

# Topologie algébrique

FIBRÉS VECTORIELS, CLASSES CARACTÉRISTIQUES,  
DUALITÉ DE POINCARÉ

Alexandru OANCEA

Sorbonne Université

Notes de cours du Master 2<sup>ème</sup> année

Mathématiques fondamentales

3 décembre 2018

Page web du cours :

<https://webusers.imj-prg.fr/~alexandru.oancea/>

## PRÉREQUIS

Les applications les plus éclatantes des fibrés vectoriels concernent les variétés différentiables. Alors même que ce cours n'est pas un cours de topologie différentielle, il est fortement conseillé d'avoir suivi un cours de géométrie différentielle de base.

Si tel n'est pas le cas, vous pouvez par exemple lire les premiers chapitres du livre

J. MILNOR, *Topology from the differentiable viewpoint*, Princeton Univ. Press, 1997 (1965).

Pour un aperçu plus large, voir par exemple les livres suivants qui traitent aussi la cohomologie de De Rham

J. LAFONTAINE, *Introduction aux variétés différentielles*, EDP Sciences, 2010.

F. PAULIN, *Géométrie différentielle élémentaire*, notes de cours de niveau M1, FIMFA, ENS Ulm, 2006-2007, disponibles en ligne :

[http://www.math.u-psud.fr/~paulin/notescours/cours\\_geodiff.pdf](http://www.math.u-psud.fr/~paulin/notescours/cours_geodiff.pdf)

Une autre référence possible sont les notes de cours

A. OANCEA, *Notes de cours de Géométrie différentielle*, niveau M1, UPMC, 2014-2016, disponibles en ligne

<http://www.imj-prg.fr/~alexandru.oancea/2016-M2-GEO-DIFF/geo-diff-2016.html>

## BIBLIOGRAPHIE

- (1) J. Milnor, J. Stasheff, *Characteristic Classes*, Princeton Univ. Press, 1974.
- (2) N. Steenrod, *Topology of Fibre Bundles*, Princeton Univ. Press, 1999 (1951).
- (3) G. Bredon, *Topology and Geometry*, GTM 139, Springer, 1994.
- (4) S. Gallot, D. Hulin, J. Lafontaine, *Riemannian Geometry*, Springer, 2004 (1987).
- (5) M.W. Hirsch, *Differential Topology*, GTM 33, Springer, 1976.
- (6) A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002.
- (7) R. Bott, L.W. Tu, *Differential Forms in Algebraic Topology*, GTM 82, Springer, 1982.
- (8) D. Husemoller, *Fibre Bundles*, GTM 20, Springer, 1994 (1966).
- (9) E. Spanier, *Algebraic Topology*, McGraw-Hill, 1981
- (10) J.F. Davis, P. Kirk, *Lecture Notes in Algebraic Topology*, GSM 35, AMS, 2001.
- (11) J. McCleary, *A User's Guide to Spectral Sequences*, 2nd ed., Cambridge Univ. Press, 2001 (Publish or Perish, 1985).
- (12) C. Voisin, *Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe*, Cours spécialisés 10, SMF, 2002.
- (13) J. Milnor, *Morse Theory*, Princeton University Press, 1962.
- (14) K. Cieliebak, Y. Eliashberg, *From Stein to Weinstein and back*, AMS Colloquium Publications 59, AMS, 2012.

## TABLE DES MATIÈRES

Prérequis	2
Bibliographie	3
Plan du cours. Contexte	5
1. Introduction	7
1.1. Définition d'un fibré vectoriel	7
1.2. Quatre motivations pour l'étude des fibrés vectoriels	8
2. Classification des fibrés. Homotopie	15
2.1. Classification des fibrés vectoriels sur les sphères	15
2.2. Notions de topologie différentielle	21
2.3. Fibrés vectoriels et homotopie	32
2.4. Groupes d'homotopie	41
3. Rappels d'homologie et de cohomologie	50
3.1. Homologie et cohomologie singulière	50
3.2. Homologie et cohomologie cellulaire	50
3.3. Homologie à coefficients dans un système local	50
4. Classes caractéristiques	51
4.1. Le point de vue axiomatique	51
4.2. Le point de vue de la théorie de l'obstruction	61
4.3. Le théorème de Leray-Hirsch. Cohomologie des Grassmanniennes	85
5. Dualité de Poincaré	90
5.1. Orientabilité	90
5.2. Dualité de Poincaré	90
5.3. Dualité de Poincaré et classe de Thom	91
5.4. Dualité de Poincaré et produit d'intersection	96
5.5. Dualité de Poincaré et première classe de Chern	99
5.6. Dualité de Poincaré et classe d'Euler	101
5.7. Topologie des surfaces projectives lisses dans $CP^3$	105
Annexe A. Connexions et distributions horizontales	110
Annexe B. CW-complexes. Théorème de Hurewicz. Théorème de Whitehead. Théorème d'approximation cellulaire.	113
Annexe C. Rappels d'homologie et de cohomologie	114
Annexe D. Suites spectrales	116
Annexe E. Premiers groupes d'homotopie non-nuls des variétés de Stiefel	117
Annexe F. Topologie des courbes algébriques	123
Annexe G. $w_1$ et $c_1$ classifient les fibrés en droites	126
Varia	129

## PLAN DU COURS. CONTEXTE

*Classes caractéristiques.* Le traitement est différent de celui que l'on retrouve dans les références standard.

Nous adoptons deux points de vue :

(i) axiomatique. Historiquement, celui-ci a été suggéré par Hirzebruch. Différentes approches sont présentées dans la littérature : [Milnor-Stasheff] utilisent une méthode due à Thom basée sur les carrés de Steenrod, [Bott-Tu] et [Husemoller] utilisent un point de vue dû à Grothendieck basé sur le principe de scindage et le théorème de Leray-Hirsch, qui met en jeu une certaine équation cohomologique.

Je donne un traitement complet qui suit l'approche de Borel ("La cohomologie mod 2 de certains espaces homogènes", *Comment. Math. Helv.* 27 (1953), 165–197) et qui évite l'utilisation des carrés de Steenrod et le principe de scindage. Les carrés de Steenrod sont des opérations fondamentales mais trop sophistiquées pour le but que nous avons en vue. Le principe de scindage peut paraître artificiel au premier abord, ainsi que l'équation cohomologique qui mène à la définition des classes caractéristiques.

Après avoir montré que les classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels sur une base donnée sont en bijection avec les classes d'homotopie d'applications vers les grassmanniennes, nous définissons les classes de Stiefel-Whitney et Chern comme tirés-en-arrière de certaines classes de cohomologie remarquables sur les grassmanniennes. Nous calculons à cet effet avec un minimum de technologie (théorème de Leray-Hirsch) la cohomologie de Grassmanniennes. Cette manière de mener le calcul inspirée de [Hatcher] évite en particulier la décomposition cellulaire de Schubert et remonte à Borel. D'un point de vue conceptuel, c'est la façon la plus directe de procéder. Les approches de Thom et Grothendieck apparaissent comme étant plus simples uniquement à condition que l'on connaisse les prérequis.

(ii) théorie de l'obstruction. Historiquement, c'est ce point de vue qui a guidé les travaux fondateurs de Stiefel, Whitney, Chern, Steenrod, et ceci pour la bonne raison qu'il met en avant la géométrie. Nous définissons non seulement les classes de Stiefel-Whitney et Chern de cette façon alternative, mais aussi la classe d'Euler. Le lecteur pourra comparer par exemple avec le traitement de [Husemoller, §18.7].

Ceci est une situation symptomatique pour une théorie qui est arrivée à l'apogée de son développement : une pluralité de points de vue qui s'éclairent réciproquement. Aucun n'est plus valeureux que l'autre, chacun est indispensable pour avoir une vue globale. L'on ne pense pas au point de vue de la théorie de l'obstruction lorsque l'on fait des calculs avec des classes de cohomologie ; néanmoins, sans ce point de vue

la théorie des classes caractéristiques reste abstraite et mystérieuse. À titre de comparaison : l'on ne pense pas à l'interprétation géométrique de l'intégrale de Riemann lorsque l'on fait une intégration par parties ; néanmoins, sans l'interprétation géométrique sous-jacente l'intégration serait dépourvue de sens.

*Homotopie et homologie.* Le point de vue de la théorie de l'obstruction nous force à rendre justice dans ce cours aux aspects homotopiques. En effet, nous parlons en égale mesure d'homotopie et d'homologie. Par ailleurs, l'une des conséquences agréables du fait d'avoir développé la théorie de l'obstruction est le fait de pouvoir énoncer et démontrer (à quelques détails près) le théorème fondamental qui relie homotopie et (co)homologie

$$[X, K(G, n)] \simeq H^n(X; G).$$

Nous démontrons par ailleurs le théorème de Hopf qui relie degré et  $\pi_n(S^n)$  par un argument différentiel, ou encore le théorème de Hurewicz par un argument de suite spectrale. Ceci amène les théorèmes de Whitehead et le théorème d'approximation cellulaire à portée du lecteur.

*CW-complexes et homologie cellulaire.* Un autre avantage du fait de développer la théorie de l'obstruction est que l'homologie cellulaire apparaît de manière frappante non seulement comme un outil de calcul puissant, mais aussi comme un outil conceptuel. De la même manière, le lecteur pourra expérimenter la portée du concept de CW-complexe, bien au-delà de la facilité de certains calculs homologiques.

*Topologie différentielle.* Nous avons fait un effort explicite dans la première partie du cours pour fournir des arguments de topologie différentielle là où cela était possible. Nous discutons en particulier des notions d'approximation lisse et souhaitons que le lecteur prenne conscience du fait que, dans l'étude de la topologie des variétés, les techniques différentielles ne sont en rien moins puissantes que les techniques topologiques.

*Dualité de Poincaré.* Nous n'avons pas inclus de détails ni pour la notion de classe fondamentale, ni pour la démonstration du théorème de dualité de Poincaré. Le livre de Hatcher contient un exposé limpide sur ces points. Par contre, nous avons donné de nombreux détails pour montrer comment la dualité de Poincaré et la théorie des classes caractéristiques s'illuminent réciproquement. Nous discutons en particulier la classe de Thom, la classe d'Euler, le produit d'intersection, et

nous donnons aussi un exemple emblématique de l'utilisation de notions développées dans ce cours pour un calcul d'homologie de variétés algébriques.

## 1. INTRODUCTION

**1.1. Définition d'un fibré vectoriel.** Un fibré vectoriel de rang  $k$  sur une variété  $B$  est la donnée d'une famille lisse d'espaces vectoriels de dimension  $k$  indexée par les points de  $B$  et qui est localement constante sur  $B$  ("localement triviale"). L'on travaillera avec des espaces vectoriels réels ou complexes, auquel cas on précisera parfois "fibré vectoriel réel" ou "fibré vectoriel complexe". L'on utilisera la notation  $\mathbb{K}$  pour désigner indistinctement les corps  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . La définition formelle est la suivante :

**Définition 1.1.** *Un fibré vectoriel de rang  $r$  sur une base  $B$  est la donnée d'une variété  $E$  munie d'une submersion  $\pi : E \rightarrow B$  telle que la condition suivante de trivialité locale soit satisfaite :*

*la base  $B$  admet un recouvrement ouvert  $(U_i)$  tel qu'il existe des difféomorphismes  $\Phi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{K}^r$  qui font commuter le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\Phi_i} & U_i \times \mathbb{K}^r \\ & \searrow \pi & \swarrow \text{pr}_1 \\ & & U_i \end{array}$$

*et tels que, pour tous  $i, j$ , le difféomorphisme*

$$\Phi_i \circ \Phi_j^{-1} : (U_i \cap U_j) \times \mathbb{K}^r \rightarrow (U_i \cap U_j) \times \mathbb{K}^r,$$

*est de la forme*

$$\Phi_i \circ \Phi_j^{-1}(p, v) = (p, \Phi_{ij}(p)v),$$

*avec*

$$\Phi_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \text{GL}_r(\mathbb{K})$$

*lisse.*

Dans la définition précédente, l'application  $\Phi_i \circ \Phi_j^{-1}$  est nécessairement de la forme  $(p, v) \mapsto (p, \Phi_{ij}(p)v)$ , avec  $\Phi_{ij} : (U_i \cap U_j) \times \mathbb{K}^r \rightarrow \mathbb{K}^r$  lisse. L'on demande à ce que cette dernière application soit un isomorphisme linéaire à  $p \in U_i \cap U_j$  fixé et on la note  $\Phi_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \text{GL}_r(\mathbb{K})$ .

**Terminologie.**  $E$  s'appelle *espace total du fibré*;  $B$  s'appelle *base du fibré*;  $\pi$  s'appelle *projection*;  $E_b := \pi^{-1}(b)$ ,  $b \in B$  s'appelle *la fibre au-dessus du point  $b$* ; les  $\Phi_i$  s'appellent *trivialisations locales*; les  $\Phi_{ij}$  s'appellent *applications de changement de trivialisation*. L'on note souvent un point de l'espace total par  $(b, v)$ , avec la signification  $v \in E_b$ .

Conséquences de la définition :

- (i) chaque fibre  $E_b$ ,  $b \in B$  possède une structure d'espace vectoriel de dimension  $r$  défini sur  $\mathbb{K}$ . En effet, l'on transporte la structure d'espace vectoriel de  $\mathbb{K}^r$  via une trivialisation locale  $\Phi_i$  au voisinage de  $b$ . Le fait que les applications de changement de



trivialisations soient des isomorphismes linéaires assure que cette structure d'espace vectoriel est indépendante du choix de  $\Phi_i$ .

Par contre, il est important de noter que la fibre  $E_b$  ne possède pas de base canonique. Si c'était le cas, tous les fibrés seraient isomorphes au fibré trivial  $B \times \mathbb{K}^r$ . Ceci n'est certainement pas vrai, comme nous allons le voir tout de suite.

(ii) la collection des  $\Phi_{ij}$  vérifie la “condition de 1-cocycle” :

$$\forall i, j, k, \quad \Phi_{ij}\Phi_{jk} = \Phi_{ik}, \quad \Phi_{ii} = \text{Id}.$$

Réciproquement, la donnée d'un recouvrement ouvert  $(U_i)$  de  $B$  et d'un 1-cocycle  $\{\Phi_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \text{GL}_r(\mathbb{K}) : i, j\}$  définit un fibré vectoriel de rang  $r$  sur  $\mathbb{K}$  dont les applications de changement de trivialisations sont données par ce même cocycle. De façon explicite l'on a

$$E = \bigsqcup_i U_i \times \mathbb{K}^r / \sim,$$

avec, pour  $(p, v) \in U_i \times \mathbb{K}^r$  et  $(q, w) \in U_j \times \mathbb{K}^r$ ,

$$(p, v) \sim (q, w) \quad \Leftrightarrow \quad p = q \quad \text{et} \quad v = \Phi_{ij}(p)w.$$

**Remarque.** Étant donnée une base  $B$  qui est une variété complexe, un *fibré holomorphe au-dessus de  $B$*  est un fibré complexe qui admet une structure de variété complexe pour laquelle les applications de trivialisations sont des biholomorphismes. De façon équivalente, les applications  $\Phi_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \text{GL}_r(\mathbb{C})$  qui constituent le cocycle de définition sont des applications holomorphes.

Attention : en règle générale, un fibré complexe sur une base  $B$  n'a rien d'holomorphe ! (par ailleurs, la base peut très bien être de dimension impaire).

## 1.2. Quatre motivations pour l'étude des fibrés vectoriels.

(I) *Le formalisme des fibrés vectoriels est le formalisme adapté pour décrire des objets de nature infinitésimale définis sur une variété.* Ou encore : tout fibré vectoriel peut être interprété comme la donnée d'informations supplémentaires de nature linéaire, c'est-à-dire infinitésimale, le long d'une variété.

Exemples :  $TB$ ,  $T^*B$ ,  $\Lambda^k T^*B$ .

Vous avez déjà rencontré les champs de vecteurs, les 1-formes différentielles, ou encore les  $k$ -formes différentielles. Tous ces objets sont clairement de nature infinitésimale et ils jouent un rôle important dans l'étude des variétés. Ce sont en particulier autant d'exemples de “sections de fibrés vectoriels”.

**Définition 1.2.** Une section d'un fibré vectoriel  $E \xrightarrow{\pi} B$  est une application lisse  $s : B \rightarrow E$  telle que  $s(b) \in E_b$  pour tout point  $b \in B$ . De façon équivalente,

$$\pi \circ s = \text{Id}_B.$$

Les champs de vecteurs sont les sections de  $TB$ . Les 1-formes différentielles sont les sections de  $T^*B$ . Les  $k$ -formes différentielles sont les sections de  $\Lambda^k T^*B$ .

L'ensemble des sections d'un fibré vectoriel possède une structure naturelle d'espace vectoriel : l'addition et la multiplication par des scalaires sont définies ponctuellement. On le note

$$\Gamma(E), \text{ ou } \Gamma(B, E).$$

Mieux même, l'espace  $\Gamma(E)$  est un module sur l'anneau  $\mathcal{F}(B)$  des fonctions lisses sur  $B$ . Le zéro de l'espace  $\Gamma(E)$  est la *section nulle*, notée souvent  $0_B$ , qui prend la valeur  $0 \in E_b$  en tout point de  $b \in B$ . Celle-ci définit un plongement canonique de  $B$  dans l'espace total du fibré  $E$  et justifie le dessin schématique par lequel on représente souvent un fibré vectoriel.

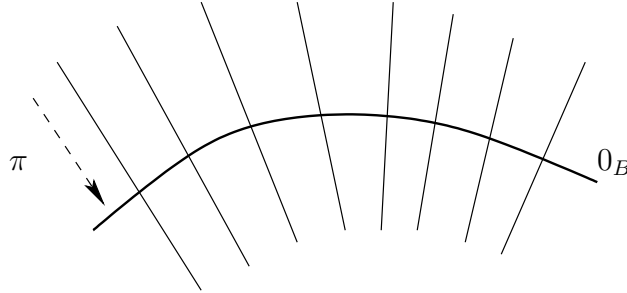


FIGURE 1

Le fait que les sections puissent être additionnées ponctuellement et aussi multipliées par des fonctions nous mène vers le point de vue suivant.

(II) *Les sections de fibrés peuvent souvent être interprétées comme des généralisations des fonctions définies sur la base  $B$ .*

L'exemple suivant est emblématique. Considérons l'espace projectif complexe  $\mathbb{C}P^n$  et le *fibré tautologique*

$$\mathcal{O}(-1) = \{(d, v) \in \mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}^{n+1} : v \in d\} \subset \mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}^{n+1}.$$

L'on vérifie que c'est un fibré holomorphe de rang 1 sur  $\mathbb{C}P^n$  dont la projection est donnée par  $(d, v) \mapsto d$ .

Étant donné un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $V$  l'on note  $V^* = \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K})$  son dual. Définissons aussi le *fibré hyperplan*

$$\mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(-1)^* = \{(d, \alpha) : \alpha \in d^*\}.$$

Posons aussi

$$\mathcal{O}(k) = \mathcal{O}(1)^{\otimes k}, \quad \mathcal{O}(-k) = \mathcal{O}(-1)^{\otimes k}, \quad k \geq 1$$

et

$$\mathcal{O}(0) = \mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}.$$

**Exercice.** Montrer que l'espace des sections *holomorphes* de  $\mathcal{O}(-k)$ ,  $k \geq 1$  est réduit à zéro. Montrer que l'espace des sections holomorphes de  $\mathcal{O}(k)$ ,  $k \geq 1$  s'identifie à l'espace des polynômes homogènes de degré  $k$  à coefficients complexes en  $n + 1$  variables. Montrer que l'espace des sections holomorphes de  $\mathcal{O}(0)$  est de dimension 1 (toute fonction holomorphe sur  $\mathbb{C}P^n$  est constante).

Autrement dit, alors que  $\mathbb{C}P^n$  n'admet que très peu de fonctions holomorphes (les fonctions constantes), certains fibrés holomorphes en droites sur  $\mathbb{C}P^n$  admettent de nombreuses sections.

**Exercice.** Estimer la dimension de l'espace des sections holomorphes de  $\mathcal{O}(k)$  lorsque  $k \rightarrow \infty$ .

(III) *Déformations infinitésimales.*

Dans l'exemple précédent nous avons implicitement utilisé les puissances tensorielles d'un fibré en droites. De façon générale, les opérations canoniques sur les espaces vectoriels et les isomorphismes canoniques entre espaces vectoriels peuvent être mis en famille et donc passent aux fibrés. Ici, par "canonique" l'on entend "qui ne fait pas intervenir de choix de base".

Exemples : étant donnés deux fibrés  $E$  et  $F$  sur la même base, l'on peut définir leur somme directe  $E \oplus F$ , leur produit tensoriel  $E \otimes F$ , leurs duaux  $E^*$ ,  $F^*$ , le fibré des homomorphismes  $\text{Hom}(E, F)$ , canoniquement isomorphe à  $E^* \otimes F$ . Étant donné un sous-fibré  $F \subset E$ , l'on peut définir le fibré quotient  $E/F$  etc.

**Exercice.** Décrire la présentation des fibrés ci-dessus par des cocycles, étant données des cocycles de définition pour  $E$  et  $F$ .

**Définition 1.3.** *Étant donné un fibré  $E$ , un sous-fibré de rang  $\ell$  est une sous-variété  $F \subset E$  telle que, pour tout  $b \in B$ ,  $F_b \subset E_b$  est un sous-espace vectoriel de rang  $\ell$ .*

**Exercice.** Montrer que  $F$  possède alors une structure naturelle de fibré vectoriel.

Le notion de fibré quotient apparaît très souvent en géométrie, notamment à travers la construction suivante.

**Définition 1.4.** *Soit  $M \subset N$  une sous-variété. Le fibré normal à  $M$  dans  $N$  est par définition*

$$\nu_N M = TN|_M / TM.$$

Ce fibré joue un rôle important pour comprendre la façon dont  $M$  est plongée dans  $N$  à travers le théorème suivant.

**Théorème 1.5** (Théorème du voisinage tubulaire, voir par exemple Bredon II.11, en particulier 11.4 et 11.14). *Soit  $M \subset N$  une sous-variété. Un voisinage de  $M$  dans  $N$  est difféomorphe à un voisinage de la section nulle dans  $\nu_N M$ . Le difféomorphisme peut être choisi de façon à ce qu'il coïncide sur  $M$  avec le plongement donné par la section nulle.*  $\square$

Voici deux exemples significatifs. L'on considère les deux plongements suivantes du cercle  $S^1$ .

(a)  $S^1 \subset S^2$ , le plongement du cercle en tant qu'équateur. Alors  $\nu_{S^2} S^1 \simeq S^1 \times \mathbb{R}$  est le fibré trivial. Un voisinage de  $S^1$  dans  $S^2$  est difféomorphe à un cylindre au-dessus de  $S^1$ .

(b)  $S^1 \simeq \mathbb{R}P^1 \subset \mathbb{R}P^2$ , le plongement du cercle en tant que droite à l'infini dans le plan projectif réel. L'on vérifie que l'action de  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  sur la paire  $(S^2, S^1)$ , dont le quotient est la paire  $(\mathbb{R}P^2, \mathbb{R}P^1)$ , détermine par linéarisation une action de  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  sur  $\nu_{S^2} S^1 \simeq S^1 \times \mathbb{R}$  dont l'élément non-trivial agit par l'application antipodale sur la base et par  $v \mapsto -v$  sur la fibre. Le quotient est le fibré  $\nu_{\mathbb{R}P^2} \mathbb{R}P^1$ . L'on vérifie que ce dernier est un fibré en droites réelles qui n'est pas trivial puisque toute section possède au moins un zéro. On l'appelle aussi *bande de Möbius*.

**Exercice.** Montrer que le fibré  $\nu_{\mathbb{R}P^2} \mathbb{R}P^1$  n'est pas trivial.

L'importance pratique du théorème de voisinage tubulaire est que, pour comprendre les "petites" déformations d'une sous-variété  $M$  à l'intérieur d'une variété  $N$ , il suffit de comprendre les déformations de la section nulle dans  $\nu_N M$ .

L'on a tout de suite une indication sur l'importance du problème de classification des fibrés de rang  $r$  donné sur une variété  $M$  donnée : il fournit en particulier la réponse à la question de comprendre quels sont les voisinages possibles des plongements de codimension  $r$  de  $M$ .

