LANGAGES ET AUTOMATES (LA3)

TD2 : Encore sur les Expressions Rationnelles - Automates, Langages reconnaissables

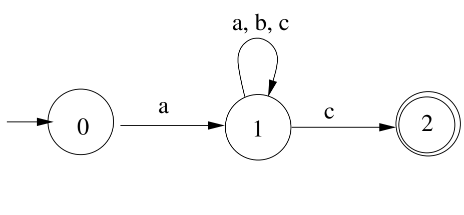
1 Dans la suite, a et b désignent des lettres, et A et B des expressions rationnelles.

1. Que pensez vous des égalités suivantes (les prouver ou trouver un contre-exemple) ?
   - $(A^n)^* = (A^*)^n$, n entier ;
   - $(A^+)^* = A^*$;
   - $(A + A^n)^* = A^* + (A^*)^n$, n entier ;
   - $A^2 + B^2 = (A + B)^2$;
   - $A(BA)^* = (AB)^*A$;
   - $(A + B)^* = (A^*B^*)^*$;
2. Simplifier les expressions rationnelles suivantes :
   - $(aa)^*a + (aa)^*$;
   - $(a + \epsilon)a^*b$.
   - $(a + \epsilon)(\epsilon + aa)^+a$;
3. Montrer les égalités suivantes :
   - $(a^2 + a^3)^* = (a^2a^*)^*$;
   - $a^*(a + b)^* = (a + ba^*)^*$;
   - $(ba)^+(a^*b^* + a^*) = (ba)^*ba^+b^*$.

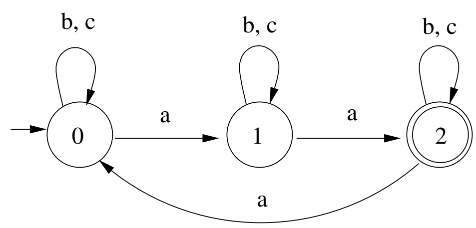
2 Soit Σ l'alphabet $\{a, b\}$ et $\mathcal{A}$ l'automate défini par le quintuplet $(\Sigma, Q, \{0\}, F, \delta)$, où :
- $Q = \{0, 1, 2, 3\}$
- $F = \{0, 3\}$
- $\delta(0, a) = 1,\ \delta(0, b) = 2$
- $\delta(1, a) = 0,\ \delta(1, b) = 3$
- $\delta(2, a) = 1$
- $\delta(3, b) = 0$

1. Représenter les transitions de cet automate sous forme de table de transitions.
2. Dessiner cet automate.
3. Cet automate est-il complet ?
4. Les mots aaa, bab, bbb sont-ils reconnus par cet automate ?

3 Soient les deux automates :



Automate A_1



Automate A_2

1. Décrire pour chacun des deux automates les ensembles d'états initiaux/d'acceptation et la fonction de transition.
2. Les mots abc, $abbbc$ et $abacabcc$ sont-ils reconnus par l'automate $\mathcal{A}_1$? Sont-ils reconnus par l'automate $\mathcal{A}_2$?

3. Décrire les langages reconnus par chacun des automates, en français, puis par une expression rationnelle.

4 [Construction d'automates]
Montrer que les langages suivants sur l'alphabet $A = \{a, b\}$ sont reconnaissables en donnant pour chaque langage un automate qui le reconnait :
- $\mathcal{L}_1 = \{u \in A^* :$ toute occurrence de b dans u est immédiatement suivie d'au moins deux occurrences de $a\}$,
- $\mathcal{L}_2 = \{u \in A^* : u$ ne contient pas deux a successifs$\}$,
- $\mathcal{L}_3 = \{u \in A^* :$ le nombre d'occurrences de a dans u est pair$\}$,
- $\mathcal{L}_4 = \{u \in A^* :$ les blocs de a dans u sont alternativement de longueur paire et impaire$\}$.

5 [Construction d'automates]
Montrer que les langages suivants sur l'alphabet $A = \{0, 1\}$ sont reconnaissables en donnant pour chaque langage un automate qui le reconnait :
- $\mathcal{L}_5 = \{u \in A^* : u$ est la représentation d'une puissance de $2\}$,
- $\mathcal{L}_6 = \{u \in A^* : u$ est la représentation d'un multiple de $4\}$,
- $\mathcal{L}_7 = \{u \in A^* : u$ est la représentation d'un multiple de $3\}$,

6 [Petite anticipation sur le cours de la semaine prochaine.]
Sauriez-vous écrire des automates reconnaissant les complémentaires des langages $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_7$?
Est-ce que le complémentaire d'un langage reconnaissable est toujours reconnaissable ?