, ni en changer la nature, tant que  $x$  et  $i$  sont des quantités indéterminées. D'un autre côté, on sait par la théorie des équations, que tout radical a autant de valeurs différentes qu'il y a d'unités dans son exposant, et que toute fonction irrationnelle a par conséquent autant de valeurs différentes qu'on peut faire de combinaisons des différentes valeurs des radicaux qu'elle renferme. Donc si le développement de la fonction  $f(x+i)$  pouvait

contenir un terme de la forme  $\mu i^{\frac{m}{n}}$ , la fonction  $fx$  serait nécessairement



---



---

## CHAPITRE II.

### *Fonctions dérivées ; leur notation et leur algorithme.*

8. **N**ous avons vu que le développement de  $f(x+i)$  donne naissance à différentes autres fonctions  $p, q, r$ , etc., toutes dérivées de la fonction principale  $fx$ , et nous avons donné la manière de trouver ces fonctions dans des cas particuliers. Mais pour établir une théorie sur ces sortes de fonctions, il faut rechercher la loi générale de leur dérivation.

Pour cela, reprenons la formule générale

$$f(x+i) = fx + pi + qi^2 + ri^3 + \text{etc.},$$

et supposons que l'indéterminée  $x$  devienne  $x+o$ ,  $o$  étant une quantité quelconque indéterminée et indépendante de  $i$ ; il est visible que  $f(x+i)$  deviendra  $f(x+i+o)$ , et l'on voit en même temps que l'on aurait le même résultat en mettant simplement  $i+o$  à la place de  $i$  dans  $f(x+i)$ . Donc aussi, le résultat doit être le même, soit qu'on mette, dans la série  $fx + pi + qi^2 + ri^3 + \text{etc.}$ ,  $i+o$  à la place de  $i$ , soit qu'on y mette  $x+o$  au lieu de  $x$ .

La première substitution donnera

$$fx + p(i+o) + q(i+o)^2 + r(i+o)^3 + \text{etc.};$$

savoir, en développant les puissances de  $i+o$ , et n'écrivant, pour plus de simplicité, que les deux premiers termes de chaque puissance, parce que la comparaison de ces termes suffira pour les déterminations dont nous avons besoin,

$$\begin{aligned} &fx + pi + qi^2 + ri^3 + si^4 + \text{etc.}; \\ &+ po + 2qio + 3ri^2o + 4si^3o + \text{etc.} \end{aligned}$$

Pour faire l'autre substitution, soient  $fx + f'xo + \text{etc.}$ ,  $p + p'o + \text{etc.}$ ,  $q + q'o + \text{etc.}$ ,  $r + r'o + \text{etc.}$ , ce que deviennent les fonctions  $fx, p, q, r$ , etc. en y mettant  $x + o$  pour  $x$ , et ne considérant dans le développement que les termes qui contiennent la première puissance de  $o$ , il est clair que la même formule deviendra

$$fx + pi + qi^2 + ri^3 + si^4 + \text{etc.} \\ + f'xo + p'io + q'i^2o + r'i^3o + \text{etc.}$$

Comme ces deux résultats doivent être identiques, quelles que soient les valeurs de  $i$  et de  $o$ , on aura, en comparant les termes affectés de  $o$ , de  $io$ , de  $i^2o$ , etc.,

$$p = f'x, \quad 2q = p', \quad 3r = q', \quad 4s = r', \quad \text{etc.}$$

Maintenant, de même que  $f'x$  est la première fonction dérivée de  $fx$ , il est clair que  $p'$  est la première fonction dérivée de  $p$ , que  $q'$  est la première fonction dérivée de  $q$ ,  $r'$  la première fonction dérivée de  $r$ , et ainsi de suite. Donc, si, pour plus de simplicité et d'uniformité, on dénote par  $f'x$  la première fonction dérivée de  $fx$ , par  $f''x$  la première fonction dérivée de  $f'x$ , par  $f'''x$  la première fonction dérivée de  $f''x$ , et ainsi de suite, on aura

$$p = f'x, \quad \text{et de là } p' = f''x;$$

donc  $q = \frac{p'}{2} = \frac{f''x}{2}, \quad \text{et de là } q' = \frac{f'''x}{2};$

donc  $r = \frac{q'}{3} = \frac{f'''x}{2 \cdot 3}, \quad \text{et de là } r' = \frac{f^{iv}x}{2 \cdot 3};$

donc  $s = \frac{r'}{4} = \frac{f^{iv}x}{2 \cdot 3 \cdot 4}, \quad s' = \frac{f^{v}x}{2 \cdot 3 \cdot 4};$

et ainsi de suite.

Donc, substituant ces valeurs dans le développement de la fonction  $f(x + i)$ , on aura

$$f(x + i) = fx + f'xi + \frac{f''x}{2}i^2 + \frac{f'''x}{2 \cdot 3}i^3 + \frac{f^{iv}x}{2 \cdot 3 \cdot 4}i^4 + \text{etc.}$$

Cette nouvelle expression a l'avantage de faire voir comment les termes de la série dépendent les uns des autres, et surtout comment,

lorsqu'on sait former la première fonction dérivée d'une fonction primitive quelconque , on peut former toutes les fonctions dérivées que la série renferme.

9. Nous appellerons la fonction  $fx$  , *fonction primitive* , par rapport aux fonctions  $f'x$  ,  $f''x$  , etc. qui en dérivent, et nous appellerons celles-ci , *fonctions dérivées* , par rapport à celle-là. Nous nommerons de plus la première fonction dérivée  $f'x$  , *fonction prime* ; la seconde fonction dérivée  $f''x$  , *fonction seconde* ; la troisième fonction dérivée  $f'''x$  , *fonction tierce* , et ainsi de suite.

De la même manière , si  $y$  est supposée une fonction de  $x$  , nous dénoterons ses fonctions dérivées par  $y'$  ,  $y''$  ,  $y'''$  , etc. , de sorte que  $y$  étant une fonction primitive ,  $y'$  sera sa fonction *prime* ,  $y''$  en sera la fonction *seconde* ,  $y'''$  la fonction *tierce* , et ainsi de suite.

De sorte que  $x$  devenant  $x + i$  ,  $y$  deviendra

$$y + y'i + \frac{y''i^2}{2} + \frac{y'''i^3}{2.3} + \text{etc.}$$

Ainsi , pourvu qu'on ait un moyen d'avoir la fonction prime d'une fonction primitive quelconque , on aura , par la simple répétition des mêmes opérations , toutes les fonctions dérivées , et par conséquent tous les termes de la série qui résulte du développement de la fonction primitive.

Au reste , pour peu qu'on connaisse le calcul différentiel , on doit voir que les fonctions dérivées  $y'$  ,  $y''$  ,  $y'''$  , etc. relatives à  $x$  , coïncident avec les expressions  $\frac{dy}{dx}$  ,  $\frac{d^2y}{dx^2}$  ,  $\frac{d^3y}{dx^3}$  , etc.