(IV) *Le langage des fibrés vectoriels est incontournable pour étudier les linéarisations d'équations d'origine géométrique.* Soient  $X, Y$  deux variétés et notons  $\mathcal{F}(X, Y)$  l'ensemble des applications lisses  $f : X \rightarrow Y$ . L'on pense à  $\mathcal{F}(X, Y)$  comme étant une variété de dimension infinie (modélisée sur un espace de Fréchet). Un candidat raisonnable pour l'espace tangent à  $\mathcal{F}(X, Y)$  en un point  $f$  est

$$T_f \mathcal{F}(X, Y) = \Gamma(f^*TY),$$

avec  $f^*TY$  le fibré tiré-en-arrière que nous définissons ci-dessous. En effet, en interprétant les vecteurs tangents à  $\mathcal{F}(X, Y)$  au point  $f$  comme des jets d'ordre 1 en 0 de courbes  $f_t, t \in ]-\epsilon, \epsilon[$ ,  $\epsilon > 0$  avec  $f_0 = f$ , l'on

identifie un tel vecteur tangent avec la famille de vecteurs tangents

$$\left\{ \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f_t(x) : x \in X \right\}.$$

Chaque vecteur tangent  $\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f_t(x)$  appartient à  $T_{f(x)}Y$ , et il s'ensuit que la famille toute entière peut être regardée comme une section d'un fibré sur  $X$  dont la fibre en un point  $x \in X$  est  $T_{f(x)}TY$ . Ceci est exactement la définition des sections du fibré tiré-en-arrière  $f^*TY$ .

**Définition 1.6.** Soit  $F \xrightarrow{\pi} Y$  un fibré et  $f : X \rightarrow Y$  une application lisse. L'on définit le fibré tiré-en-arrière par  $f$  comme

$$f^*F = \{(x, v) : x \in X, v \in F_{f(x)}\}.$$

**Exercice.** Montrer que  $f^*F$  est bien un fibré localement trivial sur  $X$ . La projection  $f^*F \rightarrow X$  associe à  $(x, v)$  le point  $x$ . Montrer que l'on a un diagramme commutatif

$$(1.1) \quad \begin{array}{ccc} f^*F & \longrightarrow & F \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y. \end{array}$$

dans lequel la flèche horizontale du haut est l'identité sur chaque fibre. Montrer que  $f^*F$  muni de cette flèche  $f^*F \rightarrow F$  est un objet final dans la catégorie des diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y, \end{array}$$

donnés par les morphismes de fibrés  $E \rightarrow F$  qui relèvent  $f$ . On dit aussi que (1.1) est un *carré cartésien*. Le fibré tiré-en-arrière peut être interprété comme un produit fibré (!), ou encore comme une "limite" au sens algébrique du terme.

Revenons maintenant aux équations de nature géométrique. Une telle équation peut souvent être mise sous la forme

$$\mathcal{S}(f) = 0,$$

avec  $\mathcal{S}$  une section d'un certain fibré

$$\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}(X, Y).$$

Typiquement la fibre  $\mathcal{E}_f$  est de dimension infinie. L'on s'intéresse à la linéarisation

$$d\mathcal{S}(f) : T_f\mathcal{F}(X, Y) \rightarrow T_{(f,0)}\mathcal{E}$$

en un zéro de  $\mathcal{S}$ , c'est-à-dire en un point  $f$  tel que  $\mathcal{S}(f) = (f, 0)$ .

**Exercice.** Soit  $E \rightarrow B$  un fibré vectoriel. Montrer que, pour tout  $b \in B$ , l'on a un isomorphisme canonique

$$T_{(b,0)}E \simeq T_bB \oplus E_b.$$

Soit  $s : B \rightarrow E$  une section lisse et  $b \in B$  un zéro de  $s$ , à savoir un point tel que  $s(b) = (b, 0)$ . Montrer que, lue à travers l'isomorphisme précédent, la différentielle de  $s$  au point  $b$  agit comme

$$ds(b) = (\text{Id}_{T_bB}, ds^{\text{vert}}(b)) : T_bB \rightarrow T_bB \oplus E_b,$$

avec

$$ds^{\text{vert}}(b) : T_bB \rightarrow E_b$$

une application linéaire.

L'on dit que  $s$  est transverse à la section nulle si  $ds^{\text{vert}} : T_bB \rightarrow E_b$  est surjective pour tout zéro  $b$  de  $s$ . Montrer que cette condition est équivalente à

$$T_bB + T_{(b,0)}\text{im}(s) = T_{(b,0)}E.$$

**Exercice 1.** Soit  $M$  une variété et  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction lisse. Montrer que la section  $df \in \Gamma(T^*M)$  est transverse à la section nulle si et seulement si  $f$  est une fonction de Morse.

Revenons à nouveau au contexte fonctionnel. Soit  $f \in \mathcal{F}(X, Y)$  un zéro de  $\mathcal{S}$ . La différentielle  $d\mathcal{S}(f)$  est donc uniquement déterminée par

$$d\mathcal{S}^{\text{vert}} : T_f\mathcal{F}(X, Y) \rightarrow \mathcal{E}_f.$$

En pratique la fibre  $\mathcal{E}_f$  est elle-même décrite comme espace de sections d'un certain fibré vectoriel et l'opérateur  $d\mathcal{S}^{\text{vert}}(f)$  est un opérateur linéaire et continu par rapport à un choix approprié de normes.

**Exemple.** Soit  $(\Sigma, j)$  une surface de Riemann, c'est-à-dire une variété complexe de dimension 1, pour laquelle on note la structure complexe par  $j$ . Ainsi  $j \in \Gamma(\text{End}(TS))$ ,  $j^2 = -\text{Id}$ . Soit  $(Y, J)$  une variété complexe, pour laquelle on note  $J$  la structure complexe, de sorte que  $J \in \Gamma(\text{End}(TY))$ ,  $J^2 = -\text{Id}$ . Considérons le problème de trouver des applications holomorphes parmi les applications lisses

$$f : \Sigma \rightarrow Y.$$

Le fait que la différentielle  $df$  d'une telle application soit  $\mathbb{C}$ -linéaire en tout point, c'est-à-dire qu'elle vérifie  $df \circ j = J \circ df$ , est équivalent à l'annulation de l'expression

$$\bar{\partial}f := df + J \circ df \circ j$$

en tout point de  $\Sigma$ . Notons que  $\bar{\partial}f \in \Gamma(\text{Hom}^{0,1}(T\Sigma, f^*TY))$ , le fibré des homomorphismes  $\mathbb{R}$ -linéaires et  $\mathbb{C}$ -anti-linéaires de  $T\Sigma$  dans  $f^*TY$ , encore noté  $\Omega^{0,1}(\Sigma, f^*TY)$ . L'équation des courbes holomorphes définies sur  $\Sigma$  à valeurs dans  $Y$  est donc

$$\bar{\partial}f = 0,$$

avec  $\bar{\partial}$  interprétée comme section d'un fibré (de rang infini)  $\mathcal{E}$  au-dessus de  $\mathcal{F}(\Sigma, Y)$  dont la fibre est donnée par

$$\mathcal{E}_f = \Omega^{0,1}(\Sigma, f^*TY).$$

La linéarisation de  $\bar{\partial}$  en un zéro  $f$  est donc déterminée par l'opérateur

$$d\bar{\partial}^{vert}(f) : \Gamma(f^*TY) \rightarrow \Gamma(\text{Hom}^{0,1}(T\Sigma, f^*TY)).$$

L'on peut bien évidemment expliciter cet opérateur, par exemple en coordonnées locales. Il se trouve qu'il est elliptique et donc de Fredholm lorsqu'on le fait agir entre des complétions de Sobolev appropriées. Ses propriétés déterminent les propriétés locales de l'espace des courbes holomorphes  $\Sigma \rightarrow Y$ .

## 2. CLASSIFICATION DES FIBRÉS. HOMOTOPIE

La question que nous posons maintenant est celle de classifier les classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels de rang  $k$  donné sur une base donnée. Nous allons voir que celles-ci forment un ensemble discret qui peut être mis en bijection avec certains ensembles de classes d'homotopie d'applications.

Rappelons qu'un isomorphisme entre deux fibrés  $E, F$  sur une même base  $B$  est un difféomorphisme  $E \rightarrow F$  qui commute avec les projections et réalise un isomorphisme linéaire  $E_b \rightarrow F_b$  entre les fibres au-dessus de tout point  $b \in B$ . Les isomorphismes de fibrés sont les isomorphismes dans la catégorie des fibrés au-dessus de  $B$ , dont les morphismes sont les applications lisses  $E \rightarrow F$  qui commutent avec les projections et qui sont linéaires en restriction à chaque fibre.

**2.1. Classification des fibrés vectoriels sur les sphères.** Le cas particulier où la base est une sphère fait déjà apparaître les notions clé qui permettent de comprendre le cas général.

**Théorème 2.1.** *Soient  $k \geq 1, n \geq 1$ . L'ensemble*

$$\mathcal{Vect}_k^{\mathbb{K}}(S^n)$$

*des classes d'isomorphisme de fibrés de rang  $k$  sur  $\mathbb{K}$  au-dessus de la sphère  $S^n$  sont en correspondance bijective avec*

$$\pi_{n-1}(\mathrm{GL}_k(\mathbb{K}))/\pi_0(\mathrm{GL}_k(\mathbb{K})).$$

*Ici  $\pi_{n-1}(\mathrm{GL}_k(\mathbb{K}))$  désigne le  $(n-1)$ -ème groupe d'homotopie du groupe linéaire  $\mathrm{GL}_k(\mathbb{K})$ , à savoir les classes d'homotopie d'applications à point base  $(S^{n-1}, *) \rightarrow (\mathrm{GL}_k(\mathbb{K}), \mathrm{Id})$ . L'action du groupe  $\pi_0(\mathrm{GL}_k(\mathbb{K}))$  sur l'ensemble  $\pi_{n-1}(\mathrm{GL}_k(\mathbb{K}))$  est induite par l'action de  $\mathrm{GL}_k(\mathbb{K})$  sur lui-même par conjugaison.*

**Remarque préliminaire concernant l'action de  $\pi_0$  sur  $\pi_{n-1}$ .** Pour tout groupe de Lie  $G$ , l'ensemble  $\pi_0(G)$  est l'ensemble des composantes connexes de  $G$  et possède une structure de groupe canonique induite par la multiplication dans  $G$ . Pour un espace topologique  $X$  l'ensemble  $\pi_0(X)$  est l'ensemble des composantes connexes par arcs de  $X$ , mais il ne possède pas en général une structure de groupe. Pour un groupe de Lie, et plus généralement pour une variété, les composantes connexes coïncident avec les composantes connexes par arcs.

Tout groupe de Lie  $G$  agit sur lui-même par conjugaison via la représentation adjointe  $G \mapsto \mathrm{Diff}(G)$ ,  $g \mapsto \iota_g, \iota_g(h) = ghg^{-1}$ . Chacun des difféomorphismes  $\iota_g$  préserve la composante connexe de l'identité. Pour deux éléments  $g, g'$  appartenant à la même composante connexe de  $G$  les applications  $\iota_g$  et  $\iota_{g'}$  sont homotopes en tant qu'applications



préservant le point base donné par l'élément neutre  $e \in G$ . Ainsi  $\pi_0(G)$  agit sur tous les groupes d'homotopie d'ordre supérieur  $\pi_i(G, e)$ ,  $i \geq 1$ . Cette action est bien-sûr triviale si  $G$  est connexe.

L'on a en particulier

$$\pi_{n-1}(\mathrm{GL}_k(\mathbb{C}))/\pi_0(\mathrm{GL}_k(\mathbb{C})) \simeq \pi_{n-1}(\mathrm{GL}_k(\mathbb{C}))$$

puisque  $\mathrm{GL}_k(\mathbb{C})$  est connexe.

L'on a aussi

$$\pi_{n-1}(\mathrm{GL}_k(\mathbb{R}))/\pi_0(\mathrm{GL}_k(\mathbb{R})) \simeq \pi_{n-1}(\mathrm{GL}_k(\mathbb{R}))$$

pour  $k$  impair. Mais en général l'action de  $\pi_0(\mathrm{GL}_k(\mathbb{R})) \simeq \{\pm 1\}$  n'est pas triviale lorsque  $k$  est pair. L'on renvoie à une discussion plus détaillée à la fin de cette section.

*Démonstration.* Nous allons décrire une bijection explicite

$$\mathcal{R} : \mathcal{V}ect_k^{\mathbb{K}}(S^n) \rightarrow \pi_{n-1}(\mathrm{GL}_k(\mathbb{K}))/\pi_0(\mathrm{GL}_k(\mathbb{K})).$$

(L'on utilise la notation  $\mathcal{R}$  pour signifier que l'élément  $\mathcal{R}(E)$  décrit  $E$  comme "Recollement" de deux fibrés triviaux sur des boules de dimension  $n$ .)

Écrivons la sphère comme union de deux hémisphères

$$S^n = D_+^n \cup D_-^n, \quad D_+^n \cap D_-^n = S^{n-1}$$

et fixons un point  $p$  sur l'équateur  $S^{n-1}$ . Fixons aussi un isomorphisme linéaire  $E_p \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}^k$ .

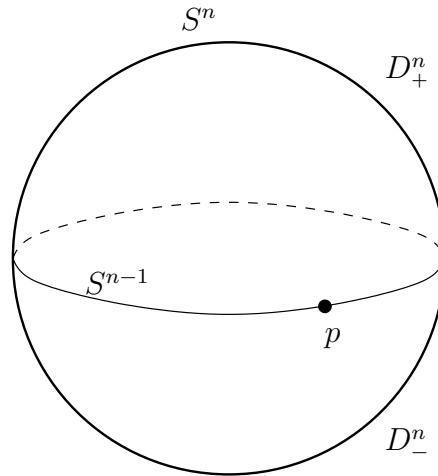


FIGURE 2

Nous démontrons l'affirmation suivante comme cas particulier d'un résultat plus général (Corollaire 2.8), après la preuve.

*Affirmation No. 1 :* Le fibré  $E$  est trivial en restriction à  $D_{\pm}^n$ .  $\square$

Après composition au but par des éléments appropriés de  $\mathrm{GL}_k(\mathbb{K})$ , nous obtenons des trivialisations

$$\Phi_{\pm} : E|_{D_{\pm}^n} \xrightarrow{\sim} D_{\pm}^n \times \mathbb{K}^k$$

qui coïncident avec l'isomorphisme fixé au-dessus du point  $p$ . En restriction à  $S^{n-1}$  l'on obtient une application

$$\Phi = \Phi_+ \circ \Phi_-^{-1} : S^{n-1} \rightarrow \mathrm{GL}_k(\mathbb{K}), \quad \Phi(p) = \mathrm{Id}$$

et l'on définit

$$\mathcal{R}(E) := [\Phi],$$

la classe sous l'action de  $\pi_0(\mathrm{GL}_k(\mathbb{K}))$  de la classe d'homotopie de  $\Phi$ .

Pour montrer la bonne définition de l'application  $\mathcal{R}$  il s'agit de montrer que la classe d'homotopie de  $\Phi$  est indépendante du choix des trivialisations  $\Phi_{\pm}$ , ainsi que du choix de l'isomorphisme  $E_p \simeq \mathbb{K}^k$ . En effet, lorsque l'on choisit deux trivialisations différentes  $\Psi_{\pm}$ , l'on peut écrire en restriction à  $S^{n-1}$

$$\Psi_+ \Psi_-^{-1} = (\Psi_+ \Phi_+^{-1}) \Phi_+ \Phi_-^{-1} (\Phi_- \Psi_-^{-1}).$$

Mais  $\Psi_+ \Phi_+^{-1} : S^{n-1} \rightarrow \mathrm{GL}_k(\mathbb{K})$  est une application qui admet par définition une extension à  $D_+^n$ , donc nulle homotope. Il en est de même pour  $\Phi_- \Psi_-^{-1}$  et l'on conclut que  $\Psi_+ \Psi_-^{-1}$  est homotope à  $\Phi_+ \Phi_-^{-1}$ .

Lorsque l'on change l'isomorphisme  $\alpha : E_p \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}^k$  en  $\beta : E_p \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}^k$ , à partir de deux trivialisations  $\Phi_{\pm}$  qui coïncident avec  $\alpha$  au-dessus du point  $p$  l'on peut considérer les trivialisations  $(\beta\alpha^{-1})\Phi_{\pm}$  qui coïncident avec  $\beta$  au-dessus du point  $p$ . Alors  $\Phi_+ \Phi_-^{-1}$  change par conjugaison avec  $\beta\alpha^{-1}$ . La classe de (la classe d'homotopie de)  $\Phi$  sous l'action de  $\pi_0(\mathrm{GL}_k(\mathbb{K}))$  ne change donc pas.

La conclusion de cette discussion est que la valeur de  $\mathcal{R}(E)$  ne dépend bien que de la classe d'isomorphisme du fibré  $E$ .

L'application  $\mathcal{R}$  est surjective. En effet, étant donnée une classe de  $\pi_{n-1}(\mathrm{GL}_k(\mathbb{K}))$  représentée par  $\Phi : S^{n-1} \rightarrow \mathrm{GL}_k(\mathbb{K})$  avec  $\Phi(p) = \mathrm{Id}$ , l'on définit un fibré  $E$  tel que  $\mathcal{R}(E) = [\Phi]$  par

$$E = D_+^n \times \mathbb{K}^k \sqcup D_-^n \times \mathbb{K}^k / \sim$$

où, pour  $(q, v) \in D_+^n \times \mathbb{K}^k$  et  $(q', v') \in D_-^n \times \mathbb{K}^k$ , l'on a

$$(q, v) \sim (q', v') \quad \Leftrightarrow \quad q = q' \text{ et } v = \Phi(q)v'.$$

L'application  $\mathcal{R}$  est injective. Soient  $E_0, E_1$  deux fibrés de rang  $k$  et construisons des applications  $\Phi_i : S^{n-1} \rightarrow \mathrm{GL}_k(\mathbb{K})$ ,  $i = 0, 1$  comme ci-dessus, avec  $\Phi_i(p) = \mathrm{Id}$ . Il s'agit de montrer que, si les classes  $[\Phi_0]$  et  $[\Phi_1]$  sont égales, alors les fibrés  $E_0$  et  $E_1$  sont isomorphes. Dans le cas  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  les applications  $\Phi_0$  et  $\Phi_1$  sont homotopes. Dans le cas  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , quitte à composer au but l'isomorphisme linéaire  $E_p \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^k$  qui

détermine  $\Phi_1$  par un automorphisme linéaire de  $\mathbb{R}^k$  qui change l'orientation, l'on peut supposer sans perte de généralité que les applications  $\Phi_0$  et  $\Phi_1$  sont homotopes.

La construction précédente peut alors être mise en famille : une homotopie  $\Phi_t$ ,  $t \in [0, 1]$  entre  $\Phi_0$  et  $\Phi_1$  détermine un fibré  $\mathcal{E}$  au-dessus de  $S^n \times [0, 1]$ , avec  $\mathcal{E}|_{S^n \times \{0\}} \simeq E_0$  et  $\mathcal{E}|_{S^n \times \{1\}} \simeq E_1$  par construction. La conclusion découle alors de l'affirmation suivante, qui sera aussi démontrée plus bas (cf. preuve du Corollaire 2.7).

*Affirmation No. 2 :* Soit  $B$  une variété et  $\mathcal{E}$  un fibré sur  $B \times [0, 1]$ . Pour tout  $t \in [0, 1]$  les fibrés  $\mathcal{E}|_{B \times \{t\}} \rightarrow B$  sont isomorphes.

□

La preuve fait apparaître plusieurs phénomènes importants :

**(I) Fibrés vectoriels et homotopie.** Tout fibré vectoriel sur une boule est trivial (Affirmation No. 1). Plus généralement, tout fibré sur le produit d'une variété avec un intervalle est isomorphe au tiré-en-arrière d'un certain fibré sur la variété en question par la projection (Affirmation No. 2, légèrement reformulée). De façon plus générale, *il existe un lien étroit entre classes d'homotopie d'applications, ou encore type d'homotopie d'espaces, et classes d'isomorphisme de fibrés.*

**(II) Groupes d'homotopie d'ordre supérieur.** L'énoncé du théorème 2.1 met en évidence de façon naturelle les groupes d'homotopie de  $GL_k(\mathbb{K})$ . L'on peut se douter que, de façon plus générale, *les groupes d'homotopie des groupes linéaires jouent un rôle important dans la classification des fibrés vectoriels sur une base quelconque.*

Toute tentative de classification dans une situation concrète nécessite des outils de calcul de ces groupes d'homotopie. Nous allons expliciter plus bas la structure de groupe de ces derniers. L'exercice suivant se posera alors comme une question naturelle au lecteur.

**Exercice 2.** Pour  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  décrire de façon directe la structure de groupe induite sur  $\mathcal{Vect}_k^{\mathbb{C}}(S^n)$  par la bijection  $\mathcal{R}$ , sans se référer à la structure de groupe de  $\pi_{n-1}(GL_k(\mathbb{C}))$ . Discuter le cas  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ .

**(III) Décompositions cellulaires.** Dans la preuve du théorème 2.1 il a été utile de décomposer la sphère comme union de deux boules recollées le long de leur bord, et ce qui a permis d'avancer dans la preuve a été le fait que la restriction de tout fibré à une boule est triviale (Affirmation No. 1). De façon plus générale, *dans un problème de classification de fibrés vectoriels sur une base quelconque il sera utile de considérer des "décompositions cellulaires" de la base, c'est-à-dire de la présenter comme union de boules (de différentes dimensions, collées le long de leur bord "de façon ordonnée").*

Nous allons reprendre chacun de ces trois thèmes par la suite.

**Remarque-Exercice (action de  $\pi_0$  sur  $\pi_{n-1}$ ).** Rappelons que le groupe de Lie  $\mathrm{GL}_k(\mathbb{R})$  a exactement deux composantes connexes, que l'on note  $\mathrm{GL}_k^\pm(\mathbb{R})$  et qui sont distinguées par le signe du déterminant.

Le fait que l'action de  $\pi_0(\mathrm{GL}_k(\mathbb{R}))$  sur  $\pi_{n-1}(\mathrm{GL}_k(\mathbb{R}))$  est triviale pour  $k$  impair se justifie ainsi : la matrice diagonale  $\mathrm{diag}(-1, -1, \dots, -1)$  appartient en même temps à  $\mathrm{GL}_k^-(\mathbb{R})$  et au centre de  $\mathrm{GL}_k(\mathbb{R})$ , de sorte qu'elle induit par conjugaison l'identité de  $\mathrm{GL}_k(\mathbb{R})$ .

Noter aussi que l'action de  $\pi_0(\mathrm{GL}_k(\mathbb{R}))$  sur lui-même induite par la conjugaison dans  $\mathrm{GL}_k(\mathbb{R})$  est triviale.

Lorsque  $k$  est pair, l'action de  $\pi_0(\mathrm{GL}_k(\mathbb{R}))$  sur  $\pi_{n-1}(\mathrm{GL}_k(\mathbb{R}))$ ,  $n-1 \geq 1$  peut être non triviale, comme le montre l'exemple suivant.

Rappelons que le procédé de Gram-Schmidt peut être interprété comme réalisant un difféomorphisme

$$\mathrm{GL}_k(\mathbb{R}) \simeq O(k) \times T_k,$$

avec  $T_k$  l'espace des matrices  $k \times k$  triangulaires supérieures ayant des coefficients positifs sur la diagonale. Il s'ensuit que  $\mathrm{GL}_k(\mathbb{R})$  se rétracte sur  $O(k)$  et l'inclusion  $SO(k) \hookrightarrow \mathrm{GL}_k^+(\mathbb{R})$  induit un isomorphisme sur tous les groupes d'homotopie.

Considérons  $k = 2$ ,  $n = 2$ . Nous obtenons

$$\pi_1(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})) \simeq \pi_1(SO(2)) \simeq \pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$$

et un générateur est donné par le lacet de rotations

$$\gamma : \theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

La conjugaison par la matrice  $\mathrm{diag}(-1, 1) \in \mathrm{GL}_2^-(\mathbb{R})$  fournit le lacet

$$\bar{\gamma} : \theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Celui-ci représente l'autre générateur de  $\pi_1(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})) \simeq \mathbb{Z}$ , puisque  $\bar{\gamma}(\theta) = \gamma(-\theta)$ .

Si l'on identifie  $\pi_1(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}))$  à  $\mathbb{Z}$  via  $\gamma \mapsto 1$ , alors

$$\pi_1(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}))/\pi_0(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})) \simeq \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Montrer que les fibrés  $\mathcal{O}(k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  sur  $\mathbb{C}P^1 \simeq S^2$  forment un système complet de représentants pour  $\mathrm{Vect}_1^{\mathbb{C}}(S^2) \simeq \pi_1(\mathrm{GL}_1(\mathbb{C})) = \pi_1(\mathbb{C}^*) \simeq \pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$ . À quel générateur correspond  $\mathcal{O}(1)$ ? Remarquer le fait que  $\mathcal{O}(-k) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}(k), \mathbb{C})$ , le dual de  $\mathcal{O}(k)$  en tant que fibré complexe.

