université PARIS DIDEROT PARIS 7

Langages et Automates (LA3)

TD8 : grammaires et langages algébriques

1 On considère les grammaires algébriques suivantes sur l'alphabet $\{a, b\}$. Pour chacune, décrire les langages engendrés.

$$\mathcal{G}_1 : \quad S \rightarrow \varepsilon \mid aSa \mid bSb$$
$$\mathcal{G}_2 : \quad S \rightarrow a \mid b \mid aSa \mid bSb$$

$$\mathcal{G}_3 : \left\{ \begin{array}{lcl} S_0 & \rightarrow & aS_0a \mid bS_0b \mid S_1 \\ S_1 & \rightarrow & aS_2b \mid bS_2a \\ S_2 & \rightarrow & aS_2a \mid bS_2b \mid a \mid b \mid \varepsilon \end{array} \right.$$

2 Donner une grammaire algébrique engendrant le langage des mots sur $\{a, b\}$ qui ne sont pas des palindromes.

3 Soit $\mathcal{G} : S \rightarrow a \mid Sa \mid aS \mid bSS \mid SSb \mid SbS$. Par induction sur la longueur de la dérivation, prouver que tout mot du langage engendré contient strictement plus de a que de b.

4 Considérons la grammaire suivante :

$$\mathcal{G} \;:\; \left\{ \begin{array}{lcl} S & \rightarrow & aB \mid bA \\ A & \rightarrow & bAA \mid aS \mid a \\ B & \rightarrow & aBB \mid bS \mid b \end{array} \right.$$

1. Montrer que $L_S(\mathcal{G}) = \{u \in \{a, b\}^* \;:\; |u|_a = |u|_b\}$.
2. Donner une grammaire plus simple engendrant le même langage.
3. Donner la grammaire du langage de Dyck à une paire de parenthèses (avec a correspondant à [et b à])

$$D_1^* = \{u \in \{a, b\}^* \;:\; |u|_a = |u|_b, \forall v \text{ préfixe de } u, |v|_a \geq |v|_b\}.$$

5 Le langage de Łukasiewicz Ł est engendré par la grammaire $(\{a, b\}, \{S\}, \{S \rightarrow aSS + b\})$.

1. Montrer que tout mot u de Ł vérifie la propriété (1) : $|u|_b = |u|_a + 1$.
2. Montrer que tout mot u de Ł vérifie la propriété (2) : $\forall v$ préfixe strict de u : $|v|_a \geq |v|_b$.
3. Montrer que si un mot u de $\{a, b\}^*$ vérifie (1) et (2), alors soit on a $u = b$, soit u commence par a et il existe un plus petit mot u_1 vérifiant $u = au_1u_2$ et $|au_1|_a = |au_1|_b$; montrer qu'alors u_1 et u_2 vérifient également (1) et (2). En déduire Ł $= \{u \in \{a, b\}^* :$ u vérifie (1) et (2)$\}$.
4. On considère le langage de Dyck D_1^* à une paire de parenthèses. Montrer Ł $= D_1^* b$.

6 Pour chacune des grammaires suivantes, montrer qu'elle est ambiguë, puis construire une grammaire non-ambiguë équivalente.

1. $S \rightarrow SS \mid a \mid b$
2. $S \rightarrow \varepsilon \mid aSb \mid aSbb$
3. $S \rightarrow \varepsilon \mid aSb \mid abS$
4. $S \rightarrow cSS \mid cS \mid a$
5. $\left\{ \begin{array}{lcl} S_0 & \rightarrow & S_1S_2S_1 \\ S_1 & \rightarrow & \varepsilon \mid aS_1 \\ S_2 & \rightarrow & \varepsilon \mid bS_2 \end{array} \right.$

7 Pour chacune des grammaires suivantes, préciser si elle est ambiguë.

1. $S \rightarrow aSSb \mid ab$
2. $S \rightarrow a \mid Sa \mid bSS \mid SSb \mid SbS$
3. $S \rightarrow aSbSb \mid a$
4. $S \rightarrow aSbSa \mid a$