Soit  $E$  un fibré complexe. Montrer que le fibré réel sous-jacent à son dual complexe est isomorphe au dual réel du fibré réel sous-jacent à  $E$ .

Montrer que tout fibré réel est isomorphe à son dual.

Ainsi  $\mathcal{O}(-k)$  et  $\mathcal{O}(k)$  sont isomorphes en tant que fibrés réels, ce qui reflète précisément le fait que l'action de  $\pi_0(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}))$  sur  $\pi_1(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}))$  n'est pas triviale : elle identifie  $\mathcal{O}(-k)$  à  $\mathcal{O}(k)$ .

**2.2. Notions de topologie différentielle.** Cette section traite de connexions linéaires, d'approximation de fonctions continues par des fonctions lisses, et de transversalité, avec la mise en évidence de certaines applications importantes en théorie de l'homotopie.

*2.2.1. Rappels sur les connexions.* Le fait de travailler avec des fibrés vectoriels lisses sur des variétés présente comme avantage la possibilité d'utiliser les connexions linéaires. De façon intuitive, une connexion sur un fibré est une donnée supplémentaire qui permet de se déplacer depuis une fibre vers les fibres voisines. Autrement dit, c'est un moyen de "connecter" les fibres voisines. Le lecteur est invité à noter le fait qu'un tel mouvement n'est pas canoniquement défini dans un fibré "nu".

Nous discutons dans cette section les connexions en adoptant le point de vue des dérivées covariantes, et nous renvoyons le lecteur à l'Annexe A pour des compléments en lien avec la notion de distribution horizontale. Les Corollaires 2.7 et 2.8 ci-dessous démontrent en particulier les Affirmations 1 et 2 de la preuve précédente.

**Notation.** Étant donné un fibré  $E$  sur une base  $B$  et un entier  $k \geq 0$ , l'on note

$$\Omega^k(B, E) = \Gamma(\Lambda^k T^*B \otimes E)$$

l'espace des  $k$ -formes sur  $B$  à valeurs dans  $E$ . Ce sont les familles lisses d'applications  $k$ -multilinéaires alternées  $T_p B \times \cdots \times T_p B \rightarrow E_p$ ,  $p \in B$ . L'on a par définition  $\Omega^0(B, E) = \Gamma(E)$ .

**Définition 2.2.** Une connexion linéaire est une application  $\mathbb{R}$ -linéaire

$$\nabla : \Gamma(E) \rightarrow \Omega^1(B, E)$$

(lue "nabla") qui vérifie la règle de Leibniz

$$\nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla s, \quad f \in \mathcal{F}(B).$$

Autrement dit, une connexion linéaire est une dérivation sur  $\Gamma(E)$  par rapport à sa structure de  $\mathcal{F}(B)$ -module. De façon explicite, pour tout champ de vecteurs  $X \in \mathcal{X}(B)$ , l'on a  $\nabla_X s \in \Gamma(E)$  et

$$\nabla_X(fs) = df(X)s + f\nabla_X s, \quad \nabla_{fX}s = f\nabla_X s.$$

**Lemme 2.3.** La valeur de  $\nabla_X s$  en un point  $p \in B$  ne dépend que de la valeur de  $X(p)$  et des valeurs de  $s$  au voisinage de  $p$  le long d'une courbe tangente à  $X(p)$ .

*Démonstration.* Montrons que, pour  $s$  fixée, la valeur  $\nabla_X s|_p$  ne dépend que de  $X(p)$ . Montrons d'abord que celle-ci ne dépend que du germe de  $X$  en  $p$  : soit  $f \in \mathcal{F}(B)$  avec  $f(p) = 1$  et à support dans un voisinage  $U$  fixé de  $p$  ; alors  $\nabla_{fX}s|_p = f(p)\nabla_X s|_p = \nabla_X s|_p$ , ce qui prouve que cette dernière quantité ne dépend que de  $X|_U$ . Montrons maintenant que  $\nabla_X s|_p$  ne dépend que de  $X(p)$ . Par linéarité en  $X$  il suffit de montrer

que  $\nabla_X s|_p = 0$  si  $X(p) = 0$ . Par ce qui précède l'on peut supposer que  $X$  est à support compact dans un ouvert de carte  $(x^1, \dots, x^n)$  dans  $B$ , sur lequel on peut écrire  $X = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$  avec  $X^i$  des fonctions qui s'annulent en  $p$ . Quitte à multiplier par une fonction de troncature supportée dans l'ouvert de carte et égale à 1 sur le support de  $X$ , l'on peut étendre les  $\frac{\partial}{\partial x^i}$  en des champs de vecteurs sur  $B$  pour lesquels on a encore  $X = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ , et finalement  $\nabla_X s|_p = \sum_{i=1}^n X^i(p) \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} s|_p = 0$ .

Montrons maintenant que, à  $X(p)$  fixé, la valeur  $\nabla_X s|_p$  ne dépend que des valeurs de  $s$  au voisinage de  $p$  le long d'une courbe tangente à  $X(p)$ . Un argument semblable à celui du paragraphe précédent montre que  $\nabla_X s|_p$  ne dépend que du germe de  $s$  en  $p$  : l'on considère une fonction  $f \in \mathcal{F}(B)$  avec  $f(p) = 1$  et à support dans un voisinage  $U$  fixé de  $p$ , pour laquelle on obtient  $\nabla_X(fs)|_p = X_p(f)s(p) + f(p)\nabla_X s|_p = \nabla_X s|_p$ . L'on peut donc supposer sans perte de généralité que  $s$  est à support compact dans un ouvert de trivialisatation  $U$  pour  $E$ . En notant  $(e_1, \dots, e_k)$  un repère local sur  $U$ , que l'on peut étendre en un système de  $k$  sections globales de  $E$  en multipliant par une fonction de troncature égale à 1 sur le support de  $s$ , l'on peut écrire  $s = \sum_{i=1}^k s^i e_i$  avec  $s^i$  des fonctions à support compact. L'on obtient alors

$$\nabla_X s|_p = \sum_{i=1}^k X_p(s^i) e_i(p) + s^i(p) \nabla_X e_i.$$

La conclusion en découle puisque les quantités  $X_p(s^i)$ ,  $i = 1, \dots, k$  ne dépendent que des valeurs des  $s^i$  au voisinage de  $p$  le long d'une courbe tangente à  $X(p)$ .  $\square$

Soit  $\gamma : I \rightarrow B$  une courbe lisse avec  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle. Une *section de  $E$  le long de  $\gamma$*  est une courbe lisse  $s : I \rightarrow E$  telle que  $\pi \circ s = \gamma$ ; de façon équivalente, c'est une section de  $\gamma^* E$ . Le lemme précédent et sa preuve suggèrent la définition suivante.

**Proposition-Définition 2.4** (cf. Gallot-Hulin-Lafontaine 2.68). *Il existe un unique opérateur*

$$\nabla_t : \Gamma(\gamma^* E) \rightarrow \Gamma(\gamma^* E)$$

*qui vérifie les conditions suivantes :*

(i) *pour toute fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et toute section  $s \in \Gamma(\gamma^* E)$ , l'on a*

$$\nabla_t(fs)|_t = f'(t)s(t) + f(t)\nabla_t s|_t.$$

(ii) *si  $s \in \Gamma(\gamma^* E)$  est la restriction à l'image de  $\gamma$  d'une section  $\tilde{s}$  définie sur un voisinage, alors*

$$\nabla_t s|_t = \nabla_{\dot{\gamma}(t)} \tilde{s}|_{\gamma(t)}.$$

$\square$

L'on appelle l'opérateur  $\nabla_t$  *dérivée covariante le long de  $\gamma$* . L'on renvoie à *loc. cit.* pour les détails de la preuve et nous donnons ici simplement la définition de  $\nabla_t$  : étant donné un repère local  $(e_1, \dots, e_k)$  au voisinage de  $\gamma(t)$ , l'on écrit  $s = \sum_{i=1}^k s^i(t)e_i(\gamma(t))$  et l'on pose

$$\nabla_t s|_t = \sum_{i=1}^k \frac{ds^i}{dt} e_i(\gamma(t)) + s^i(t) \nabla_{\dot{\gamma}(t)} e_i|_{\gamma(t)}.$$

L'un des points qu'il faut retenir de cette définition est que, alors même qu'une section de  $E$  le long de  $\gamma$  peut ne pas provenir d'une section définie au voisinage (par exemple si  $\gamma$  est constante et  $s$  ne l'est pas), néanmoins elle peut toujours s'écrire localement en  $t$  comme combinaison linéaire à coefficients dépendant de  $t$  de sections qui sont définies au voisinage de  $\gamma$ .

**Exercice 3.** Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application lisse et  $E$  un fibré sur  $Y$ . Montrer que toute connexion sur  $E$  induit naturellement une connexion sur  $f^*E$ . Montrer que la dérivée covariante  $\nabla_t$  le long d'une courbe  $\gamma$  est la connexion induite par  $\nabla$  sur  $\gamma^*E$ .

**Définition 2.5.** Une section  $s$  définie le long d'une courbe  $\gamma$  est dite horizontale si

$$\nabla_t s = 0.$$

**Proposition-Définition 2.6.** Soit  $\gamma : I \rightarrow B$  une courbe lisse. Pour tout  $v \in E_{\gamma(t_0)}$  il existe une unique section horizontale  $s_v$  définie le long de  $\gamma$  telle que  $s_v(t_0) = v$ .

L'application

$$\tau_{t_0, t_1}^\gamma : E_{\gamma(t_0)} \rightarrow E_{\gamma(t_1)}, \quad v \mapsto s_v(t_1)$$

est un isomorphisme linéaire. On l'appelle transport parallèle le long de  $\gamma$ .

Avant de donner la preuve de cette proposition importante, faisons quelques remarques préliminaires.

**Remarques.**

(1) L'espace des connexions sur un fibré  $E$  donné est un espace affine sur  $\Omega^1(B, \text{End}(E))$ . En effet, l'on vérifie sans peine que la différence de deux connexions est bien un élément de  $\Omega^1(B, \text{End}(E))$  par un argument similaire à ceux du lemme 2.3 en utilisant le fait que cette différence est  $\mathcal{F}(B)$ -linéaire en  $s$ .

(2) L'espace des connexions sur un fibré  $E$  est non-vide. En effet, il existe toujours une connexion sur la restriction de  $E$  à un ouvert  $U$  de trivialisations : les sections de  $E|_U$  s'identifient aux fonctions  $U \rightarrow \mathbb{K}^k$  et la différentielle des fonctions détermine la connexion "triviale"

$$d_X(s^1, \dots, s^k) := (ds^1 \cdot X, \dots, ds^k \cdot X).$$



Sur une variété quelconque, l'on considère un recouvrement  $(U_i)$  par des ouverts de trivialisations, une partition de l'unité subordonnée  $(\rho_i)$ , une collection de connexions  $\nabla^i$  sur  $E|_{U_i}$ , et l'on construit une connexion globale par la formule

$$\nabla_X s := \sum_i \nabla_{X|_{U_i}}^i (\rho_i s) = \sum_i \rho_i \nabla_{X|_{U_i}}^i s.$$

*Démonstration de la Proposition 2.6.* Plaçons-nous sur un ouvert  $U$  de trivialisations au voisinage de  $\gamma(t_0)$  et considérons  $t_1$  tel que  $\gamma([t_0, t_1]) \subset U$ . Soit  $d$  la connexion triviale sur  $E|_U$  et écrivons  $\nabla = d - A$ , avec  $A \in \Omega^1(U, \text{End}(E))$ . L'on vérifie alors à partir de la définition que

$$\nabla_t s = d_t s - (A(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t))(s).$$

Si l'on identifie  $s$  à un vecteur de fonctions  $s = (s^1, \dots, s^k) : I \rightarrow \mathbb{K}^k$ , alors  $d_t s = \frac{ds}{dt}$ . Ainsi  $s$  est horizontale si et seulement si elle vérifie l'équation différentielle *linéaire*

$$\frac{ds}{dt} = (A(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)) \cdot s.$$

L'on conclut par le fait que le flot d'une équation différentielle linéaire est une famille d'isomorphismes linéaires. Ceci achève la preuve lorsque  $t_1$  est proche de  $t_0$ . Pour  $t_1$  arbitraire l'on découpe l'intervalle  $I$  en sous-intervalles suffisamment petits et l'on utilise le fait que le flot d'une équation différentielle linéaire est toujours défini globalement.  $\square$

**Corollaire 2.7.** *Soient  $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$  deux applications homotopes et  $E$  un fibré vectoriel sur  $Y$ . Les fibrés induits  $f_0^* E$  et  $f_1^* E$  sont alors isomorphes.*

*Démonstration.* Soit  $f : X \times [0, 1] \rightarrow Y$  une homotopie lisse (!) et considérons le fibré induit  $f^* E$ . Celui-ci admet une connexion linéaire. Le transport parallèle le long des courbes  $\{x\} \times [0, 1]$ ,  $x \in X$ , réalise un isomorphisme entre  $f_0^* E$  et  $f_1^* E$ . Ici l'on utilise le fait que le flot d'une équation différentielle à paramètre dépend de façon lisse du paramètre. (Dans notre cas, l'espace des paramètres est la variété  $X$ .)  $\square$

**Corollaire 2.8.** *Soit  $E$  un fibré vectoriel sur une variété contractile. Alors  $E$  est isomorphe au fibré trivial.*

*Démonstration.* Soit  $B$  la base de  $E$ . Par définition, le fait que  $B$  soit contractile signifie que  $\text{Id}_B$  est homotope à une application constante. Or l'identité induit sur  $B$  de façon tautologique le fibré  $E$ , alors que toute application constante induit sur  $B$  le fibré trivial. L'on conclut par le corollaire précédent.  $\square$

2.2.2. *Approximation de fonctions et homotopie.* Dans ce chapitre nous discutons quelques résultats d'approximation d'applications  $C^0$  ou  $C^k$  entre variétés par des applications  $C^\infty$ , avec des conséquences homotopiques. Nous renvoyons le lecteur au Chapitre 2 du livre de M.W. Hirsch pour une discussion approfondie.

L'on considère les espaces d'applications  $C^r(X, Y)$  de classe  $C^r$ ,  $r \geq 0$  entre deux variétés lisses. L'on suppose pour simplifier que la source  $X$  est compacte.

Nous munissons  $C^r(X, Y)$ ,  $0 \leq r < \infty$  de la topologie engendrée par les ouverts  $\mathcal{N}^r(f, (U, \varphi), (V, \psi), K, \epsilon)$  suivants. Pour tout choix de cartes  $(U, \varphi)$ ,  $(V, \psi)$  sur  $X$ , respectivement  $Y$ , pour tout choix de compact  $K \subset U$  et pour tout choix de réel positif  $\epsilon > 0$ , étant donnée  $f \in C^r(X, Y)$  l'on pose

$$\mathcal{N}^r(f, (U, \varphi), (V, \psi), K, \epsilon)$$

l'ensemble des applications  $g \in C^r(X, Y)$  telles que

$$\|\psi g \varphi^{-1} - \psi f \varphi^{-1}\|_{C^r(K, V)} < \epsilon.$$

**Remarque.** Ceci est la définition de la "topologie faible" sur  $C^r(X, Y)$ , qui coïncide avec la "topologie forte" lorsque  $X$  est compacte. C'est une topologie métrisable, qui admet une métrique de définition complète et une base dénombrable. Ainsi  $C^r(X, \mathbb{R}^k)$  est un espace de Banach.

**Remarque.** Lorsque  $r = 0$ , cette topologie coïncide avec la topologie de la convergence uniforme déterminée par n'importe quel choix de métrique compatible avec la structure différentielle de  $Y$ .

L'espace  $C^\infty(X, Y)$  est muni de la topologie donnée par la réunion des topologies induites via les inclusions  $C^\infty(X, Y) \hookrightarrow C^r(X, Y)$ ,  $0 \leq r < \infty$ .

**Théorème 2.9.**  $C^\infty(X, Y)$  est dense dans  $C^r(X, Y)$ ,  $r \geq 0$ .

*Démonstration.* Il suffit de donner la preuve pour  $X = \mathbb{R}^n$ ,  $Y = \mathbb{R}^m$ , qui est le modèle local. Le point clé est de considérer une suite régularisante  $\chi_\nu : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty[$ ,  $\nu \geq 1$  constituée d'applications  $C^\infty$  telles que

$$\text{supp } \chi_\nu \subset B(0, \frac{1}{\nu}), \quad \int_{\mathbb{R}^n} \chi_\nu = 1.$$

Étant donnée  $f \in C^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ , la convolution

$$\chi_\nu * f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_\nu(x - y) f(y) dy$$

est lisse, elle converge en topologie  $C^r$  vers  $f$ , et  $\text{supp } \chi_\nu * f \subset \text{supp } f + B(0, \frac{1}{\nu})$ , de sorte que cette construction locale peut être implantée sur une variété en utilisant une partition de l'unité.  $\square$

Une variante utile de ce résultat est la suivante :

**Corollaire 2.10.** *Soit  $A \subset X$  un fermé et  $f \in C^r(X, Y)$  lisse au voisinage de  $A$ . Il existe une suite d'applications  $f_\nu \in C^\infty(X, Y)$ ,  $\nu \geq 1$  qui coïncident avec  $f$  au voisinage de  $A$  et telles que  $f_\nu \xrightarrow{C^r} f$ ,  $\nu \rightarrow \infty$ .*

*Démonstration.* Il suffit d'appliquer le théorème d'approximation 2.9 à la fonction  $(1 - \chi)f$ , avec  $\chi : X \rightarrow [0, 1]$  une fonction de troncature lisse supportée au voisinage de  $A$  et égale à 1 au voisinage de  $A$ .  $\square$

**Proposition 2.11.** *Deux applications continues  $f, g : X \rightarrow Y$  qui sont  $C^0$ -proches sont homotopes.*

*Démonstration.* Choisissons une métrique riemannienne sur  $Y$ . Puisque  $X$  est compacte, les images de  $f$  et  $g$  sont contenues dans un compact de  $Y$ , sur lequel le rayon d'injectivité de la métrique riemannienne est strictement positif. Notons-le  $\epsilon > 0$ . Dès que  $\|f - g\|_{C^0} < \epsilon$ , tous deux points  $f(x)$  et  $g(x)$  peuvent être reliés par une unique géodésique minimisante. En paramétrant celle-ci à vitesse constante comme  $\gamma_x(t)$ ,  $t \in [0, 1]$  l'application  $(x, t) \mapsto \gamma_x(t)$ ,  $x \in X$ ,  $t \in [0, 1]$  réalise une homotopie entre  $f$  et  $g$ .  $\square$

La discussion ci-dessus a comme conséquence directe les deux corollaires suivants.

**Corollaire 2.12.** *Deux applications lisses sont reliées par une homotopie continue si et seulement si elles sont reliées par une homotopie lisse.*  $\square$

Ceci justifie le fait que, dans l'énoncé et la preuve du théorème 2.1, nous n'avons pas précisé si l'on travaille avec des classes d'homotopie lisses ou continues.

**Corollaire 2.13.** *Tout invariant par homotopie lisse défini pour des applications lisses admet une unique extension en un invariant par homotopie continue défini pour des applications continues.*  $\square$

Par exemple, toute application lisse  $f : X \rightarrow Y$  induit un morphisme  $f^* : H_{DR}^*(Y) \rightarrow H_{DR}^*(X)$  en cohomologie de De Rham. Les arguments ci-dessus montrent que l'on peut aussi définir un tel morphisme  $f^*$  pour toute application  $f$  continue, de sorte que la relation fondamentale  $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$  soit toujours vérifiée. À titre d'exemple, ceci fournit une preuve directe du théorème de Brouwer  $C^0$  : *il n'existe pas d'application continue  $B^n \rightarrow S^{n-1}$  qui étende  $\text{Id}_{S^{n-1}}$* . Cet énoncé implique de manière classique le théorème de point fixe de Brouwer : *toute application continue  $B^n \rightarrow B^n$  possède un point fixe*.

La possibilité de définir un morphisme induit en cohomologie de De Rham pour les applications continues est par ailleurs une indication

du fait que la cohomologie de De Rham est un invariant de nature topologique. En effet, celle-ci est isomorphe à la cohomologie singulière à coefficients réels.

2.2.3. *Transversalité.* La notion de transversalité permet d'utiliser des méthodes de géométrie différentielle en topologie algébrique.

**Définition 2.14.** Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application différentiable et  $Z \subseteq Y$  une sous-variété. L'on dit que  $f$  est transverse à  $Z$  si la condition suivante est vérifiée : pour tout point  $x \in X$  tel que  $f(x) \in Z$ , l'on a

$$df_x(T_x X) + T_{f(x)} Z = T_{f(x)} Y.$$

Dans ce cas on utilise la notation

$$f \pitchfork Z,$$

lue “ $f$  est transverse à  $Z$ ” (Figure 3).

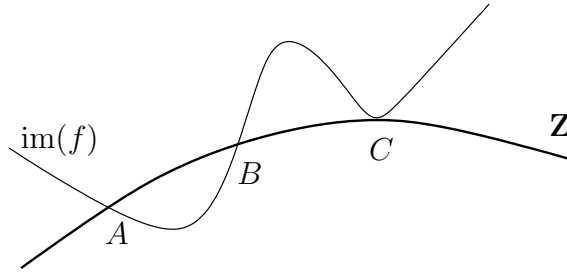


FIGURE 3.  $f$  est transverse à  $Z$  aux points  $A$  et  $B$ , mais pas au point  $C$

Voici deux situations importantes :

- (i) Si  $\dim X < \text{codim } Z$ , alors  $f \pitchfork Z$  si et seulement si  $\text{im}(f) \cap Z = \emptyset$ .
- (ii) Si  $Z = \{p\}$  est un point, alors  $f \pitchfork Z$  si et seulement si  $p$  est une valeur régulière pour  $f$ .

**Proposition 2.15.** Soit  $f : X \rightarrow Y$  lisse et  $Z \subseteq Y$  une sous-variété. Si  $f \pitchfork Z$  alors  $f^{-1}(Z) \subset X$  est une sous-variété de codimension égale à la codimension de  $Z$ .

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{U} \subset Y$  un voisinage tubulaire de  $Z$ , que l'on identifie à un voisinage de la section nulle dans le fibré normal à  $Z$  dans  $Y$ , noté  $\nu_Y Z$ . Soit  $x \in X$  tel que  $f(x) \in Z$ . Considérons une trivialisations locale  $\mathcal{U} \simeq U \times \mathbb{R}^{\text{codim}(Z)}$  au-dessus d'un voisinage  $U$  de  $f(x)$  dans  $Z$ . La condition de transversalité pour les points voisins de  $f^{-1}(f(x))$  équivaut au fait que 0 est une valeur régulière de  $\text{pr}_2 \circ f : X \rightarrow \mathbb{R}^{\text{codim}(Z)}$  dans cette trivialisations locale. Puisque  $f^{-1}(Z) = (\text{pr}_2 \circ f)^{-1}(0)$  au voisinage de  $f^{-1}(f(x))$ , la conclusion en découle.  $\square$

La notion de transversalité peut être vue comme l'analogue “en famille” de la notion de valeur régulière pour une fonction. Rappelons que, étant donnée une fonction  $f : X \rightarrow Y$ , un point  $p \in Y$  est une *valeur régulière* si la condition suivante est vérifiée : pour tout point

$x \in f^{-1}(p)$ , la différentielle  $df_x : T_x X \rightarrow T_p Y$  est surjective. Un point  $p$  est une *valeur critique* si ce n'est pas une valeur régulière, autrement dit si la condition suivante est vérifiée : il existe un point  $x \in f^{-1}(p)$  tel que la différentielle  $df_x : T_x X \rightarrow T_p Y$  n'est pas surjective (un tel point  $x \in X$  est appelé *point critique*). Il est important de noter que tout point  $p \in Y \setminus \text{im}(f)$  est par définition une valeur régulière. Par contraste, lorsque  $p \in Y$  est une valeur critique alors  $f^{-1}(p) \neq \emptyset$ , aussi par définition.

Le prototype des théorèmes de transversalité est le théorème de Sard. Le lecteur pourra en trouver la démonstration par exemple dans le livre de M.W. Hirsch.

**Théorème 2.16** (Théorème de Sard). *Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application lisse. L'ensemble de ses valeurs critiques est de mesure nulle dans  $Y$ . L'ensemble de ses valeurs régulières est dense dans  $Y$ .*  $\square$

En appliquant le théorème de Sard à des espaces de fonctions appropriés vus comme des variétés de dimension infinie modelées sur des espaces de Banach, l'on peut démontrer le résultat suivant. À nouveau, l'on renvoie au livre de M.W. Hirsch pour une preuve et pour une discussion beaucoup plus détaillée du sujet.

**Théorème 2.17.** *Soient  $X, Y$  des variétés et  $Z_1, \dots, Z_k \subseteq Y$  des sous-variétés. Soit  $A \subset X$  un fermé,  $A \subset U$  un voisinage ouvert de  $A$  dans  $X$  et  $f : U \rightarrow Y$  une application lisse qui est transverse à tous les  $Z_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ . L'ensemble des applications lisses de  $X$  dans  $Y$  qui coïncident avec  $f$  sur un voisinage de  $A$  et qui sont simultanément transverses à tous les  $Z_i$ ,  $i = 1, \dots, k$  est dense dans l'espace des applications lisses dont le germe en  $A$  est donné par  $f$ .*  $\square$

En particulier, toute application  $X \rightarrow Y$  peut être approximée en norme  $C^0$  par une application lisse qui lui est homotope et qui est transverse à une sous-variété donnée  $Z$ .

Une variante du théorème de transversalité est le suivant.

**Théorème 2.18.** *Soit  $E \rightarrow B$  un fibré vectoriel. L'ensemble des sections de  $E$  qui sont transverses à la section nulle est dense dans  $\Gamma(E)$ .*

**Remarque.** Lorsqu'une certaine propriété est valable pour un sous-ensemble dense d'une certaine classe d'applications, l'on dit que la propriété en question est *générique*. Une situation emblématique est représentée par le cas des sous-ensembles qui sont denses en tant qu'intersections dénombrables d'ouverts denses dans un espace métrique complet (théorème de Baire). On parle alors de *généricité au sens de Baire*.

Voici une application des méthodes d'approximation et de transversalité au calcul des groupes d'homotopie des sphères.

**Proposition 2.19.** *Soit  $n \geq 2$ . L'on a*

$$\pi_k(S^n) = 0, \quad 1 \leq k < n.$$

*Démonstration.* Soit  $f : (S^k, *) \rightarrow (S^n, *)$ ,  $1 \leq k < n$  une application continue à point base. Soit  $p \in S^n$  différent du point base. Par approximation et transversalité il existe  $g : (S^k, *) \rightarrow (S^n, *)$  lisse, homotope à  $f$  et transverse à la sous-variété  $Z = \{p\}$ . Puisque  $\dim S^k < \text{codim } Z$ , l'on conclut que  $\text{im}(g) \subset S^n \setminus \{p\} \simeq \mathbb{R}^n$ . Ce dernier espace étant contractile,  $g$  est homotope à une constante, donc  $f$  aussi.  $\square$

Le fait que les sphères  $S^k$ ,  $k \geq 2$  soient simplement connexes a comme conséquence le fait important suivant.

**Proposition 2.20.** *Soit  $(X, *)$  un espace topologique à point base admettant un revêtement universel  $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ . Considérons un point base  $\tilde{*} \in \tilde{X}$  tel que  $\pi(\tilde{*}) = *$ . Pour tout  $k \geq 2$  l'application*

$$\pi_* : \pi_k(\tilde{X}, \tilde{*}) \rightarrow \pi_k(X, *), \quad [f] \mapsto [\pi \circ f]$$

*est un isomorphisme de groupes.*

*Démonstration.* Nous démontrons ici que  $\pi_*$  est bijective. Le fait que  $\pi_*$  est un morphisme de groupes est un fait général, qui sera discuté lorsque nous décrirons en détail la structure de groupe sur les  $\pi_k$ ,  $k \geq 2$ .

L'application  $\pi_*$  est surjective puisque toute application vers  $X$  ayant comme source un espace simplement connexe admet un relèvement en une application vers  $\tilde{X}$ .

$$\begin{array}{ccc} & & (\tilde{X}, \tilde{*}) \\ & \nearrow \text{dotted arrow} & \downarrow \pi_* \\ (S^k, *) & \longrightarrow & (X, *) \end{array}$$

L'application  $\pi_*$  est injective puisque les homotopies se relèvent aussi à extrémités fixées.  $\square$

Il est utile de rappeler ici un autre calcul fondamental. La preuve utilise des résultats sur les revêtements.

**Proposition 2.21.** *L'on a*

$$\pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$$

*et*

$$\pi_k(S^1) = 0, \quad k \geq 2.$$

*Démonstration.* Utilisons le modèle  $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  et prenons comme point base  $* = 1 \in S^1$ . Le point clé est de remarquer le fait que le revêtement universel du cercle est  $\pi : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ ,  $\theta \mapsto e^{2i\pi\theta}$ .

Puisque le revêtement universel du cercle est contractile, la Proposition 2.20 implique alors directement l'énoncé sur les  $\pi_k$ ,  $k \geq 2$ .

Pour démontrer l'énoncé sur le  $\pi_1$  nous associons à toute application continue  $f : (S^1, *) \rightarrow (S^1, *)$  un *degré*  $\deg f \in \mathbb{Z}$  défini comme suit. L'application  $f$  admet un relèvement unique  $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tel que  $\tilde{f}(0) = 0$ . La condition de relèvement est  $\pi \tilde{f} = f \pi$ , de sorte que  $\tilde{f}(1) \in \mathbb{Z}$ . L'on pose  $\deg f = \tilde{f}(1)$ .

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{R} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ S^1 & \xrightarrow{f} & S^1. \end{array}$$

L'on vérifie que deux applications homotopes ont même degré. Par ailleurs, tout entier est réalisé comme degré d'une application. En effet,  $k = \deg(f : z \mapsto z^k)$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ . Ainsi le degré réalise une bijection

$$\deg : \pi_1(S^1) \rightarrow \mathbb{Z}.$$

Le lecteur pourra vérifier que  $\deg$  est même un isomorphisme de groupes.  $\square$



### 2.3. Fibrés vectoriels et homotopie.

La classification des fibrés sur les sphères suggère que la correspondance entre classes d'isomorphisme de fibrés de rang  $k$  sur une base quelconque et classes d'homotopies d'applications pourrait être vraie sur une base quelconque. C'est effectivement le cas.

2.3.1. *Variétés de Stiefel et variétés de Grassmann.* On note  $V_{n,k}^{\mathbb{K}}$  la *variété de Stiefel*, dont les points sont les tuples de  $k$  vecteurs dans  $\mathbb{K}^n$  linéairement indépendants sur  $\mathbb{K}$ , encore appelés  *$k$ -repères*. L'ensemble  $V_{n,k}^{\mathbb{K}}$  est naturellement un ouvert de  $(\mathbb{K}^n)^{\times k}$  et hérite de ce fait une structure naturelle de variété.

Le groupe de Lie  $\mathrm{GL}_k(\mathbb{K})$  agit proprement et librement sur  $V_{n,k}^{\mathbb{K}}$  et le quotient

$$G_{n,k}^{\mathbb{K}} = V_{n,k}^{\mathbb{K}} / \mathrm{GL}_k(\mathbb{K})$$

hérite de ce fait d'une structure naturelle de variété pour laquelle la projection  $V_{n,k}^{\mathbb{K}} \rightarrow G_{n,k}^{\mathbb{K}}$  est un  $\mathrm{GL}_k(\mathbb{K})$ -fibré principal. L'on a donc en particulier une fibration localement triviale

$$\mathrm{GL}_k(\mathbb{K}) \hookrightarrow V_{n,k}^{\mathbb{K}} \rightarrow G_{n,k}^{\mathbb{K}}.$$

Les points de  $G_{n,k}^{\mathbb{K}}$  peuvent être interprétés comme les sous-espaces de dimension  $k$  dans  $\mathbb{K}^n$ . L'on appelle  $G_{n,k}^{\mathbb{K}}$  *variété de Grassmann*, ou encore *grassmannienne des  $k$ -plans dans  $\mathbb{K}^n$* .

L'on a

$$\dim_{\mathbb{K}} V_{n,k}^{\mathbb{K}} = kn, \quad \dim_{\mathbb{K}} G_{n,k}^{\mathbb{K}} = k(n - k).$$

Le grassmannienne  $G_{n,k}^{\mathbb{K}}$  est naturellement la base d'un fibré de rang  $k$  sur  $\mathbb{K}$  appelé *fibré tautologique*, noté  $\gamma_{n,k}^{\mathbb{K}}$ , dont la fibre au-dessus d'un point  $V$  désignant un sous-espace  $V \subset \mathbb{K}^n$  de dimension  $k$  est l'espace  $V$  lui-même. La structure de fibré de  $\gamma_{n,k}^{\mathbb{K}}$  peut être décrite de manière rigoureuse comme suit. L'action de  $\mathrm{GL}_k(\mathbb{K})$  sur  $V_{n,k}^{\mathbb{K}}$  admet une extension naturelle au fibré trivial

$$V_{n,k}^{\mathbb{K}} \times \mathbb{K}^k \rightarrow V_{n,k}^{\mathbb{K}}.$$

Celle-ci est encore propre et libre, et aussi linéaire dans les fibres. Par conséquent le quotient hérite d'une structure naturelle de fibré vectoriel. Par ailleurs, un point du quotient s'identifie naturellement à une paire  $(V, v)$  avec  $V \in G_{n,k}^{\mathbb{K}}$  et  $v \in V$ .

**Exercice.** Soit  $\pi : V_{n,k}^{\mathbb{K}} \rightarrow G_{n,k}^{\mathbb{K}}$ . Montrer que  $\pi^* \gamma_{n,k}^{\mathbb{K}}$  est trivial.

**Exercice.** La variété  $G_{n,k}^{\mathbb{K}}$  est compacte.

Il existe des plongements naturels

$$V_{n,k}^{\mathbb{K}} \hookrightarrow V_{n+1,k}^{\mathbb{K}}, \quad G_{n,k}^{\mathbb{K}} \hookrightarrow G_{n+1,k}^{\mathbb{K}}$$

et aussi

$$\gamma_{n,k}^{\mathbb{K}} \hookrightarrow \gamma_{n+1,k}^{\mathbb{K}}$$

induits par le plongement  $\mathbb{K}^n \hookrightarrow \mathbb{K}^{n+1}$ ,  $v \mapsto (v, 0)$ . L'on note

$$V_k^{\mathbb{K}} = \lim_{n \rightarrow \infty} V_{n,k}^{\mathbb{K}}, \quad G_k^{\mathbb{K}} = \lim_{n \rightarrow \infty} G_{n,k}^{\mathbb{K}}$$

et

$$\tau_k^{\mathbb{K}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_{n,k}^{\mathbb{K}}$$

les limites directes déterminées par ces systèmes dirigés de plongements. Alors  $\tau_k^{\mathbb{K}}$  est un fibré localement trivial sur  $G_k^{\mathbb{K}}$ .

**2.3.2. Théorème de classification.** Étant donnés deux espaces topologiques  $X$  et  $Y$ , l'on note  $[X, Y]$  l'ensemble des classes d'homotopie d'applications continues de  $X$  dans  $Y$ .

**Théorème 2.22.** *Soit  $B$  une variété,  $k \geq 1$  et  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ . L'application*

$$[B, G_k^{\mathbb{K}}] \longrightarrow \mathcal{V}ect_k^{\mathbb{K}}(B), \quad f \mapsto f^* \gamma_k^{\mathbb{K}}$$

*est une bijection.*

Nous allons au fait démontrer la version plus fine suivante.

**Théorème 2.23.** *Soit  $B^n$  une variété de dimension  $n$ ,  $k \geq 1$  un entier.*

*(i) Le cas réel  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ . L'application*

$$[B, G_{s,k}^{\mathbb{R}}] \longrightarrow \mathcal{V}ect_k^{\mathbb{R}}(B), \quad f \mapsto f^* \gamma_{s,k}^{\mathbb{R}}$$

*est une bijection pour tout  $s > k + n$ .*

*Pour  $s' \geq s > k + n$ , l'inclusion  $G_{s,k}^{\mathbb{R}} \hookrightarrow G_{s',k}^{\mathbb{R}}$  induit une bijection  $[B, G_{s,k}^{\mathbb{R}}] \xrightarrow{\sim} [B, G_{s',k}^{\mathbb{R}}]$  qui fait commuter le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} [B, G_{s,k}^{\mathbb{R}}] & \longrightarrow & [B, G_{s',k}^{\mathbb{R}}] \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \mathcal{V}ect_k^{\mathbb{R}}(B). \end{array}$$

*(i) Le cas complexe  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . L'application*

$$[B, G_{s,k}^{\mathbb{C}}] \longrightarrow \mathcal{V}ect_k^{\mathbb{C}}(B), \quad f \mapsto f^* \gamma_{s,k}^{\mathbb{C}}$$

*est une bijection pour tout  $s$  tel que  $2(s - k) + 1 > n$ .*

*Pour deux tels choix  $s' \geq s$ , l'inclusion  $G_{s,k}^{\mathbb{C}} \hookrightarrow G_{s',k}^{\mathbb{C}}$  induit une bijection  $[B, G_{s,k}^{\mathbb{C}}] \xrightarrow{\sim} [B, G_{s',k}^{\mathbb{C}}]$  qui fait commuter le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} [B, G_{s,k}^{\mathbb{C}}] & \longrightarrow & [B, G_{s',k}^{\mathbb{C}}] \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \mathcal{V}ect_k^{\mathbb{C}}(B). \end{array}$$

Étant donné un fibré  $\xi$ , une application  $f : B \rightarrow G_{s,k}^{\mathbb{K}}$  telle que  $f^*\gamma_{s,k}^{\mathbb{K}} \simeq \xi$  est appelée *application classifiante pour  $\xi$* .

Nous verrons au cours de la preuve que tout fibré  $\xi \rightarrow B^n$  de rang  $k$  sur  $\mathbb{R}$  admet une application classifiante  $f : B \rightarrow G_{s,k}^{\mathbb{R}}$  dès que  $s \geq k + n$ , et que la classe d'homotopie de celle-ci est unique dès que  $s > k + n$ . (Dans le cas complexe, les conditions  $s - k \geq n$  et  $s - k > n$  doivent être remplacées par les conditions plus faibles  $2(s - k) + 1 \geq n$ , respectivement  $2(s - k) + 1 > n$ .)

Il est utile de commencer par la caractérisation suivante des tirés-en-arrière. Étant donnés deux fibrés  $\xi \xrightarrow{\pi_\xi} M$ ,  $\eta \xrightarrow{\pi_\eta} N$ , on appelle *morphisme de fibrés* un couple  $(F, f)$  avec  $F : \xi \rightarrow \eta$ ,  $f : M \rightarrow N$  tels que  $\pi_\eta F = f \pi_\xi$  et  $F|_{\xi_x} : \xi_x \rightarrow \eta_{f(x)}$  linéaire pour tout  $x \in M$ . L'on dira aussi dans cette situation que  $F$  est un *morphisme de fibrés qui relève  $f$* , ou encore que  $F$  est un *morphisme de fibrés au-dessus de  $f$* .

$$\begin{array}{ccc} \xi & \xrightarrow{F} & \eta \\ \pi_\xi \downarrow & & \downarrow \pi_\eta \\ M & \xrightarrow{f} & N. \end{array}$$

**Lemme 2.24.** *Soient  $\xi \rightarrow M$ ,  $\eta \rightarrow N$  deux fibrés et  $f : M \rightarrow N$  une application continue. Alors  $\xi \simeq f^*\eta$  si et seulement si il existe un morphisme de fibrés  $F : \xi \rightarrow \eta$  qui relève  $f$  et qui est bijectif sur les fibres.*

*Démonstration.* Il est clair que le fibré  $f^*\eta$  admet un morphisme  $f^*\eta \rightarrow \eta$  qui relève  $f$  et qui est bijectif sur les fibres : puisque  $(f^*\eta)_x = \eta_{f(x)}$ , l'on pose  $F|_{(f^*\eta)_x} = \text{id}_{\eta_{f(x)}}$ .

Réciproquement, supposons que  $\xi$  admet un morphisme  $F : \xi \rightarrow \eta$  qui relève  $f$  et qui est bijectif dans les fibres. Pour montrer  $\xi \simeq f^*\eta$  il suffit de vérifier que le couple  $(\xi, F)$  vérifie la propriété d'universalité du tiré-en-arrière : pour tout fibré  $\xi' \rightarrow M$  et tout morphisme  $F' : \xi' \rightarrow \eta$  qui relève  $f$ , il existe un unique morphisme de fibrés  $\Theta : \xi' \rightarrow \xi$  au-dessus de l'identité de  $M$  tel que  $F' = F \circ \Theta$ .

$$\begin{array}{ccccc} \xi' & & & & \eta \\ & \searrow^{F'} & & & \downarrow \pi_\eta \\ & & \xi & \xrightarrow{F} & \eta \\ & \searrow^{\Theta} & \downarrow \pi_\xi & & \\ & & M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

Notons  $F_p = F|_{\xi_p}$ ,  $F'_p = F'|_{\xi'_p}$ . L'on doit alors nécessairement avoir  $\Theta(p, v) = (p, F_p^{-1}(F'_p(v)))$  pour tout  $p \in M$  et  $v \in \xi'_p$ . L'on vérifie

par ailleurs que cette expression définit bien une application de même régularité que celle de  $F$  et  $F'$ , puisque l'inversion dans  $GL(V)$  est de classe  $C^\infty$  pour tout espace vectoriel  $V$ . Ainsi  $\Theta : \xi' \rightarrow \xi$  est un morphisme de fibrés au-dessus de  $\text{Id}_M$  qui est bijectif sur les fibres.  $\square$

Afin de présenter un fibré  $\xi$  comme tiré-en-arrière du fibré tautologique sur la grassmannienne nous sommes donc amenés à exhiber des morphismes de fibrés  $\xi \rightarrow \gamma_{s,k}^{\mathbb{K}}$  bijectifs sur les fibres. La remarque qui suit montre que cette dernière question peut être reformulée de façon avantageuse.

**Lemme 2.25.** *Soit  $\xi \rightarrow B$  un fibré de rang  $k$  sur  $\mathbb{K}$ . Les morphismes de fibrés bijectifs sur les fibres  $\xi \rightarrow \gamma_{s,k}^{\mathbb{K}}$  sont en correspondance bijective canonique avec les morphismes de fibrés  $\xi \rightarrow B \times \mathbb{K}^s$  qui sont injectifs dans les fibres.*  $\square$

En vue de cette discussion, le théorème de classification sera impliqué par le théorème de prolongement suivant.

**Théorème 2.26.** *Soit  $\xi \rightarrow B^n$  un fibré de rang  $k$  sur  $\mathbb{K}$ . Soit  $A \subseteq B$  un fermé et  $A \subset U \subseteq B$  un voisinage ouvert de  $A$  dans  $B$ .*

*Soit  $F : \xi|_U \rightarrow U \times \mathbb{K}^s$  un morphisme de fibrés injectif dans les fibres. Si  $s \geq k + n$  pour  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , respectivement  $2(s - k) + 1 \geq n$  pour  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , il existe un morphisme de fibrés  $\xi \rightarrow B \times \mathbb{K}^s$  qui est injectif dans les fibres et qui coïncide avec  $F$  au-dessus d'un voisinage de  $A$ .*

**Remarque 2.27.** *Il est utile de discuter la stratégie de preuve de ce théorème avant d'en donner les détails. Le point clé sera de démontrer le théorème localement sur  $B$ . Le fait qu'il soit formulé de façon relative, non pas comme un problème d'existence de morphismes définis au-dessus de  $B$ , mais comme un problème d'extension à  $B$  de morphismes déjà définis au-dessus d'un fermé arbitraire  $A$ , fait que la version locale se globalisera par un raisonnement purement formel. Ce schéma est fréquent en topologie algébrique. Le lecteur est invité à contempler le potentiel des énoncés formulés de manière relative : alors même qu'ils sont d'apparence plus lourde, leur efficacité est incomparablement plus grande que celle des versions "absolues". [Comparer aussi avec la discussion du 2.2.11 dans le livre de Hirsch.]*

*Nous allons rencontrer une situation similaire avec la définition des groupes d'homotopie relatifs, ou encore de groupes de (co)homologie relative. Les invariants d'intérêt central sont les invariants absolus, mais le fait de définir des invariants relatifs permet de mettre en place des raisonnements inductifs pour calculer les invariants absolus.*

*Démonstration du Théorème 2.26.*

*Étape 1 : l'on démontre le théorème pour un fibré  $\xi$  trivial.*

Notons à ce propos que la donnée d'une application  $B \times \mathbb{K}^k \rightarrow B \times \mathbb{K}^s$  injective dans les fibres équivaut à la donnée d'une application

$$B \rightarrow V_{s,k}^{\mathbb{K}}.$$

En effet, une famille d'applications linéaires de rang maximal  $\mathbb{K}^k \hookrightarrow \mathbb{K}^s$  indexée par  $B$  est la même chose qu'une famille de  $k$ -repères dans  $\mathbb{K}^s$  indexée par  $B$ .

Soit  $A \subset B$  un fermé. Nous souhaitons montrer que toute application  $A \rightarrow V_{s,k}^{\mathbb{K}}$  définie sur un voisinage  $U$  de  $A$  s'étend en une application  $B \rightarrow V_{s,k}^{\mathbb{K}}$  pour  $s \geq k + n$  dans le cas  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , respectivement pour  $2(s - k) + 1 \geq n$  dans le cas  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . (Notons au passage que ceci démontrera  $\pi_i(V_{s,k}^{\mathbb{K}}) = 0$  pour  $1 \leq i < s - k$  dans le cas réel et pour  $1 \leq i < 2(s - k) + 1$  dans le cas complexe, en prenant  $A = S^i$  et  $B = D^{i+1}$  la boule de dimension  $i + 1$ .)

Nous regardons  $V_{s,k}^{\mathbb{K}} \subset L(\mathbb{K}^k, \mathbb{K}^s)$  comme l'ouvert constitué des applications linéaires de rang maximal égal à  $k$ . Ainsi

$$V_{s,k}^{\mathbb{K}} = L(\mathbb{K}^k, \mathbb{K}^s) \setminus \bigcup_{\rho=0}^{k-1} Z_{\rho},$$

avec

$$Z_{\rho} \subset L(\mathbb{K}^k, \mathbb{K}^s)$$

le sous-espace des applications linéaires de rang égal à  $\rho \in \{0, \dots, k-1\}$ .

*Affirmation* :  $Z_{\rho} \subset L(\mathbb{K}^k, \mathbb{K}^s)$  est une sous-variété de codimension  $(s - \rho)(k - \rho)$ .

Cette affirmation démontre le théorème dans ce cadre. En effet, soit  $f : U \rightarrow V_{s,k}^{\mathbb{K}}$  donnée. Puisque  $L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^s)$  est contractile l'on peut étendre  $f$  après une éventuelle restriction à un voisinage de  $A$  dans  $U$  à une application  $\tilde{f} : B \rightarrow L(\mathbb{K}^k, \mathbb{K}^s)$ . Par le théorème de transversalité 2.17 (noter la formulation relative de ce dernier!), l'on trouve  $\bar{f} : B \rightarrow L(\mathbb{K}^k, \mathbb{K}^s)$  dont le germe en  $A$  est donné par  $f$  et telle que  $\bar{f}$  est simultanément transverse à tous les  $Z_{\rho}$ ,  $\rho = 0, \dots, k-1$ . Dans le cas réel nous avons

$$\min_{\rho} \text{codim}_{\mathbb{R}} Z_{\rho} = s - k + 1 > n = \dim B,$$

et dans le cas complexe nous avons

$$\min_{\rho} \text{codim}_{\mathbb{R}} Z_{\rho} = 2(s - k + 1) > n = \dim B.$$

La condition de transversalité équivaut dans les deux cas à ce que  $\text{im}(\bar{f}) \cap Z_{\rho} = \emptyset$  pour tout  $\rho$ , ou encore

$$\text{im}(\bar{f}) \subset V_{s,k}^{\mathbb{K}}.$$

Ainsi  $\bar{f}$  fournit l'extension souhaitée.

*Démonstration de l'affirmation.* Soit  $T \in Z_\rho$ . Au voisinage de  $T$ , tout élément  $S$  de  $Z_\rho$  est déterminé par

- son noyau, qui est un sous-espace de  $\mathbb{K}^k$  de dimension  $k - \rho$ , proche de  $\ker T$  ;
- son image, qui est un sous-espace de  $\mathbb{K}^s$  de dimension  $\rho$ , proche de  $\text{im } T$  ;
- le comportement de  $S$  sur un supplémentaire de  $\ker S$ , que l'on peut choisir comme étant donné par un supplémentaire fixé de  $\ker T$ , à valeurs dans cette image.

En suivant [Hirsch, p. 78], considérons deux applications linéaires

$$\mathbb{K}^\rho \xrightarrow{i} \mathbb{K}^k, \quad \mathbb{K}^s \xrightarrow{p} \mathbb{K}^\rho$$

telles que  $i$  est injective et  $\text{im } i$  est un supplémentaire de  $\ker T$ ,  $p$  est surjective et  $\ker p$  est un supplémentaire de  $\text{im } T$  (Figure 4). Soit  $\mathcal{N}(T) \subset Z_\rho$  un voisinage assez petit de  $T$ . L'application

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(T) &\rightarrow G_{k,k-\rho}^{\mathbb{K}} \times \text{GL}_\rho(\mathbb{K}) \times G_{s,\rho}^{\mathbb{K}}, \\ S &\mapsto (\ker S, pSi, \text{im } S) \end{aligned}$$

est un homéomorphisme sur un ouvert du but. Son inverse est de classe  $C^\infty$  (vérification directe) et réalise un plongement ouvert à valeurs dans  $Z_\rho$ , qui est donc une paramétrisation locale de  $Z_\rho$ . Ainsi  $Z_\rho$  est une sous-variété de  $L(\mathbb{K}^k, \mathbb{K}^s)$ . Puisque

$$\dim_{\mathbb{K}} G_{k,k-\rho}^{\mathbb{K}} \times \text{GL}_\rho(\mathbb{K}) \times G_{s,\rho}^{\mathbb{K}} = (k - \rho)\rho + \rho^2 + \rho(s - \rho),$$

l'on déduit

$$\text{codim}_{\mathbb{K}} Z_\rho = (s - \rho)(k - \rho).$$

Ainsi la codimension de  $Z_\rho$  décroît avec  $\rho$  et la codimension minimale est celle de  $Z_{k-1}$ , égale à  $s - k + 1$  (sur  $\mathbb{K}$ ).

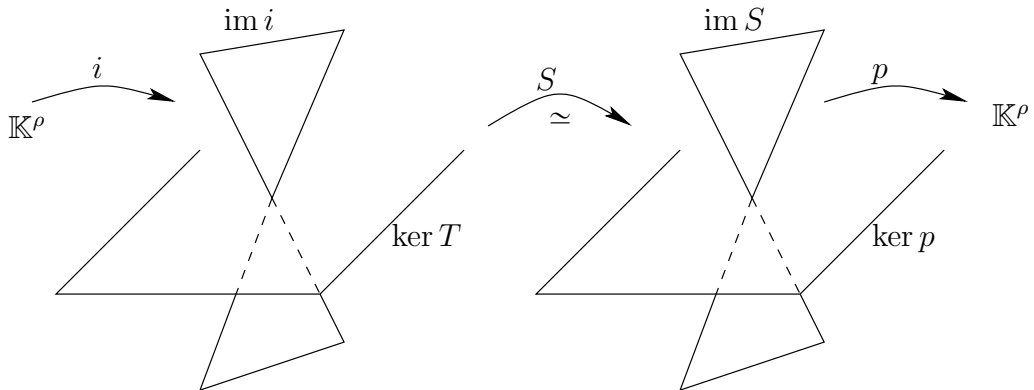


FIGURE 4

*Étape 2 : l'on démontre le théorème dans le cas général.*

Soit  $\{X_i\}$  un recouvrement dénombrable fermé de  $B$  tel que  $\xi$  soit trivial sur un voisinage de  $X_i$  pour tout  $i$ . L'on construit par récurrence sur  $p \geq 1$  une extension  $F_p$  de  $F|_{A \cap \bigcup_{i=1}^p X_i}$  à un voisinage de  $\bigcup_{i=1}^p X_i$  qui coïncide avec  $F$  sur un voisinage de  $A \cap \bigcup_{i=1}^p X_i$ .

Pour  $p = 1$ , ceci découle de l'étape 1 appliquée à un voisinage de  $X_1$  et au fermé  $A \cap X_1$ .

Supposons maintenant avoir construit  $F_p$ . Nous construisons  $F_{p+1}$  de la manière suivante. L'étape 1 appliquée à un voisinage de  $X_{p+1}$  et au fermé  $(A \cup \bigcup_{i=1}^p X_i) \cap X_{p+1}$  fournit une application  $g$  définie au voisinage de  $X_{p+1}$  qui se recolle à l'application  $F_p$  par construction. Ensemble, elles fournissent l'application  $F_{p+1}$  recherchée.  $\square$

*Démonstration du théorème 2.23.* Nous donnons la preuve dans le cas réel  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , le cas complexe  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  étant en tout point analogue.

Pour tout  $s \geq k+n$  l'application  $[B, G_{s,k}^{\mathbb{R}}] \rightarrow \mathcal{Vect}_k^{\mathbb{R}}(B)$  est surjective. En effet, il suffit d'appliquer le Théorème de prolongement 2.26 avec  $A = \emptyset$  pour trouver un morphisme de fibrés  $F : \xi \rightarrow B \times \mathbb{R}^s$  injectif dans les fibres. En posant  $f : B \rightarrow G_{s,k}^{\mathbb{R}}$ ,  $f(p) = F(\xi_p)$  l'on aura  $\xi \simeq f^* \gamma_{s,k}^{\mathbb{R}}$ .

Soit maintenant  $s > k+n$  et montrons que deux telles applications classifiantes  $f_0, f_1 : B \rightarrow G_{s,k}^{\mathbb{R}}$  sont homotopes. L'on fixe des isomorphismes  $\xi \simeq f_i^* \gamma_{s,k}^{\mathbb{R}}$ ,  $i = 0, 1$ , qui déterminent des morphismes de fibrés  $F_i : \xi \rightarrow B \times \mathbb{R}^s$ ,  $i = 0, 1$  injectifs dans les fibres. L'on applique maintenant le Théorème de prolongement 2.26 au fibré  $\text{pr}_1^* \xi \rightarrow B \times [0, 1]$ , avec  $A = B \times \{0\} \cup B \times \{1\}$  et  $F$  donné par  $F_i$  au voisinage de  $B \times \{i\}$ ,  $i = 0, 1$  et l'on trouve une extension  $F : \text{pr}_1^* \xi \rightarrow B \times [0, 1] \times \mathbb{R}^s$  qui est un morphisme de fibrés injectif dans les fibres. L'application  $f : B \times [0, 1] \rightarrow G_{s,k}^{\mathbb{R}}$  donnée par  $f(p, t) = F((\text{pr}_1^* \xi)_{p,t})$  réalise alors une homotopie entre  $f_0$  et  $f_1$ .

Finalement, il est clair que l'inclusion  $i : G_{s,k}^{\mathbb{R}} \hookrightarrow G_{s',k}^{\mathbb{R}}$ ,  $s' \geq s$  rend commutatif le diagramme de l'énoncé puisque  $i^* \gamma_{s',k}^{\mathbb{R}} = \gamma_{s,k}^{\mathbb{R}}$ . Puisque les deux flèches verticales de ce diagramme sont des bijections pour  $s > k+n$ , il s'ensuit que la flèche induite  $[B, G_{s,k}^{\mathbb{R}}] \rightarrow [B, G_{s',k}^{\mathbb{R}}]$  est aussi une bijection.  $\square$

Le résultat précédent admet la reformulation utile suivante. Le lecteur pourra donner une preuve agréable dans le contexte des CW-complexes relatifs, discuté plus tard dans le contexte de la théorie de l'obstruction.

**Théorème 2.28.** *Soit  $(X, x_0)$  un espace à point base tel que  $\pi_i(X, x_0) = 0$  pour  $1 \leq i < m$ . Soit  $B^n$  une variété de dimension  $n \leq m$ . Soit  $A \subset B$  fermé et  $A \subset U \subseteq B$  un voisinage ouvert de  $A$  dans  $B$ . Pour toute application  $f : U \rightarrow X$  il existe une extension  $\tilde{f} : B \rightarrow X$  telle*

que  $\tilde{f} = f$  sur un voisinage de  $A$ . La classe d'homotopie d'une telle extension  $\tilde{f}$  est unique si  $n < m$ .  $\square$

**Remarque 2.29.** Il s'ensuit de notre preuve que

$$\pi_i(V_{s,k}^{\mathbb{R}}) = 0, \quad 1 \leq i < s - k$$

et

$$\pi_i(V_{s,k}^{\mathbb{C}}) = 0, \quad 1 \leq i < 2(s - k) + 1.$$

En effet, soit  $f : (S^i, *) \rightarrow (V_{s,k}^{\mathbb{K}}, *)$  une application continue. Par le Théorème de prolongement 2.26 appliqué au fibré trivial de rang  $k$  sur  $B = D^{i+1}$ , la boule de dimension  $i + 1$ , avec  $A = S^i$  et le morphisme de fibrés injectif dans les fibres  $S^i \times \mathbb{K}^k \rightarrow S^i \times \mathbb{K}^s$  défini par  $f$ , fournit une extension de ce dernier à  $B$ , ce qui équivaut à une extension de  $f$  à la boule. Ainsi  $f$  est homotope à l'application constante.

Les dimensions  $s - k$  pour  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  et  $2(s - k) + 1$  pour  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  sont les premières dans lesquelles des groupes d'homotopie non-triviaux apparaissent. En effet, nous avons le résultat suivant.

**Théorème 2.30.** L'on a

$$\pi_{s-k}(V_{s,k}^{\mathbb{R}}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}, & s - k \text{ pair ou } k = 1, \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, & s - k \text{ impair et } k > 1, \end{cases}$$

et

$$\pi_{2(s-k)+1}(V_{s,k}^{\mathbb{C}}) \simeq \mathbb{Z}.$$

$\square$

Nous donnons la preuve pour les variétés de Stiefel réelles dans l'Annexe E, voir aussi [Husemoller, Ch. 8] ou [Steenrod, 25.6].

**Remarque.** Nous obtenons en particulier

$$\pi_i(V_k^{\mathbb{K}}) = 0, \quad i \geq 1.$$

Ceci implique en particulier que  $V_k^{\mathbb{K}}$  est contractile (Théorème de Whitehead, cf. la discussion de l'Annexe B).

**Remarque.** Le théorème de classification des fibrés réduit la théorie des fibrés vectoriels à une branche de la théorie de l'homotopie. Le théorème d'approximation lisse discuté plus haut a en particulier comme conséquence le fait suivant. Pour l'énoncer, introduisons la terminologie suivante : un fibré vectoriel au-dessus d'une variété lisse est dit *de classe  $C^r$* ,  $r \geq 0$  s'il est défini par un 1-cocycle  $\Phi_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \text{GL}_k(\mathbb{K})$  de classe  $C^r$ .

**Proposition 2.31.** Soit  $B$  une variété lisse. Tout fibré de classe  $C^r$ ,  $r \geq 0$  possède une structure de fibré de classe  $C^\infty$  qui lui est isomorphe dans la catégorie des fibrés de classe  $C^r$ . Cette structure de fibré  $C^\infty$  est unique à isomorphisme près.  $\square$



Le lecteur est invité à démontrer ce résultat (cf. aussi [Hirsch 4.3.5]).

**Remarque 2.32.** *Considérons la bijection*

$$[B, G_k^{\mathbb{K}}] \xrightarrow{\cong} \mathcal{Vect}_k^{\mathbb{K}}(B), \quad [f] \mapsto f^* \gamma_k^{\mathbb{K}}.$$

*Se pose la question d'associer aux fibrés vectoriels des invariants de nature algébrique. Une manière cohérente de le faire est d'appliquer la stratégie suivante : soit  $\alpha \in H^*(G_k^{\mathbb{K}})$  une classe de cohomologie fixée (cf. la discussion de la cohomologie dans les chapitres suivants). L'on définit*

$$\alpha(\xi) = f^* \alpha \in H^*(B),$$

*où  $f^* : H^*(G_k^{\mathbb{K}}) \rightarrow H^*(B)$  est l'application induite en cohomologie. La classe  $f^* \alpha$  est bien déterminée puisque l'application  $f^*$  induite en cohomologie ne dépend que de la classe d'homotopie de  $f$ . Pour toute application  $h : B' \rightarrow B$  l'on a alors*

$$\alpha(h^* \xi) = h^* \alpha(\xi).$$

*En effet, si  $f : B \rightarrow G_k^{\mathbb{K}}$  est une application classifiante pour  $\xi$ , alors  $f \circ h : B' \rightarrow G_k^{\mathbb{K}}$  est une application classifiante pour  $h^* \xi$ , et les applications induites en cohomologie vérifient  $(f \circ h)^* = h^* f^*$ .*

$$\begin{array}{ccccc} h^* \xi = (f \circ h)^* \gamma_k^{\mathbb{K}} & \longrightarrow & \xi = f^* \gamma_k^{\mathbb{K}} & \longrightarrow & \gamma_k^{\mathbb{K}} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ B' & \xrightarrow{h} & B & \xrightarrow{f} & G_k^{\mathbb{K}} \end{array}$$

*L'on appelle  $\alpha(\xi)$  la valeur de la classe caractéristique déterminée par  $\alpha$  sur le fibré  $\xi$ .*

*Bien évidemment, la portée de cette stratégie pour distinguer des classes d'isomorphisme de fibrés dépend en premier lieu de la richesse des groupes de cohomologie  $H^*(G_k^{\mathbb{K}})$  des grassmanniennes. La question du calcul de ces groupes apparaît comme fondamentale.*

**2.4. Groupes d'homotopie.** Les groupes d'homotopie jouent un rôle fondamental en topologie algébrique. En vue de la preuve du théorème de prolongement 2.26, ils peuvent notamment être interprétés comme fournissant des obstructions de nature algébrique à des problèmes de prolongement d'applications dont la source est donnée.

**Définition 2.33.** Soit  $n \geq 0$  un entier. Choisissons un point base  $*$  dans  $S^n$ . Soit  $X$  un espace topologique avec point base  $x_0$ . On note

$$\pi_n(X, x_0)$$

l'ensemble des classes d'homotopie d'applications d'espaces topologiques à point base  $(S^n, *) \rightarrow (X, x_0)$ . On appelle  $\pi_n(X, x_0)$  le  $n$ -ème groupe d'homotopie de  $X$  (basé en  $x_0$ ).

À titre d'exemple, en vue du fait que  $S^0$  est l'ensemble constitué de deux points,  $\pi_0(X, x_0)$  est l'ensemble des composantes connexes par arcs de  $X$ . C'est un ensemble à point base, donné par la composante connexe de  $x_0$ . Les ensembles  $\pi_n(X, x_0)$ ,  $n \geq 1$  ne dépendent évidemment que de la composante connexe par arcs de  $x_0$  dans  $X$ .

Les ensembles  $\pi_n(X, x_0)$ ,  $n \geq 1$  portent une structure de groupe. Lorsque  $n = 1$ , c'est la structure de groupe bien connue sur le groupe fondamental donnée par la concaténation des lacets. Pour décrire la structure de groupe lorsque  $n \geq 2$  il est utile de voir  $\pi_n(X, x_0)$  comme ensemble de classes d'homotopie d'applications continues

$$(I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0),$$

avec  $I^n = [0, 1]^n$  le cube unité dans  $\mathbb{R}^n$  et  $\partial I^n$  son bord. Étant données deux classes de telles applications représentées par  $f$  et  $g$  l'on définit

$$(2.1) \quad (f \cdot g)(t_1, \dots, t_n) = \begin{cases} f(2t_1, t_2, \dots, t_n), & 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2}, \\ g(2t_1 - 1, t_2, \dots, t_n), & \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1. \end{cases}$$

De façon visuelle, la loi de composition est décrite par la Figure 5 ci-dessous.

$$\boxed{f} \cdot \boxed{g} = \boxed{\begin{array}{|c|c|} \hline f & g \\ \hline \end{array}}$$

FIGURE 5. Loi de composition dans  $\pi_2(X, x_0)$

**Proposition 2.34.** La loi de composition (2.1) ci-dessus définit une structure de groupe sur  $\pi_n(X, x_0)$ ,  $n \geq 1$ . Les groupes  $\pi_n(X, x_0)$ ,  $n \geq 2$  sont commutatifs.

*Démonstration.* L'énoncé est bien connu dans le cas du groupe fondamental  $n = 1$ . Lorsque  $n \geq 2$ , l'inverse de  $[f]$  est représenté par

$\bar{f}(t_1, t_2, \dots, t_n) = f(1 - t_1, t_2, \dots, t_n)$ . La commutativité de la multiplication est démontrée en utilisant l'homotopie décrite par la Figure 6 ci-dessous.

$$\begin{array}{|c|c|} \hline f & g \\ \hline \end{array} \simeq \begin{array}{|c|c|} \hline x_0 & g \\ \hline f & x_0 \\ \hline \end{array} \simeq \begin{array}{|c|c|} \hline g & x_0 \\ \hline x_0 & f \\ \hline \end{array} \simeq \begin{array}{|c|c|} \hline g & f \\ \hline \end{array}$$

FIGURE 6. Commutativité de  $\pi_n(X, x_0)$ ,  $n \geq 2$

□

2.4.1. *Homotopie libre.* Le groupe  $\pi_1(X, x_0)$  agit sur  $\pi_n(X, x_0)$  par des automorphismes de groupes de la manière suivante. Soit  $\gamma : (I, \partial I) \rightarrow (X, x_0)$  un lacet à point base en  $x_0$  et  $f : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$  un représentant de classe d'homotopie dans  $\pi_n(X, x_0)$ . Soit  $I_{1/2}^n \subset I^n$  le cube obtenu en appliquant à  $I^n$  l'homothétie  $h_{1/2}$  de rapport  $1/2$  et dont le centre est le barycentre de  $I^n$ . On choisit un homéomorphisme  $I^n \setminus \text{int } I_{1/2}^n \simeq \partial I^n \times [0, 1]$  avec  $\partial I^n \simeq \partial I^n \times \{0\}$  et  $\partial I_{1/2}^n \simeq \partial I^n \times \{1\}$  et l'on définit  $\gamma \cdot f : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$  par

$$(\gamma \cdot f)(t) = \begin{cases} \gamma(\tau), & t = (t', \tau) \in I^n \setminus \text{int } I_{1/2}^n \simeq \partial I^n \times [0, 1], \\ f(h_{1/2}^{-1}(t)), & t \in I_{1/2}^n \end{cases}$$

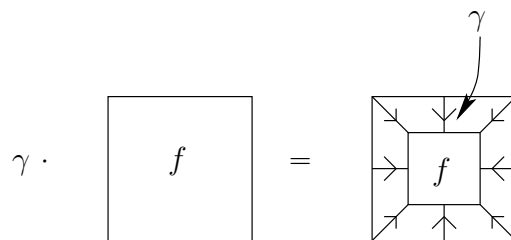
De façon heuristique, l'on met en évidence à l'intérieur de  $I^n$  un cube plus petit sur lequel on garde  $f$  (modulo un changement d'échelle), et l'on insère sur le collier extérieur le lacet  $\gamma$  le long des rayons, paramétré depuis  $\partial I^n$  vers le bord du cube intérieur (Figure 7). La classe d'homotopie de  $\sigma \cdot f$  ne dépend que des classes d'homotopie de  $\gamma$  et  $f$ , et ceci définit un homomorphisme de groupes

$$\pi_1(X, x_0) \rightarrow \text{Aut}(\pi_n(X, x_0)), \quad n \geq 1.$$

Lorsque  $n = 1$  ceci n'est rien d'autre que l'action de  $\pi_1(X, x_0)$  sur lui-même par des automorphismes intérieurs

$$g \mapsto (h \mapsto ghg^{-1}).$$

**Remarque.** Soit  $X$  connexe par arcs. La même formule définit une action du groupoïde fondamental de  $X$  sur l'ensemble  $\{\pi_n(X, x) : x \in X\}$ . Rappelons qu'un groupoïde est une petite catégorie dans laquelle tous les morphismes sont inversibles. Le groupoïde fondamental a comme objets les points de  $X$ . L'ensemble des morphismes de  $x$  à  $y$ , noté  $\pi_1(X, y, x)$ , est par définition l'ensemble des classes d'homotopie à extrémités fixées de chemins continus de  $y$  vers  $x$ . La composition des morphismes est donnée par la composition de chemins. Pour

FIGURE 7. Action de  $\pi_1(X, x_0)$  sur  $\pi_n(X, x_0)$ ,  $n \geq 1$ 

$[\gamma] \in \pi_1(X, x, y)$  et  $[f] \in \pi_n(X, x)$ , l'on a  $[\gamma] \cdot [f] \in \pi_n(X, y)$  et l'application  $[\gamma] \cdot : \pi_n(X, x) \rightarrow \pi_n(X, y)$  est un isomorphisme de groupes. L'on obtient donc une application

$$\pi_1(X, y, x) \rightarrow \text{Iso}(\pi_n(X, x), \pi_n(X, y)).$$

L'on note  $\{\pi_n(X)\}$  l'ensemble  $\{\pi_n(X, x) : x \in X\}$  muni de cette action du groupoïde fondamental et on l'appelle *le système local de fibre*  $\pi_n(X, x)$  défini par l'action de  $\pi_1$ .

**Proposition 2.35.** *Soit  $X$  un espace connexe par arcs. L'application canonique  $\mathcal{L} : \pi_n(X, x_0) \rightarrow [S^n, X]$  qui associe à une classe d'homotopie à point base sa classe d'homotopie libre descend en une bijection*

$$\bar{\mathcal{L}} : \pi_n(X, x_0)/\pi_1(X, x_0) \xrightarrow{\cong} [S^n, X].$$

*Démonstration.* Il est clair par définition que l'application  $\mathcal{L}$  descend au quotient :  $\gamma \cdot f$  est librement homotope à  $f$  par un chemin d'applications  $(I^n, \partial I^n) \mapsto (X, \gamma(t))$ ,  $t \in [0, 1]$  (on retracte par déformation le cube  $I^n$  sur  $I_{1/2}^n$ ).

L'application  $\mathcal{L}$  est surjective : étant donnée  $f : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x)$ , l'on choisit un chemin  $\gamma$  de  $x_0$  à  $x$ . L'argument précédent montre que  $f$  est homotope librement à  $\gamma \cdot f : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$ .

L'application  $\bar{\mathcal{L}}$  est injective : soient  $[f], [g] \in \pi_n(X, x_0)$  deux éléments qui sont homotopes librement par une homotopie  $F : I^n \times [0, 1] \rightarrow X$ ,  $F(x, t) = F_t(x)$  telle que  $F_0 = f$ ,  $F_1 = g$  et  $F_t|_{\partial I^n} = cte.$  pour tout  $t \in [0, 1]$ . On note  $F_t|_{\partial I^n} = \gamma(t)$ , de sorte que  $\gamma : (I, \partial I) \rightarrow (X, x_0)$  est un lacet basé en  $x_0$ . L'homotopie

$$\bar{F}_t = \gamma|_{[0, t]} \cdot F_t, \quad t \in [0, 1]$$

est alors une homotopie d'applications  $(I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$  telle que  $\bar{F}_0 = f$  et  $\bar{F}_1 = \gamma \cdot g$ . (Intuitivement, l'on fait "glisser" le point base de  $F_t$  vers  $x_0$  le long de  $\gamma$ .) Ainsi  $[f]$  et  $[g]$  définissent le même élément dans le quotient  $\pi_n(X, x_0)/\pi_1(X, x_0)$ .  $\square$

2.4.2. *Suite exacte d'homotopie d'une fibration. Groupes d'homotopie relatifs.* Un outil clé pour calculer les groupes d'homotopie est la suite exacte longue d'une fibration. Celle-ci est un cas particulier de la suite exacte longue d'une paire, qui fait intervenir les groupes d'homotopie relatifs.

GROUPES D'HOMOTOPIE RELATIFS, SUITE EXACTE D'UNE PAIRE EN HOMOTOPIE. Soit  $X$  un espace topologique et  $A \subset X$  un sous-espace. Choisissons un point base  $x_0 \in A$ , que l'on regarde aussi comme point base pour  $X$ . Une question importante est celle de comprendre les morphismes induits par l'inclusion

$$\pi_n(A, x_0) \subset \pi_n(X, x_0), \quad n \geq 0.$$

Une réponse structurée est donnée par le fait de définir les *groupes d'homotopie relatifs*. Soit  $n \geq 1$ . Décomposons  $\partial I^n$  comme union de la *face initiale*  $I^{n-1} = \{t_n = 0\}$  et de l'union des autres faces qui constituent  $\partial I^n$ , que l'on note  $J^{n-1}$ . Ainsi

$$I^{n-1} \cup J^{n-1} = \partial I^n, \quad I^{n-1} \cap J^{n-1} = \partial I^{n-1}.$$

L'on note

$$\pi_n(X, A, x_0)$$

l'ensemble des classes d'homotopies d'applications

$$f : (I^n, I^{n-1}, J^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0).$$

Des arguments similaires en tout point à ceux de la section précédente montrent que  $\pi_n(X, A, x_0)$  porte une structure de groupe pour  $n \geq 2$ , commutative pour  $n \geq 3$ . L'ensemble  $\pi_1(X, A, x_0)$  ne possède pas de structure de groupe, mais il possède un point base donné par la classe d'homotopie de l'application constante égale à  $x_0$ . Un point de cet ensemble est une classe d'homotopie de chemins dans  $X$  qui commencent dans  $A$  et qui aboutissent à  $x_0$ .

Pour toute application de paires munies de points bases  $(X, A, x_0) \rightarrow (Y, B, y_0)$  l'on a un morphisme induit  $\pi_n(X, A, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, B, y_0)$ . En particulier, l'inclusion  $(X, x_0, x_0) \hookrightarrow (X, A, x_0)$  induit un morphisme

$$\pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(X, A, x_0), \quad n \geq 1.$$

Par ailleurs, l'on a un morphisme canonique

$$\pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, x_0), \quad [f] \mapsto [f|_{I^{n-1}}], \quad n \geq 1.$$

**Proposition 2.36.** *Pour toute paire  $(X, A)$  avec point base  $x_0 \in A$ , les morphismes induits par les inclusions et le morphisme de bord  $\partial$*

s'insèrent dans une suite exacte longue

$$\begin{aligned} \dots \xrightarrow{\partial} \pi_n(A, x_0) \rightarrow \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, x_0) \longrightarrow \dots \\ \dots \longrightarrow \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_0(A, x_0) \longrightarrow \pi_0(X, x_0). \end{aligned}$$

□

La démonstration de cette proposition consiste en une vérification directe.

Un mot d'explication est nécessaire concernant la partie finale de la suite exacte. En effet, les trois derniers termes ne portent pas de structure de groupe, mais sont seulement des ensembles à point base. Ainsi, la partie finale de la suite exacte

$$\pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_0(A, x_0) \longrightarrow \pi_0(X, x_0)$$

doit être interprétée comme une suite exacte d'ensembles avec point base au sens suivant.

**Définition 2.37.** Une suite

$$(A, a) \xrightarrow{f} (B, b) \xrightarrow{g} (C, c)$$

d'applications entre ensembles à point base est dite exacte en  $(B, b)$  si

$$\text{im}(f) = g^{-1}(c).$$

L'exactitude de la suite d'homotopie en  $\pi_1(X, A, x_0)$  signifie que les classes d'homotopie de chemins commençant sur  $A$  et aboutissant à  $x_0$  qui sont représentées par des lacets dans  $X$  (basés en  $x_0$ ) sont exactement celles pour lesquelles l'origine du chemin appartient à la composante connexe par arcs de  $x_0$  dans  $A$ . L'exactitude de la suite d'homotopie en  $\pi_0(A, x_0)$  signifie que les composantes connexes par arcs de  $A$  sur lesquelles peut se trouver l'origine d'un chemin dans  $X$  qui aboutit à  $x_0$  sont exactement celles qui sont incluses dans la composante connexe par arcs de  $x_0$  dans  $X$ . Ces deux affirmations sont tautologiques.

**SUITE EXACTE HOMOTOPIQUE D'UNE FIBRATION.** Soit  $E \xrightarrow{p} B$  une fibration localement triviale. L'on choisit des points bases  $b_0 \in B$  et  $x_0 \in E_{b_0}$ . L'on note  $F = E_{b_0}$ .

**Proposition 2.38.** La projection induit des isomorphismes

$$p_* : \pi_n(E, F, x_0) \xrightarrow{\cong} \pi_n(B, b_0), \quad n \geq 1.$$

Lorsque  $n = 1$  l'on doit interpréter l'énoncé comme affirmant le fait que la projection induit une bijection.

La preuve de ce résultat utilise une propriété clé des fibrations, à savoir *la propriété de relèvement des homotopies*.

**Proposition 2.39.** Soit  $E \xrightarrow{p} B$  une fibration localement triviale. Pour toute homotopie  $h = (h_t) : X \times [0, 1] \rightarrow B$  et tout relèvement  $\tilde{h}_0 : X \times \{0\} \rightarrow E$  de  $h_0 = h(\cdot, 0)$  à  $E$ , de sorte que  $p\tilde{h}_0 = h_0$ , il existe un relèvement  $\tilde{h} : X \times [0, 1] \rightarrow E$ ,  $p\tilde{h} = h$  qui coïncide avec  $\tilde{h}_0$  sur  $X \times \{0\}$ .

$$\begin{array}{ccc} X \times \{0\} & \xrightarrow{\tilde{h}_0} & E \\ \downarrow & \nearrow \tilde{h} & \downarrow p \\ X \times [0, 1] & \xrightarrow{h} & B \end{array}$$

*Démonstration.* Pour simplifier, faisons la preuve dans le cas d'une fibration localement triviale lisse, tous les espaces en question étant des variétés de dimension finie compactes. L'on choisit sur  $E$  une connexion, c'est-à-dire une distribution de rang égal à  $\dim B$  transverse aux fibres. Le transport parallèle est globalement défini puisque les fibres sont compactes et fournit un relèvement de tous les chemins  $h(x, \cdot)$ , uniquement déterminé une fois que la condition initiale  $\tilde{h}_0(x)$  est spécifiée, qui dépend de  $x$  avec le même degré de régularité que le relèvement  $\tilde{h}_0$  et que l'homotopie  $h$ .

Lorsque les fibres ne sont pas compactes il faut choisir la connexion avec plus de soin, de sorte que le transport parallèle soit propre.

Dans le cas général des espaces topologiques la raisonnement est fait localement sur des petits ouverts de trivialisations et l'on doit supposer que la base  $B$  est paracompacte (ce qui est une hypothèse par défaut dans le cas des variétés). Si l'on souhaite avoir la propriété de relèvement des homotopies uniquement pour les CW-complexes (voir plus bas pour la définition), l'hypothèse de paracompacité sur la base n'est pas nécessaire. Le lecteur trouvera sans peine en cas de besoin les détails dans la littérature.  $\square$

Dans la pratique l'on utilise (encore une fois!) une *version relative* de la propriété de relèvement des homotopies. Par définition, une application  $E \xrightarrow{p} B$  satisfait la *propriété de relèvement des homotopies pour une paire*  $(X, A)$  si, pour toute homotopie  $h = (h_t) : X \times [0, 1] \rightarrow B$  et pour tout relèvement  $\tilde{h}_{0,A} : X \times \{0\} \cup A \times [0, 1] \rightarrow E$  tel que  $p\tilde{h}_{0,A} = h|_{X \times \{0\} \cup A \times [0, 1]}$ , il existe un relèvement  $\tilde{h} : X \times [0, 1] \rightarrow E$  tel que  $p\tilde{h} = h$  qui prolonge  $\tilde{h}_{0,A}$ .

$$\begin{array}{ccc} X \times \{0\} \cup A \times [0, 1] & \xrightarrow{\tilde{h}_{0,A}} & E \\ \downarrow & \nearrow \tilde{h} & \downarrow p \\ X \times [0, 1] & \xrightarrow{h} & B \end{array}$$

*Démonstration de la Proposition 2.38.* Nous utilisons la propriété de relèvement des homotopies pour les cubes  $I^n$ ,  $n \geq 0$ . Puisque la paire  $(I^n \times I, I^n \times \{0\})$  est homéomorphe à la paire  $(I^n \times I, I^n \times \{0\} \cup (\partial I^n) \times I)$ , l'on déduit de la Proposition 2.39 que la propriété de relèvement des homotopies est satisfaite pour les paires  $(I^n \times I, I^n \times \{0\} \cup (\partial I^n) \times I)$ ,  $n \geq 0$ . Plus généralement, la propriété de relèvement des homotopies est satisfaite pour toute paire consistant de  $I^n \times I$  et du bord de ce cube privé de l'intérieur de l'une quelconque de ses faces.

$p_*$  EST SURJECTIVE. Soit  $f : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (B, b_0)$ . L'application constante égale à  $x_0$  relève cette application sur  $J^{n-1} = I^{n-1} \times \{1\} \cup (\partial I^{n-1}) \times I$ . Ceci n'est rien d'autre que  $\partial I^n$  privé de l'intérieur de sa face initiale  $I^{n-1}$  et, par ce qui précède, nous obtenons un relèvement  $\tilde{f}$  sur  $I^n$ . Puisque  $p\tilde{f} = f$  et  $f|_{\partial I^n} = b_0$ , l'on a  $\tilde{f}(\partial I^n) \subset F$ .

$p_*$  EST INJECTIVE. Soient  $\tilde{f}_0, \tilde{f}_1 : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (E, F, x_0)$  telles que  $p\tilde{f}_0$  et  $p\tilde{f}_1$  soient homotopes. Notons  $G : (I^n \times I, \partial I^n \times I) \rightarrow (B, b_0)$  une telle homotopie. L'on a un relèvement de  $G$  sur  $I^n \times \{0\} \cup I^n \times \{1\} \cup J^{n-1} \times I$ , qui n'est rien d'autre que le bord du cube  $I^n \times I$  privé de l'intérieur de la face  $I^{n-1} \times I$ , donné par  $\tilde{f}_0, \tilde{f}_1$ , et respectivement  $x_0$ . Nous obtenons alors un relèvement de  $G$  à  $I^n \times I$ , qui réalise une homotopie entre  $\tilde{f}_0$  et  $\tilde{f}_1$ .  $\square$

Comme conséquence directe de la Proposition 2.38 et de la suite exacte longue d'une paire en homotopie appliquée à la paire  $(E, F)$ , nous obtenons le résultat fondamental suivant.

**Théorème 2.40.** *Soit  $E \xrightarrow{p} B$  une fibration localement triviale avec points bases  $b_0 \in B$  et  $x_0 \in E_{b_0}$ . L'on note  $F = E_{b_0}$  et  $i : F \hookrightarrow E$  l'inclusion. L'on a une suite exacte longue en homotopie*

$$\dots \xrightarrow{\partial} \pi_n(F, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E, x_0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B, b_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F, x_0) \longrightarrow \dots$$

$$\dots \longrightarrow \pi_1(B, b_0) \rightarrow \pi_0(F, x_0) \rightarrow \pi_0(E, x_0) \rightarrow \pi_0(B, b_0).$$

$\square$

Le théorème affirme en particulier que la fin de la suite exacte longue de la paire  $(E, F)$  peut être complétée par l'ensemble à point base  $\pi_0(B, b_0)$ , et aussi que la composition  $\pi_1(E, x_0) \rightarrow \pi_1(E, F, x_0) \xrightarrow{p_*} \pi_1(B, b_0)$  coïncide avec le morphisme induit par la projection au niveau du groupe fondamental  $\pi_1(E, x_0) \xrightarrow{p_*} \pi_1(B, b_0)$ .

La description du morphisme de bord

$$\partial : \pi_n(B, b_0) \rightarrow \pi_{n-1}(F, x_0), \quad n \geq 1$$

est implicite dans la preuve de la Proposition 2.38 : étant donnée une classe  $[f] \in \pi_n(B, b_0)$  représentée par une application  $f : (I^n, \partial I^n) \rightarrow$



$(B, b_0)$ , l'on la relève en une application  $\tilde{f} : I^{n-1} \times I$  constante égale à  $x_0$  sur  $J^{n-1} = I^{n-1} \times \{1\} \cup (\partial I^{n-1}) \times I$ . L'on a alors  $\tilde{f}(I^{n-1}) \subset F$  puisque  $p\tilde{f} = f$  et l'on pose

$$\delta[f] = [f|_{\partial I^{n-1}}].$$

**Exercice.** Utiliser la propriété de relèvement des homotopies pour montrer que  $\partial$  est bien définie, et vérifier directement que c'est un morphisme de groupes pour  $n \geq 2$ .

**Exemple 2.41.** Nous avons vu précédemment que  $\pi_i(V_{s,k}^{\mathbb{R}}) = 0$  pour  $1 \leq i < s - k$  et  $\pi_i(V_{s,k}^{\mathbb{C}}) = 0$  pour  $1 \leq i < 2(s - k) + 1$ . Ceci implique

$$\pi_i(V_k^{\mathbb{K}}) = 0, \quad \pi_i(V_k^{\mathbb{C}}) = 0, \quad i \geq 1.$$

Considérons maintenant pour  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  les fibrations localement triviales

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}_k(\mathbb{K}) & \hookrightarrow & V_k^{\mathbb{K}} \\ & & \downarrow \\ & & G_k^{\mathbb{K}} \end{array}$$

La suite exacte d'homotopie pour chacune de ces deux fibrations montre en particulier les isomorphismes

$$\pi_n(G_k^{\mathbb{K}}) \xrightarrow{\cong} \pi_{n-1}(\mathrm{GL}_k(\mathbb{K})), \quad n \geq 1.$$

**Exercice 4.** Montrer que les isomorphismes  $\pi_1(G_k^{\mathbb{K}}) \xrightarrow{\cong} \pi_0(\mathrm{GL}_k(\mathbb{K}))$  sont compatibles avec la structure de groupe naturelle de  $\pi_0(\mathrm{GL}_k(\mathbb{K}))$ .

Montrer que les isomorphismes  $\pi_n(G_k^{\mathbb{K}}) \xrightarrow{\cong} \pi_{n-1}(\mathrm{GL}_k(\mathbb{K}))$ ,  $n \geq 2$  sont compatibles avec les actions respectives de  $\pi_1(G_k^{\mathbb{K}})$  et  $\pi_0(\mathrm{GL}_k(\mathbb{K}))$ .

Cet exercice montre que les descriptions des fibrés vectoriels sur les sphères obtenues dans les sections 2.1 et 2.3.2 sont équivalentes, en prenant en compte la Proposition 2.35.

2.4.3. *Degré d'une application.*  $\pi_n(S^n) \simeq \mathbb{Z}$ .

IL N'Y AURA PAS DE NOTES DE COURS SUR CETTE PARTIE. JE VOUS INVITE À ÉTUDIER LES RÉFÉRENCES INDIQUÉES.

Définition du degré d'une application lisse  $f : M^n \rightarrow N^n$ , avec  $M, N$  variétés compactes orientées. Référence : [Milnor 1965, Chapitre 5] ou [Hirsch, §5.1].

Théorème de Hopf : le degré réalise un isomorphisme  $\pi_n(S^n) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ .  
Référence : [Hirsch, §5.1].

### 3. RAPPELS D'HOMOLOGIE ET DE COHOMOLOGIE

IL N'Y AURA PAS DE NOTES DE COURS SUR CETTE PARTIE. JE VOUS INVITE À ÉTUDIER LES RÉFÉRENCES INDIQUÉES.

#### 3.1. Homologie et cohomologie singulière.

[Hatcher 2.1, 2.3, 2.A, 3.1-3.2], [Bredon Ch. IV, V.5-V.7, VI.1-VI.4]

#### 3.2. Homologie et cohomologie cellulaire.

[Hatcher 2.2], [Bredon IV.7-IV.10]

#### 3.3. Homologie à coefficients dans un système local.

[Hatcher 3.H], [McCleary 5.3], [Steenrod 30, 31]

## 4. CLASSES CARACTÉRISTIQUES

Les classes caractéristiques d'un fibré vectoriel mesurent son défaut de trivialité. Ce sont des classes de cohomologie sur la base. Nous expliquons dans ce chapitre deux approches de cette théorie, l'une axiomatique, particulièrement utile pour effectuer des calculs, l'autre géométrique, via la théorie de l'obstruction.

**4.1. Le point de vue axiomatique.** Ce point de vue a déjà été préfiguré dans la Remarque 2.32 : en vue de la bijection naturelle

$$\begin{aligned} [B, G_k^{\mathbb{K}}] &\xrightarrow{\sim} \mathcal{Vect}_k^{\mathbb{K}}(B), \\ [f] &\longmapsto f^* \gamma_k^{\mathbb{K}}, \end{aligned}$$

toute classe de cohomologie  $\alpha \in H^*(G_k^{\mathbb{K}})$  détermine pour tout fibré  $\xi \simeq f^* \gamma_k^{\mathbb{K}}$  de rang  $k$  sur une base  $B$  une classe de cohomologie  $\alpha(\xi) = f^* \alpha \in H^*(B)$ . L'application  $f : B \rightarrow G_k^{\mathbb{K}}$  telle que  $\xi \simeq f^* \gamma_k^{\mathbb{K}}$  est dite *application classifiante*. Elle est uniquement déterminée à homotopie près. La question du calcul de la cohomologie des Grassmanniennes devient par conséquent centrale.

Pour décrire la structure de la cohomologie des Grassmanniennes introduisons l'application

$$\mathbb{K}P^\infty \times \cdots \times \mathbb{K}P^\infty = G_1^{\mathbb{K}} \times \cdots \times G_1^{\mathbb{K}} \xrightarrow{f} G_k^{\mathbb{K}},$$

dont la source est un produit de  $k$  copies de  $\mathbb{K}P^\infty$ , définie comme suit. Pour tout  $s \geq 1$  l'on a un plongement

$$(\mathbb{K}^s)^{\times k} \rightarrow \mathbb{K}^{ks},$$

$$((x_1^1, \dots, x_1^s), \dots, (x_k^1, \dots, x_k^s)) \mapsto (x_1^1, \dots, x_k^1, x_1^2, \dots, x_k^2, \dots, x_1^s, \dots, x_k^s).$$

Celui-ci induit un plongement

$$(\mathbb{K}P^{s-1})^{\times k} \rightarrow G_{ks,k}^{\mathbb{K}}, \quad (d_1, \dots, d_k) \mapsto d_1 \oplus \cdots \oplus d_k$$

qui est compatible avec les inclusions  $\mathbb{K}P^{s'} \hookrightarrow \mathbb{K}P^{s''}$  et  $G_{s',k}^{\mathbb{K}} \hookrightarrow G_{s'',k}^{\mathbb{K}}$ ,  $s' \leq s''$  et induit à la limite le plongement

$$f : (\mathbb{K}P^\infty)^{\times k} \hookrightarrow G_k^{\mathbb{K}}.$$

Il est clair que

$$f^* \gamma_k^{\mathbb{K}} = p_1^* \gamma_1^{\mathbb{K}} \oplus \cdots \oplus p_k^* \gamma_1^{\mathbb{K}}.$$

Rappelons, en vue de l'énoncé qui suit, que l'on a des isomorphismes d'anneaux gradués

$$H^*(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}/2) \simeq \mathbb{Z}/2[x], \quad |x| = 1$$

et

$$H^*(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}[y], \quad |y| = 2.$$

**Remarque 4.1.** Dans ce dernier isomorphisme le générateur  $y$  est bien déterminé au signe près. En vue du fait que  $\pi_1(\mathbb{C}P^\infty) = 0$  l'on a aussi  $H_1(\mathbb{C}P^\infty) = 0$  et par conséquent  $H^2(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z}) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_2(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z}), \mathbb{Z})$ . Dans  $H_2(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$  nous avons un générateur canonique donné par la classe fondamentale  $[\mathbb{C}P^1]$  d'une droite projective  $\mathbb{C}P^1 \subset \mathbb{C}P^\infty$  munie de son orientation complexe.

**Convention.** L'on note  $y$  le générateur négatif de  $H^2(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z})$ , déterminé par la relation

$$\langle y, [\mathbb{C}P^1] \rangle = -1.$$

Cette convention est issue du fait que nous souhaitons que  $y$  représente la première classe de Chern du fibré tautologique  $\gamma_1^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$  (cf. plus bas). Or la restriction de ce dernier à  $\mathbb{C}P^1$  coïncide avec  $\mathcal{O}(-1)$ . Nous verrons plus bas que cette convention assure que la première classe de Chern  $c_1(\mathcal{O}(k))$  du fibré holomorphe en droites  $\mathcal{O}(k) \rightarrow \mathbb{C}P^1$  vérifie

$$\langle c_1(\mathcal{O}(k)), [\mathbb{C}P^1] \rangle = k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Notons  $x_i = p_i^*x \in H^1((\mathbb{R}P^\infty)^{\times k}; \mathbb{Z}/2)$  et  $y_i = p_i^*y \in H^2((\mathbb{C}P^\infty)^{\times k}; \mathbb{Z})$ . L'on a alors des isomorphismes d'anneaux gradués

$$H^*((\mathbb{R}P^\infty)^{\times k}; \mathbb{Z}/2) \simeq (H^*(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}/2))^{\otimes k} \simeq \mathbb{Z}/2[x_1, \dots, x_k]$$

et

$$H^*((\mathbb{C}P^\infty)^{\times k}; \mathbb{Z}) \simeq (H^*(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z}))^{\otimes k} \simeq \mathbb{Z}[y_1, \dots, y_k].$$

**Théorème 4.2** (cohomologie des Grassmanniennes).

(i) La cohomologie à coefficients  $\mathbb{Z}/2$  de la grassmannienne réelle  $G_k^{\mathbb{R}}$  est isomorphe en tant qu'anneau gradué à un anneau de polynômes en  $k$  variables de degrés  $1, 2, \dots, k$ .

L'application  $f : (\mathbb{R}P^\infty)^{\times k} \rightarrow G_k^{\mathbb{R}}$  induit en cohomologie à coefficients  $\mathbb{Z}/2$  une injection

$$f^* : H^*(G_k^{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}/2) \hookrightarrow H^*(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}/2)^{\otimes k} \simeq \mathbb{Z}/2[x_1, \dots, x_k], \quad |x_i| = 1.$$

L'image de  $f^*$  est l'anneau des polynômes symétriques  $\mathbb{Z}/2[x_1, \dots, x_k]^{\mathfrak{S}_k}$  en les variables  $x_1, \dots, x_k$ .

(i) La cohomologie à coefficients entiers de la grassmannienne complexe  $G_k^{\mathbb{C}}$  est isomorphe en tant qu'anneau gradué à un anneau de polynômes en  $k$  variables de degrés  $2, 4, \dots, 2k$ .

L'application  $f : (\mathbb{C}P^\infty)^{\times k} \rightarrow G_k^{\mathbb{C}}$  induit en cohomologie à coefficients entiers une injection

$$f^* : H^*(G_k^{\mathbb{C}}; \mathbb{Z}) \hookrightarrow H^*(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z})^{\otimes k} \simeq \mathbb{Z}[y_1, \dots, y_k], \quad |y_i| = 2.$$

L'image de  $f^*$  est l'anneau des polynômes symétriques  $\mathbb{Z}[y_1, \dots, y_k]^{\mathfrak{S}_k}$  en les variables  $y_1, \dots, y_k$ .  $\square$

Nous allons donner plus loin une démonstration de ce théorème basée sur le théorème de Leray-Hirsch appliqué à des fibrations appropriées impliquant les variétés de drapeaux.

Un point clé des énoncés ci-dessus est que l'application  $f^*$  fournit un système privilégié de générateurs pour la cohomologie des grassmanniennes réelle et complexe, à savoir les préimages des polynômes symétriques élémentaires. Il est bien connu que ces derniers constituent un système libre de générateurs pour l'algèbre des polynômes symétriques. Leurs préimages par  $f^*$  sont appelées *classes de Stiefel-Whitney universelles, notées  $w_1, \dots, w_k$*  (dans le cas réel), respectivement *classes de Chern universelles, notées  $c_1, \dots, c_k$*  (dans le cas complexe). Il est important à ce stade de réaliser qu'une algèbre de polynômes n'a pas de générateurs canoniquement définis. L'application  $f^*$  permet justement de mettre en évidence un système privilégié de générateurs pour la cohomologie des Grassmanniennes.

Ainsi

$$H^*(G_k^{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}/2) \simeq \mathbb{Z}/2[w_1, \dots, w_k], \quad |w_i| = i,$$

avec

$$f^*w_i = \sum \prod_{k_p \neq k_q} x_{k_1} \dots x_{k_i},$$

ou de manière plus explicite

$$f^*w_1 = x_1 + \dots + x_k,$$

$$f^*w_2 = \sum_{p \neq q} x_p x_q,$$

$$\vdots$$

$$f^*w_k = x_1 \dots x_k.$$

Aussi

$$H^*(G_k^{\mathbb{C}}; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}[c_1, \dots, c_k], \quad |c_i| = 2i,$$

avec

$$f^*c_i = \sum \prod_{k_p \neq k_q} y_{k_1} \dots y_{k_i},$$

ou de manière plus explicite

$$f^*c_1 = y_1 + \dots + y_k,$$

$$f^*c_2 = \sum_{p \neq q} y_p y_q,$$

$$\vdots$$

$$f^*c_k = y_1 \dots y_k.$$

**Remarque 4.3.** L'application  $f : (\mathbb{K}P^\infty)^{\times k} \rightarrow G_k^{\mathbb{K}}$  est appelée aussi application de scindement (à coefficients  $\mathbb{Z}/2$  dans le cas réel, respectivement à coefficients entiers dans le cas complexe). De manière générale, étant donné un fibré  $\xi \rightarrow B$ , on appelle application de scindement à coefficients dans  $A$  une application  $f : B' \rightarrow B$  telle que  $f^*\xi$  est isomorphe à une somme directe de fibrés en droites et telle que l'application  $f^* : H^*(B; A) \rightarrow H^*(B'; A)$  induite en cohomologie à coefficients dans  $A$  est injective.

Tout fibré réel (au-dessus d'une base paracompacte) admet une application de scindement à coefficients dans  $\mathbb{Z}/2$ , et tout fibré complexe admet une application de scindement à coefficients entiers. La construction est la suivante : étant donné  $\xi \rightarrow B$  de rang  $k$ , l'on considère la fibration localement triviale  $\mathbb{P}(\xi) \xrightarrow{p} B$  dont la fibre au-dessus d'un point  $b \in B$  est l'espace projectif  $\mathbb{P}(\xi_b)$ . Alors  $p^*\xi \simeq \eta \oplus \gamma$ , avec  $\eta$  de rang  $k-1$  et  $\gamma$  le fibré tautologique sur  $\mathbb{P}(\xi)$ , dont la restriction à chaque fibre  $\mathbb{P}(\xi)_b = \mathbb{P}(\xi_b)$  est le fibré tautologique sur le projectif.

$$\begin{array}{ccc} p^*\xi \simeq \eta \oplus \gamma & \longrightarrow & \xi \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{P}(\xi) & \xrightarrow{p} & B. \end{array}$$

L'on démontrera plus bas comme conséquence du théorème de Leray-Hirsch que l'application  $f^* : H^*(B; \mathbb{Z}/2) \rightarrow H^*(\mathbb{P}(\xi); \mathbb{Z}/2)$  est injective dans le cas réel, respectivement que  $f^* : H^*(B; \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(\mathbb{P}(\xi); \mathbb{Z})$  est injective dans le cas complexe. En itérant la construction pour  $\eta$  etc. l'on construit en  $k$  étapes une application de scindement pour  $\xi$ .

**Définition 4.4.** Soit  $\xi \rightarrow B$  un fibré de rang  $k$  sur  $\mathbb{R}$ . Soit  $f : B \rightarrow G_k^{\mathbb{R}}$  une application classifiante. La  $i$ -ème classe de Stiefel-Whitney de  $\xi$ , notée  $w_i(\xi)$ , est définie comme

$$w_i(\xi) = f^*w_i \in H^i(B; \mathbb{Z}/2), \quad i = 1, \dots, k,$$

avec  $w_i$  la  $i$ -ème classe de Stiefel-Whitney universelle.

L'on pose par définition  $w_0(\xi) = 1 \in H^0(B; \mathbb{Z}/2)$  et  $w_i(\xi) = 0 \in H^i(B; \mathbb{Z}/2)$  pour  $i > k$ .

La classe de Stiefel-Whitney totale  $w(\xi) \in \prod_{i \geq 0} H^i(B; \mathbb{Z}/2)$  est définie comme

$$w(\xi) = 1 + w_1(\xi) + w_2(\xi) + \dots + w_k(\xi).$$

L'on voit en particulier que, par définition, l'on a

$$w_i(\gamma_k^{\mathbb{R}}) = w_i \in H^i(G_k^{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}/2), \quad i = 1, \dots, k.$$

Ainsi la cohomologie de la grassmannienne  $G_k^{\mathbb{R}}$  à coefficients  $\mathbb{Z}/2$  est engendrée par les classes de Stiefel-Whitney du fibré universel  $\gamma_k^{\mathbb{R}}$ .

**Définition 4.5.** Soit  $\xi \rightarrow B$  un fibré de rang  $k$  sur  $\mathbb{C}$ . Soit  $f : B \rightarrow G_k^{\mathbb{C}}$  une application classifiante. La  $i$ -ème classe de Chern de  $\xi$ , notée  $c_i(\xi)$ , est définie comme

$$c_i(\xi) = f^*c_i \in H^{2i}(B; \mathbb{Z}), \quad i = 1, \dots, k,$$

avec  $c_i$  la  $i$ -ème classe de Chern universelle.

L'on pose par définition  $c_0(\xi) = 1 \in H^0(B; \mathbb{Z})$  et  $c_i(\xi) = 0 \in H^{2i}(B; \mathbb{Z})$  pour  $i > k$ .

La classe de Chern totale  $c(\xi) \in \prod_{i \geq 0} H^i(B; \mathbb{Z})$  est définie comme

$$c(\xi) = 1 + c_1(\xi) + c_2(\xi) + \dots + c_k(\xi).$$

L'on voit en particulier que, par définition, l'on a

$$c_i(\gamma_k^{\mathbb{C}}) = c_i \in H^{2i}(G_k^{\mathbb{C}}; \mathbb{Z}), \quad i = 1, \dots, k.$$

Ainsi la cohomologie de la grassmannienne  $G_k^{\mathbb{C}}$  à coefficients entiers est engendrée par les classes de Chern du fibré universel  $\gamma_k^{\mathbb{C}}$ .

**Théorème 4.6.** Les classes de Stiefel-Whitney des fibrés réels  $\xi \rightarrow B$  vérifient les propriétés suivantes, qui les déterminent de manière unique.

(1) (DEGRÉ)  $w_i(\xi) \in H^i(B; \mathbb{Z}/2)$  pour tout  $i \geq 0$ . De plus,  $w_0(\xi) = 1 \in H^0(B; \mathbb{Z}/2)$  et  $w_i(\xi) = 0$  pour  $i > \text{rang}(\xi)$ .

(2) (FONCTORIALITÉ) pour toute application  $f : B' \rightarrow B$  l'on a

$$w_i(f^*\xi) = f^*w_i(\xi), \quad i \geq 0.$$

(3) (SOMME DE WHITNEY)

$$w(\xi \oplus \eta) = w(\xi)w(\eta).$$

(4) (NORMALISATION) pour le fibré tautologique  $\gamma_{2,1}^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}P^1$ , la première classe de Stiefel-Whitney  $w_1(\gamma_{2,1}^{\mathbb{R}})$  est le générateur de  $H^1(\mathbb{R}P^1; \mathbb{Z}/2) \simeq \mathbb{Z}/2$ .

□

**Remarque.** L'axiome de normalisation apparaît parfois dans la littérature sous la forme suivante : pour le fibré tautologique  $\gamma_{2,1}^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}P^1$  l'on a  $w_1(\gamma_{2,1}^{\mathbb{R}}) \neq 0 \in H^1(\mathbb{R}P^1; \mathbb{Z}/2)$ . Ces deux formulations sont bien-sûr équivalentes puisque  $H^1(\mathbb{R}P^1; \mathbb{Z}/2) \simeq \mathbb{Z}/2$ .

**Théorème 4.7.** Les classes de Chern des fibrés complexes  $\xi \rightarrow B$  vérifient les propriétés suivantes, qui les déterminent de manière unique.

(1) (DEGRÉ)  $c_i(\xi) \in H^{2i}(B; \mathbb{Z})$  pour tout  $i \geq 0$ . De plus,  $c_0(\xi) = 1 \in H^0(B; \mathbb{Z})$  et  $c_i(\xi) = 0$  pour  $i > \text{rang}(\xi)$ .

(2) (FONCTORIALITÉ) pour toute application  $f : B' \rightarrow B$  l'on a

$$c_i(f^*\xi) = f^*c_i(\xi), \quad i \geq 0.$$



(3) (SOMME DE WHITNEY)

$$c(\xi \oplus \eta) = c(\xi)c(\eta).$$

(4) (NORMALISATION) pour le fibré tautologique  $\gamma_{2,1}^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}P^1$ , la première classe de Chern  $c_1(\gamma_{2,1}^{\mathbb{C}})$  est le générateur négatif de  $H^2(\mathbb{C}P^1; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ , au sens où

$$\langle c_1(\gamma_{2,1}^{\mathbb{C}}), [\mathbb{C}P^1] \rangle = -1.$$

□

Ces deux théorèmes ont des démonstrations en tout point similaires, nous donnons donc les détails uniquement pour le premier d'entre eux concernant les classes de Stiefel-Whitney.

*Démonstration du théorème 4.6.* Démontrons d'abord l'unicité. Par la propriété de (FONCTORIALITÉ), il suffit de montrer que les classes de Stiefel-Whitney des fibrés tautologiques  $\gamma_k^{\mathbb{R}} \rightarrow G_k^{\mathbb{R}}$ ,  $k \geq 1$  sont uniquement déterminées par les axiomes.

Nous utilisons l'application de scindement  $f : (\mathbb{R}P^\infty)^{\times k} \rightarrow G_k^{\mathbb{R}}$ , qui vérifie  $f^* \gamma_k^{\mathbb{R}} \simeq p_1^* \gamma_1^{\mathbb{R}} \oplus \dots \oplus p_k^* \gamma_1^{\mathbb{R}}$  et dont l'application induite en cohomologie est injective. Puisque  $w_i(p_1^* \gamma_1^{\mathbb{R}} \oplus \dots \oplus p_k^* \gamma_1^{\mathbb{R}}) = f^* w_i(\gamma_k^{\mathbb{R}})$ , il suffit de montrer que les classes de Stiefel-Whitney du fibré  $p_1^* \gamma_1^{\mathbb{R}} \oplus \dots \oplus p_k^* \gamma_1^{\mathbb{R}} \rightarrow (\mathbb{R}P^\infty)^{\times k}$  sont uniquement déterminées par les axiomes.

Remarquons le fait que les axiomes de (NORMALISATION) et (FONCTORIALITÉ) impliquent

$$w_1(\gamma_1^{\mathbb{R}}) = x,$$

où  $H^*(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}/2) \simeq \mathbb{Z}/2[x]$ ,  $|x| = 1$ . En effet, l'inclusion  $incl : \mathbb{R}P^1 \subset \mathbb{R}P^\infty$  est telle que  $incl^* \gamma_1^{\mathbb{R}} = \gamma_{2,1}^{\mathbb{R}}$ . En appliquant les axiomes de (FONCTORIALITÉ) et (NORMALISATION) l'on voit que  $incl^* w_1(\gamma_1^{\mathbb{R}}) = w_1(\gamma_{2,1}^{\mathbb{R}})$  est non-nulle dans  $H^1(\mathbb{R}P^1; \mathbb{Z}/2)$ , de sorte que nécessairement  $w_1(\gamma_1^{\mathbb{R}})$  est non-nulle dans  $H^1(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}/2)$ . Puisque ce dernier groupe est de rang 1, il s'ensuit que  $w_1(\gamma_1^{\mathbb{R}}) = x$ .

Par les axiomes de (SOMME DE WHITNEY) et de (FONCTORIALITÉ) l'on a

$$\begin{aligned} w(p_1^* \gamma_1^{\mathbb{R}} \oplus \dots \oplus p_k^* \gamma_1^{\mathbb{R}}) &= w(p_1^* \gamma_1^{\mathbb{R}}) \dots w(p_k^* \gamma_1^{\mathbb{R}}) \\ &= p_1^* w(\gamma_1^{\mathbb{R}}) \dots p_k^* w(\gamma_1^{\mathbb{R}}) \\ &= p_1^*(1+x) \dots p_k^*(1+x) \\ &= (1+x_1) \dots (1+x_k) \\ &= 1 + \sum_{i=1}^k \sigma_i(x_1, \dots, x_k), \end{aligned}$$

avec  $\sigma_i \in \mathbb{Z}/2[x_1, \dots, x_k]^{\mathfrak{S}_k}$  le  $i$ -ème polynôme symétrique élémentaire en les variables  $x_1, \dots, x_k$ . Puisque  $\sigma_i(x_1, \dots, x_k)$  est la composante de degré  $i$  dans  $\prod_{j=1}^n (1 + x_j)$ , on en déduit que l'on a nécessairement

$$w_i(p_1^* \gamma_1^{\mathbb{R}} \oplus \dots \oplus p_k^* \gamma_1^{\mathbb{R}}) = \sigma_i(x_1, \dots, x_k).$$

Les classes de Stiefel-Whitney du fibré  $p_1^* \gamma_1^{\mathbb{R}} \oplus \dots \oplus p_k^* \gamma_1^{\mathbb{R}}$  sont donc uniquement déterminées, et il en est de même pour celles de  $\gamma_k^{\mathbb{R}}$ . L'unicité est démontrée.

Démontrons que notre définition 4.5 fournit des classes de cohomologie qui satisfont les propriétés précédentes. La propriété (DEGRÉ) est claire par définition, et la propriété de (FONCTORIALITÉ) découle directement du fait que nous avons défini ces classes par tiré-en-arrière de classes sur les grassmanniennes via des applications classifiantes (cf. la discussion préliminaire dans ce chapitre et la Remarque 2.32).

L'axiome de (NORMALISATION) est vérifié comme suit. Par définition nous avons  $w_1(\gamma_1^{\mathbb{R}}) = x$ , où  $H^*(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}/2) \simeq \mathbb{Z}/2[x]$ ,  $|x| = 1$ . Considérons l'inclusion  $incl : \mathbb{R}P^1 \hookrightarrow \mathbb{R}P^\infty$ , qui vérifie  $incl^* \gamma_1^{\mathbb{R}} = \gamma_{2,1}^{\mathbb{R}}$ . Le point clé est que  $incl^* : H^*(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}/2) \rightarrow H^*(\mathbb{R}P^1; \mathbb{Z}/2)$  est un isomorphisme en tout degré  $0 \leq * \leq 1$ . Ainsi  $w_1(\gamma_{2,1}^{\mathbb{R}}) = incl^* w_1(\gamma_1^{\mathbb{R}}) = incl^* x$  est l'unique générateur de  $H^1(\mathbb{R}P^1; \mathbb{Z}/2) \simeq \mathbb{Z}/2$ .

L'axiome de (SOMME DE WHITNEY) est vérifié comme suit. Soient  $\xi, \eta$  deux fibrés de rangs respectifs  $m$  et  $n$  sur une base  $B$ , avec des applications classifiantes  $f : B \rightarrow G_m^{\mathbb{R}}$ ,  $\xi \simeq f^* \gamma_m^{\mathbb{R}}$  et  $g : B \rightarrow G_n^{\mathbb{R}}$ ,  $\eta \simeq g^* \gamma_n^{\mathbb{R}}$ . Pour plus de fluidité dans les notations nous écrivons dans ce qui suit  $\gamma_m$  au lieu de  $\gamma_m^{\mathbb{R}}$ ,  $G_m$  au lieu de  $G_m^{\mathbb{R}}$  etc. Considérons le diagramme suivant, dans lequel  $diag : B \rightarrow B \times B$  désigne le plongement diagonal.

$$\begin{array}{ccccc} \xi \oplus \eta & \longrightarrow & p_1^* \xi \oplus p_2^* \eta & \longrightarrow & p_1^* \gamma_m \oplus p_2^* \gamma_n \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ B & \xrightarrow{\quad diag \quad} & B \times B & \xrightarrow{\quad (f,g) \quad} & G_m \times G_n \end{array}$$

Celui-ci est un diagramme de tirés-en-arrière de fibrés. En effet

$$(f, g)^*(p_1^* \gamma_m \oplus p_2^* \gamma_n) = p_1^* \xi \oplus p_2^* \eta$$

puisque  $p_1 \circ (f, g) = f \circ p_1$  et  $p_2 \circ (f, g) = g \circ p_2$ , et aussi

$$diag^*(p_1^* \xi \oplus p_2^* \eta) \simeq \xi \oplus \eta$$

par définition de la somme directe de deux fibrés. Par functorialité de la classe de Stiefel-Whitney totale et du produit en cohomologie, il suffit donc de démontrer l'identité

$$(4.1) \quad w(p_1^* \gamma_m \oplus p_2^* \gamma_n) = w(p_1^* \gamma_m) w(p_2^* \gamma_n).$$

Nous utilisons maintenant les applications de scindement

$$f_m : G_1^{\times m} \rightarrow G_m, \quad f_n : G_1^{\times n} \rightarrow G_n$$

et le diagramme de fibrés

$$\begin{array}{ccc} p_1^* \gamma_m \oplus p_2^* \gamma_n & \longleftarrow & p_1^* \gamma_1 \oplus \cdots \oplus p_m^* \gamma_1 \oplus (p'_1)^* \gamma_1 \oplus \cdots \oplus (p'_n)^* \gamma_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ G_m \times G_n & \xleftarrow{(f_m, f_n)} & G_1^{\times m} \times G_1^{\times n} \end{array}$$

Puisque  $f_m^*$  et  $f_n^*$  sont injectives en cohomologie, il en est de même pour  $(f_m, f_n)^*$ . Pour démontrer l'égalité (4.1) il suffit donc de montrer par functorialité

$$\begin{aligned} w(p_1^* \gamma_1 \oplus \cdots \oplus p_m^* \gamma_1 \oplus (p'_1)^* \gamma_1 \oplus \cdots \oplus (p'_n)^* \gamma_1) \\ = w(p_1^* \gamma_1 \oplus \cdots \oplus p_m^* \gamma_1) w((p'_1)^* \gamma_1 \oplus \cdots \oplus (p'_n)^* \gamma_1). \end{aligned}$$

Cette dernière égalité découle directement de l'associativité du produit en cohomologie en vertu de l'égalité générale

$$w(p_1^* \gamma_1 \oplus \cdots \oplus p_k^* \gamma_1 \rightarrow G_1^{\times k}) = (1 + x_1) \dots (1 + x_n).$$

En effet, par définition l'on a

$$\begin{aligned} w(p_1^* \gamma_1 \oplus \cdots \oplus p_k^* \gamma_1) &= w(f_k^* \gamma_k) \\ &= f_k^* w(\gamma_k) \\ &= f_k^*(1 + w_1 + \cdots + w_k) \\ &= 1 + \sigma_1(x_1, \dots, x_k) + \cdots + \sigma_k(x_1, \dots, x_k) \\ &= (1 + x_1) \dots (1 + x_k). \end{aligned}$$

□

Voici quelques conséquences immédiates des axiomes.

- Si  $\xi \simeq \eta$  alors  $w(\xi) = w(\eta)$ .  
En effet,  $\xi$  et  $\eta$  ont des applications classifiantes homotopes.
- Soit  $\epsilon_k$  un fibré trivial de rang  $k$ . Alors  $w_i(\epsilon_k) = 0$  pour tout  $i \geq 1$ .  
En effet,  $\epsilon_k$  est le tiré-en-arrière du fibré trivial sur un point.
- Supposons que le fibré  $\xi$  de rang  $k$  admet  $\ell$  sections linéairement indépendantes en chaque point. Alors

$$w_{k-\ell+1}(\xi) = 0, \dots, w_k(\xi) = 0.$$

En effet, dans cette situation  $\xi$  s'écrit  $\xi \simeq \eta \oplus \epsilon_\ell$  et le résultat découle du point précédent et de l'axiome de (SOMME DE WHITNEY).

**Exemple.** Puisque  $\nu_{\mathbb{R}^{n+1}} S^n \simeq \epsilon_1$  l'on déduit que  $TS^n \oplus \epsilon_1 \simeq \epsilon_{n+1}$ , de sorte que

$$w(TS^n) = 1.$$

**Exemple.** Notons  $H^*(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}/2) \simeq \mathbb{Z}/2[x]/(x^{n+1})$ . Alors

$$w(\gamma_{n+1,1} \rightarrow \mathbb{R}P^n) = 1 + x.$$

**Exemple.** Nous avons  $T\mathbb{R}P^n \simeq \text{Hom}(\gamma_1, \gamma_1^\perp)$ , où l'on note  $\gamma_1 = \gamma_{n+1,1}^{\mathbb{R}}$ . Ici  $\gamma_1^\perp$  désigne le fibré de rang  $n$  sur  $\mathbb{R}P^n$  dont la fibre au-dessus d'une droite  $d \subset \mathbb{R}^{n+1}$  est l'hyperplan orthogonal à  $d$ . En utilisant le fait que  $\gamma_1 \oplus \gamma_1^\perp \simeq \epsilon_{n+1}$  et  $\text{Hom}(\gamma_1, \gamma_1) \simeq \epsilon_1$ , et aussi  $\gamma_1 \simeq \gamma_1^*$  en tant que fibrés réels, nous obtenons

$$\begin{aligned} w(T\mathbb{R}P^n) &= w(T\mathbb{R}P^n \oplus \epsilon_1) \\ &= w(\text{Hom}(\gamma_1, \epsilon_{n+1})) \\ &= w((\gamma_1^*)^{\oplus(n+1)}) \\ &= w(\gamma_1)^{n+1} \\ &= (1+x)^{n+1}, \end{aligned}$$

où  $H^*(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}/2) \simeq \mathbb{Z}/2[x]/(x^{n+1})$ . Ainsi

$$w_i(T\mathbb{R}P^n) = \binom{n+1}{i} x^i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

**Exercice.** Montrer que, si  $\mathbb{R}P^n$  est parallélisable, c'est-à-dire  $T\mathbb{R}P^n$  est trivial, alors nécessairement  $n$  est de la forme

$$n = 2^k - 1, \quad k \geq 0.$$

**Remarque.** Des arguments plus sophistiqués, toujours de nature topologique, restreignent davantage la situation : l'on a nécessairement  $n = 0, 1, 3, 7$ .

Voici une application spectaculaire, due à Stiefel (cf. [Milnor, Théorème 4.7, p. 48]).

**Théorème 4.8.** *Supposons qu'il existe une application bilinéaire*

$$p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

*sans diviseurs de zéro. Alors  $\mathbb{R}P^{n-1}$  est parallélisable et par conséquent  $n$  est nécessairement de la forme*

$$n = 2^k, \quad k \geq 0.$$

□

Tenant compte de la remarque précédente, seulement les cas  $n = 1, 2, 4, 8$  sont possibles. Ceux-ci sont effectivement réalisables via les structures multiplicatives sur  $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ .

Nous allons démontrer par ailleurs dans l'Annexe G le résultat suivant :

**Proposition 4.9.** *Soit  $B$  une variété compacte. La première classe de Stiefel-Whitney réalise un isomorphisme de groupes abéliens*

$$w_1 : \text{Vect}_1(B) \xrightarrow{\sim} H^1(B; \mathbb{Z}/2)$$

et la première classe de Chern réalise un isomorphisme de groupes abéliens

$$c_1 : \mathcal{V}ect_1(B) \xrightarrow{\sim} H^2(B; \mathbb{Z}).$$

La structure de groupe abélien sur  $\mathcal{V}ect_1^{\mathbb{K}}(B)$  est donnée par le produit tensoriel de fibrés en droites.

**4.2. Le point de vue de la théorie de l'obstruction.** L'idée de la théorie de l'obstruction est la suivante : étant donnés des espaces  $X$ ,  $Y$ , un sous-espace  $A \subseteq X$  et une application continue  $\bar{g} : A \rightarrow Y$ , l'on souhaite l'étendre à une application définie sur  $X$ .

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\bar{g}} & Y \\ \downarrow & \nearrow g & \\ X & & \end{array}$$

Lorsque  $X$  est obtenu à partir de  $A$  par attachement successif de cellules (on dit que  $(X, A)$  est un CW-complexe relatif, cf. Annexe B), l'on essaie de construire cette extension de façon inductive sur les squelettes de  $X$ . Pour passer du squelette  $X_n$  au squelette  $X_{n+1}$  l'on rencontre une obstruction représentée par une classe de cohomologie qui vit dans  $H^{n+1}(X, A; \pi_n Y)$ . L'annulation de cette classe est équivalente au fait que l'extension donnée sur  $X_n$  peut être modifiée rel  $X_{n-1}$  pour ensuite être étendue à  $X_{n+1}$ .

Ce procédé peut être appliqué dans des situations variées : étant données deux applications  $g_0, g_1 : X \rightarrow Y$  et une homotopie  $g_0|_A \simeq g_1|_A$ , l'on souhaite étendre celle-ci à une homotopie globale sur  $X$

$$\begin{array}{ccc} X \times \{0, 1\} \cup A \times I & \xrightarrow{\bar{g}} & Y \\ \downarrow & \nearrow g & \\ X \times I & & \end{array}$$

Ou encore, étant donnée une fibration  $E \xrightarrow{p} X$  et une section  $\bar{s}$  définie le long de  $A$ , l'on souhaite étendre celle-ci en une section globale sur  $X$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\bar{s}} & E \\ \downarrow & \nearrow s & \downarrow p \\ X & \xlongequal{\quad} & X \end{array}$$

Ce dernier problème est le plus général.

**4.2.1. Deux constructions explicites.** Nous discutons dans cette section deux exemples significatifs.

**Théorème 4.10.** *Soit  $X$  un CW-complexe. L'on a une bijection*

$$[X, S^1] \simeq H^1(X; \mathbb{Z}).$$

**Remarque 4.11.** *La bijection que nous allons construire sera fonctorielle en  $X$  et dépendra uniquement du choix d'un générateur de  $H^1(S^1; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ , ou encore, de manière équivalente, du choix d'une orientation sur  $S^1$ .*

L'ensemble  $[X, S^1]$  possède une structure de groupe induite par la structure de groupe de  $S^1$ . La bijection que nous allons construire sera en fait un isomorphisme de groupes.

*Démonstration.* Le choix d'une orientation de  $S^1$  détermine un générateur privilégié  $\bar{\alpha} \in H^1(S^1; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ . L'on définit

$$T : [X, S^1] \rightarrow H^1(X; \mathbb{Z}), \quad T([g]) = g^*\bar{\alpha}.$$

Fixons un point base  $p \in S^1$ . Soit  $X_n$  le  $n$ -squelette de  $X$ .

$T$  EST SURJECTIVE. Soit  $\alpha \in H^1(X; \mathbb{Z})$ , que l'on représente par un cocycle cellulaire  $\theta \in C^1(X; \mathbb{Z}) = H^1(X_1, X_0; \mathbb{Z})$ . Nous souhaitons construire une fonction  $g : X \rightarrow S^1$  telle que  $g^*\bar{\alpha} = \alpha$ .

Définissons  $g$  sur le 0-squelette en envoyant toutes les 0-cellules sur le point base  $p \in S^1$ .

Définissons  $g$  sur le 1-squelette de la manière suivante : sur une cellule  $e_i^1$  déterminée par son application caractéristique  $\phi_i : (I, \partial I) \rightarrow (X_1, X_0)$  l'on définit  $g$  de manière à ce que l'application composée  $g \circ \phi_i : (I, \partial I) \rightarrow (S^1, p)$  soit de degré  $\theta(e_i^1) \in \mathbb{Z}$ . Si l'on considère sur  $S^1$  la structure cellulaire donnée par une unique cellule de dimension 0 égale à  $p$  et une cellule de dimension 1 donnée par une application  $(I, \partial I) \rightarrow (S^1, p)$  compatible avec l'orientation, le cocycle  $\bar{\theta} \in C^1(S^1; \mathbb{Z})$  qui prend la valeur 1 sur cette unique cellule de dimension 1 représente la classe  $\bar{\alpha}$  et l'on a

$$g^*\bar{\theta} = \theta.$$

Nous souhaitons étendre  $g$  au 2-squelette. Soit  $e_\alpha^2$  une 2-cellule avec application caractéristique  $\phi_\alpha : (D^2, \partial D^2) \rightarrow (X_2, X_1)$ . Puisque  $\theta$  est un cocycle nous avons

$$0 = \delta\theta(e_\alpha^2) = \theta(\partial e_\alpha^2) = \sum_i [e_\alpha^2 : e_i^1] \theta(e_i^1).$$

Cette dernière expression est égale à

$$\deg(g \circ \phi_\alpha|_{\partial D^2} : \partial D^2 \rightarrow S^1).$$

En effet, soit  $p_i : X_1 \rightarrow e_i^1/\partial e_i^1$  l'application qui contracte le complémentaire de l'intérieur de  $e_i^1$  sur un point. Alors  $[e_\alpha^2 : e_i^1] = \deg(p_i \circ \phi_\alpha|_{\partial D^2} : \partial D^2 \rightarrow e_i^1/\partial e_i^1)$ , et  $\theta(e_i^1) = \deg(g \circ \phi_i : (I, \partial I) \rightarrow (S^1, p)) = \deg(g : e_i^1/\partial e_i^1 \rightarrow (S^1, p))$ , de sorte que  $[e_\alpha^2 : e_i^1] \theta(e_i^1) = \deg(g \circ p_i \circ \phi_\alpha|_{\partial D^2} : \partial D^2 \rightarrow S^1)$ . L'application  $g : X_1 \rightarrow S^1$  factorise par  $X_1/X_0$ , qui est un bouquet de cercles, et l'on a  $\deg(g \circ \phi_\alpha|_{\partial D^2} : \partial D^2 \rightarrow S^1) = \sum_i \deg(g \circ p_i \circ \phi_\alpha|_{\partial D^2} : \partial D^2 \rightarrow S^1)$ , avec  $p_i$  la contraction du bouquet de cercles sur le  $i$ -ème cercle du bouquet.

Puisque le degré de  $g \circ \phi_\alpha|_{\partial D^2} : \partial D^2 \rightarrow S^1$  est nul, elle admet une extension à  $D^2$ . Ceci détermine une extension de  $g$  à  $X_2$ .

Supposons avoir étendu  $g$  à  $X_n$ ,  $n \geq 2$ . L'obstruction pour étendre  $g$  à une cellule  $e_\beta^{n+1}$  est représentée par la classe d'homotopie libre  $[g \circ \phi_\beta|_{\partial D^{n+1}} : \partial D^{n+1} \rightarrow S^1] \in [S^n, S^1] = \pi_n(S^1) = 0$ ,  $n \geq 2$ . Toutes ces obstructions sont donc nulles et nous pouvons étendre  $g$  au squelette  $X_{n+1}$ .

La relation  $g^*\bar{\theta} = \theta$  montre que  $g^*\bar{\alpha} = \alpha$ .

$T$  EST INJECTIVE. Soient  $g_0, g_1 : X \rightarrow S^1$  telles que  $g^*\bar{\alpha} = g^*\bar{\alpha}$ . Nous souhaitons montrer que  $g_0$  et  $g_1$  sont homotopes et nous allons procéder par récurrence sur la dimension des squelettes de  $X$ .

Les applications  $g_0$  et  $g_1$  sont homotopes sur  $X_0$  puisque  $S^1$  est connexe par arcs. Nous avons même mieux : toute application  $g : X \rightarrow S^1$  est homotope à une application qui envoie  $X_0$  sur le point  $p \in S^1$ . Ceci découle de la connexité par arcs de  $S^1$ , qui assure qu'une telle homotopie existe sur  $X_0$ , et de la propriété d'extension des homotopies pour la paire  $(X, X_0)$ , qui assure que l'homotopie sur  $X_0$  s'étend à une homotopie globale sur  $X$  (cf. la discussion autour de la Proposition 2.39). Nous pouvons donc supposer sans perte de généralité que  $g_0|_{X_0} = g_1|_{X_0} \equiv p$ .

Montrons maintenant que  $g_0$  et  $g_1$  sont homotopes sur  $X_1$ . Notons

$$\theta_k = g_k^*\bar{\theta} \in C^1(X; \mathbb{Z}), \quad k = 1, 2.$$

Ainsi  $\theta_k(e_i^1) = \deg(g_k \circ \phi_i : (I, \partial I) \rightarrow (S^1, p))$ . L'hypothèse affirme l'existence d'une cochaîne

$$d \in C^0(X; \mathbb{Z}) = H^0(X_0; \mathbb{Z}) \simeq \prod_j \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}\langle e_j^0 \rangle, \mathbb{Z})$$

telle que  $\theta_1 - \theta_0 = \delta d$ , ou encore

$$\theta_1(e_i^1) = \theta_0(e_i^1) + d(\phi_i(1)) - d(\phi_i(0)).$$

Puisque deux applications  $S^1 \rightarrow S^1$  sont homotopes si et seulement si elles ont le même degré, l'on déduit que  $g_0$  et  $g_1$  sont homotopes sur  $X_1$  relativement à  $X_0$ , c'est-à-dire en gardant leurs valeurs sur  $X_0$  fixes, si et seulement si  $\theta_0 = \theta_1$ . Or la cochaîne  $d$  n'est pas nécessairement nulle et donc, pour trouver une homotopie de  $g_0$  vers  $g_1$  sur  $X_1$ , nous devons nous laisser la liberté d'altérer les valeurs de  $g_0$  sur  $X_0$ . Le rôle de la cochaîne  $d \in C^0(X; \mathbb{Z})$  sera de prescrire une telle homotopie le long du 0-squelette.

Considérons pour chaque cellule  $e_j^0$  une homotopie

$$h : \{e_j^0\} \times I \rightarrow S^1$$

telle que  $h(e_j^0 \times \partial I) = \{p\}$  et

$$\deg(h) = d(e_j^0).$$



Nous interprétons cette homotopie comme une homotopie de  $g_0$  sur  $X_0$ . La propriété d'extension des homotopies pour la paire  $(X, X_0)$  assure que cette homotopie s'étend en une homotopie sur  $X$ , que l'on note aussi  $h$ . Soit  $g'_0 = h(\cdot, 1)$  et notons  $\theta'_0 = g'_0 \circ \bar{h}$ . Pour toute 1-cellule  $e_i^1$ , en posant  $\bar{h}(t) = h(1-t)$ , l'on obtient

$$\begin{aligned} \theta'_0(e_i^1) &= \deg(g'_0 \circ \phi_i : (I, \partial I) \rightarrow (S^1, p)) \\ &= \deg(\bar{h}(\phi_i(0)) \cup g_0 \cup h(\phi_i(1)) : \{\phi_i(0)\} \times I \cup I \cup \{\phi_i(1)\} \times I \rightarrow S^1) \\ &= -d(\phi_i(0)) + \theta_0(e_i^1) + d(\phi_i(1)) \\ &= \theta_1(e_i^1). \end{aligned}$$

Ainsi  $g'_0$  et  $g_1$  sont homotopes sur  $X_1$  rel  $X_0$ , et  $g_0$  et  $g_1$  sont homotopes sur  $X_1$ .

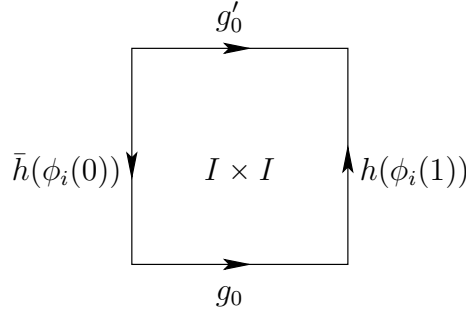


FIGURE 8. La relation  $\theta'_0(e_i^1) = \theta_0(e_i^1) + d(\phi_i(1)) - d(\phi_i(0))$  découle du fait que le degré d'une application  $\partial(I \times I) \rightarrow S^1$  qui s'étend à  $I \times I$  est nul.

Supposons que l'on ait construit une homotopie  $h_n$  entre  $g_0$  et  $g_1$  sur le squelette  $X_n$ ,  $n \geq 1$ . L'obstruction à étendre cette homotopie à une cellule  $e_\beta^{n+1}$  est représentée par la classe d'homotopie libre de l'application  $(g_0 \cup h_n \cup g_1) \circ \phi_\beta \times \text{Id} : \partial(D^{n+1} \times I) = D^{n+1} \times \{0\} \cup \partial D^{n+1} \times I \cup D^{n+1} \times \{1\} \rightarrow S^1 \in [S^{n+1}, S^1] = \pi_{n+1}(S^1) = 0$ ,  $n \geq 1$ . Nous pouvons donc étendre l'homotopie  $h_n$  au squelette  $X_{n+1}$  et les applications  $g_0$  et  $g_1$  sont homotopes sur  $X_{n+1}$ .

Ceci achève la preuve par récurrence.  $\square$

**Remarque 4.12** (Espaces de Eilenberg-MacLane). *Le théorème précédent peut être lu comme donnant une interprétation homotopique du premier groupe de cohomologie à coefficients entiers  $H^1(X; \mathbb{Z})$ . Les propriétés homotopiques du cercle que nous avons utilisées étaient les suivantes :  $S^1$  est connexe par arcs,  $\pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$ ,  $\pi_i(S^1) = 0$ ,  $i \geq 2$ .*

**Définition 4.13.** *Soit  $G$  un groupe abélien et  $n \geq 1$  un entier. Un CW-complexe connexe par arcs  $K$  est un espace de Eilenberg-MacLane de type  $(G, n)$  s'il vérifie*

$$\pi_n(K) \simeq G, \quad \pi_i(K) = 0, \quad i \neq n.$$

On dit aussi que  $K$  est un  $K(G, n)$ .

Par exemple,  $S^1$  est un  $K(\mathbb{Z}, 1)$ ,  $\mathbb{C}P^\infty$  est un  $K(\mathbb{Z}, 2)$ ,  $\mathbb{R}P^\infty$  est un  $K(\mathbb{Z}/2, 1)$ .

Pour tout choix de groupe abélien  $G$  et pour tout choix d'entier  $n \geq 1$  il existe un  $K(G, n)$ . Celui-ci est obtenu en présentant  $G$  par générateurs et relations. L'on part avec un squelette de dimension 0 réduit à un point, les squelettes  $X_i$ ,  $1 \leq i < n$  coïncident avec  $X_0$ , le squelette  $X_n$  est obtenu en rajoutant une cellule pour chaque générateur de  $G$ , le squelette  $X_{n+1}$  est obtenu en rajoutant une cellule pour chaque relation avec application d'attachement donnée par la relation, le squelette  $X_{n+2}$  est obtenu en rajoutant des  $n+2$ -cellules pour "tuer" le  $\pi_{n+1}$  qui a été créé lors de la construction de  $X_{n+1}$ , et plus généralement le squelette  $X_{n+p+1}$ ,  $p \geq 1$  est obtenu en rajoutant des  $n+p+1$ -cellules pour "tuer" le  $\pi_{n+p}$  qui a été créé lors de la construction de  $X_{n+p}$ .

Une démonstration similaire à celle du théorème 4.10 permet d'obtenir le résultat suivant :

**Théorème 4.14.** Soit  $G$  un groupe abélien,  $n \geq 1$  un entier et  $K$  un  $K(G, n)$ . Le choix d'un isomorphisme entre  $\pi_n(K)$  et  $G$  détermine une bijection fonctorielle

$$[X, K] \xrightarrow{\cong} H^n(X; G).$$

□

Le point clé ici est le théorème de Hurewicz (cf. Annexe) qui affirme que pour un espace  $K$  qui est un  $K(G, n)$  l'on a un isomorphisme  $\pi_n(K) \xrightarrow{\cong} H_n(K; \mathbb{Z})$ ,  $[f] \mapsto f_*[S^n]$ . Ainsi

$H^n(K; G) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_n(K; \mathbb{Z}), G) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\pi_n(K), G) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(G, G)$  possède une classe canonique  $\bar{\alpha}$  qui correspond sous les isomorphismes précédents à  $\text{Id}_G$ . La correspondance du théorème est alors donnée par

$$[X, K] \longrightarrow H^n(X; G), \quad f \mapsto f^*\bar{\alpha}.$$

Comme conséquence de la fonctorialité de la correspondance donnée par le théorème l'on déduit qu'un  $K(G, n)$  est unique à homotopie près.

Notre deuxième exemple concerne les fibrations.

**Théorème 4.15.** Soit  $L \xrightarrow{p} B$  un fibré vectoriel orienté de rang 2 sur  $\mathbb{R}$  dont la base est un CW-complexe.

(i) Le fibré  $L$  admet une section partout non-nulle au-dessus du squelette  $B_1$ . Deux telles sections sont homotopes au-dessus de  $B_0$  dans l'espace des sections qui ne s'annulent pas.

(ii) Il existe une classe de cohomologie  $e(L) \in H^2(B; \mathbb{Z})$ , appelée classe d'Euler, fonctorielle par rapport aux morphismes de fibrés, qui

*s'annule si et seulement si le fibré admet une section partout non-nulle au-dessus du squelette  $B_2$ . Toute section partout non-nulle au-dessus du squelette  $B_2$  admet une extension en une section partout non-nulle sur  $B$ .*

*(iii) Les classes d'homotopie de sections partout non-nulles sur  $B_1$  forment un espace affine sur  $H^1(B; \mathbb{Z})$ .*

**Remarque sur l'orientabilité.** L'hypothèse d'orientabilité signifie ici que l'on peut choisir une orientation dans chaque fibre de  $L$  de manière à ce que cette famille d'orientations soit localement constante lorsqu'on la lit dans des cartes de trivialisations du fibré. Lorsque  $B$  est une variété et  $L = TB$ , ceci coïncide avec la définition habituelle de l'orientabilité. Comme pour les variétés, puisqu'une orientation d'une fibre  $L_b$  détermine uniquement une orientation du fibré au-dessus d'un voisinage de  $b$ , l'on peut définir un transport local des orientations le long de chemins continus dans  $B$  et l'orientabilité de  $L$  équivaut au fait que le transport de l'orientation depuis une fibre au-dessus d'un point  $b$  vers une fibre au-dessus d'un point  $b'$  ne dépend pas du choix du chemin allant de  $b$  à  $b'$ . Ce transport local ne dépend par ailleurs que de la classe d'homotopie à extrémités fixées du chemin en question. De façon équivalente, le morphisme

$$\pi_1(B; b) \rightarrow \{\pm 1\}$$

déterminé par le transport des orientations est trivial pour tout point  $b \in B$ .

Notons par ailleurs qu'une orientation de  $L_b$  équivaut à la donnée d'une orientation de la sphère  $S(L_b) \subset L_b$  déterminée par n'importe quel choix de métrique sur  $L_b$ . En vue du fait que

$$\pi_1(S(L_b)) \simeq H_1(S(L_b); \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z},$$

ceci équivaut à se donner un générateur de  $\pi_1(S(L_b))$ . L'orientabilité de  $L$  équivaut au fait que les isomorphismes  $\pi_1(S(L_b)) \xrightarrow{\sim} \pi_1(S(L_{b'}))$  déterminés par le transport parallèle dans  $L$  le long de chemins dans  $B$  ne dépendent pas du choix de chemin allant de  $b$  à  $b'$ . Autrement dit, les groupes  $\pi_1(S(L_b))$  sont canoniquement isomorphes lorsque  $b$  varie dans une composante connexe par arcs de  $B$ . De façon équivalente, le morphisme

$$\pi_1(B; b) \rightarrow \text{Aut}(\pi_1(S(L_b)))$$

est trivial pour tout point  $b \in B$ .

**Remarque sur l'homotopie de sections.** Deux sections partout non-nulles données sur  $B_1$  ne sont pas en général homotopes sur  $B_1$ . Considérons l'exemple explicite suivant :  $L$  est le fibré trivial de rang 2 sur le cercle  $S^1$ . Une section partout non-nulle correspond à une application  $S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  et sa classe d'homotopie libre est uniquement

déterminée par son degré, calculé en rétractant  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  sur  $S^1$  et en regardant la section comme une application  $S^1 \rightarrow S^1$ . L'on voit en particulier que l'ensemble des classes d'homotopie de sections de  $L$  partout non-nulles est en bijection naturelle avec  $H^1(S^1; \mathbb{Z})$ .

L'on retrouve dans cette situation un isomorphisme avec  $H^1(S^1; \mathbb{Z})$ , et pas seulement une structure d'espace affine sur  $H^1(S^1; \mathbb{Z})$ , puisque le fibré est trivial. En revanche, si l'on était parti avec un fibré *trivialisable*, l'on aurait naturellement trouvé sur l'ensemble des classes d'homotopies de sections une structure d'espace affine sur  $H^1(S^1; \mathbb{Z})$ . Le choix d'une section correspond au choix d'une trivialisations, ou encore au choix d'un point base dans cet espace affine, ce qui l'identifie à  $H^1(S^1; \mathbb{Z})$ .

*Démonstration du théorème 4.15.* Notons  $\dot{L} \xrightarrow{p} B$  la fibration dont l'espace total est  $L \setminus 0_B$ . Ainsi  $\dot{L}_b = L_b \setminus 0$ . Trouver une section de  $L$  partout non-nulle est équivalent à trouver une section de  $\dot{L}$ .

Supposons pour simplifier que  $B$  est connexe (sinon on travaille séparément sur chaque composante connexe).

(i) Montrons d'abord qu'il existe une section de  $\dot{L}$  sur  $B_1$ . Nous construisons celle-ci d'abord sur  $B_0$  : ceci revient à choisir un point dans la fibre de  $\dot{L}$  au-dessus de chaque 0-cellule. Puisque la fibre de  $\dot{L}$  est connexe par arcs l'on peut étendre cette section sur  $B_1$ . Pour la même raison de connexité par arcs, toutes deux sections sont homotopes sur  $B_0$ .

**Remarque.** *Supposons donnée une homotopie  $h$  sur  $B_0$ . Cette homotopie ne s'étend pas nécessairement à  $B_1$ , cf. la discussion du point (iii) ci-dessous et la Remarque précédente.*

(ii) Choisissons un point  $x_i^2$  sur chaque 2-cellule  $e_i^2$ , par exemple le centre  $\phi_i(0)$  de la cellule, où  $\phi_i : (D^2, \partial D^2) \rightarrow (B_2, B_1)$  est l'application caractéristique.

Soit  $s$  une section définie sur  $B_1$ . Nous nous proposons de l'étendre à  $B_2$ . L'obstruction est fournie par la collection des classes d'homotopie libre des applications  $[s \circ \phi_i] : \partial D^2 \rightarrow \dot{L}_{x_i^2} \in \pi_1(\dot{L}_{x_i^2})$ .

En vue du fait que le fibré  $L$  est orienté nous identifions chacun des groupes  $\pi_1(\dot{L}_{x_i^2})$  de façon canonique à  $\mathbb{Z}$  et rassemblons cette collection de classes d'homotopie en une cochaîne  $\theta(s) \in C^2(B; \mathbb{Z})$ .

LA COCHAÎNE  $\theta(s)$  EST UN COCYCLE. Soit  $e_\alpha^3$  une 3-cellule avec application caractéristique  $\phi_\alpha : (D^3, \partial D^3) \rightarrow (B_3, B_2)$ . Nous avons successivement  $\delta\theta(s)(e_\alpha^3) = \theta(s)(\partial e_\alpha^3) = \theta(s)(\sum_{e_i^2} [e_\alpha^3 : e_i^2] e_i^2) = \sum_{e_i^2} \deg(p_i \circ \phi_\alpha) : \partial D^3 \rightarrow e_i^2 / \partial e_i^2) \deg(s \circ \phi_i) : \partial D^2 \rightarrow \dot{L}_{x_i^2}$ . Ceci coïncide avec l'image

de  $[\phi_\alpha] \in \pi_3(B_3, B_2) \simeq H_3(B_3, B_2)$  par la composition

$$\pi_3(B_3, B_2) \xrightarrow{\partial} \pi_2(B_2) \rightarrow \pi_2(B_2, B_1) \xrightarrow{\partial} \pi_1(B_1) \xrightarrow{s_*} \pi_1(\dot{L}_x)$$

La composition des deux flèches du milieu est nulle, et l'on conclut que  $\delta\theta(s) = 0$ .

LA CLASSE DE COHOMOLOGIE DÉFINIE PAR  $\theta(s)$  NE DÉPEND PAS DE  $s$ . ON LA NOTE  $e(L)$ . Ceci découle de ce que toutes deux sections  $s_0$  et  $s_1$  sont homotopes sur  $B_0$ . Pour une application  $\gamma : I = [0, 1] \rightarrow X$ , notons  $\bar{\gamma} : I \rightarrow X$ ,  $\bar{\gamma}(t) = \gamma(1 - t)$ . Le choix d'une homotopie  $h : s_0|_{B_0} \simeq s_1|_{B_0}$  détermine une cochaîne  $d \in C^1(B; \mathbb{Z})$  définie par  $d(e_j^1) = [s_0 \circ \phi_j \cup h \circ \phi_j|_{\{1\}} \cup s_1 \circ \bar{\phi}_j \cup \bar{h} \circ \phi_j|_{\{0\}} : I \times \{0\} \cup \{1\} \times I \cup I \times \{1\} \cup \{0\} \times I = \partial(I \times I) \rightarrow \dot{L}_{x_j^1}] \in \pi_1(\dot{L}_{x_j^1})$ . L'on montre alors que  $\delta d = \theta(s_0) - \theta(s_1)$ , de sorte que les cocycles  $\theta(s_0)$  et  $\theta(s_1)$  sont cohomologues. En effet, pour toute 2-cellule  $e_i^2$  nous avons  $\delta d(e_i^2) = d(\partial e_i^2) = d(\sum_j [e_i^2 : e_j^1] e_j^1) = \sum_j \deg(p_j \circ \phi_i| : \partial D^2 \rightarrow e_j^1 / \partial e_j^1) d(e_j^1) = \sum_j \deg(p_j \circ \phi_i| : \partial D^2 \rightarrow e_j^1 / \partial e_j^1) [s_0 \circ \phi_j \cup h \circ \phi_j| \cup s_1 \circ \phi_j]$ . L'application  $\phi_i|_{\partial D^2}$  est homotope à une application ayant la propriété que  $\partial D^2$  peut être écrit comme une union d'intervalles ayant des intérieurs disjoints, dont les extrémités se recollent, tels que  $\phi_i$  envoie les points de recollement sur le 0-squelette  $B_0$  et envoie chacun des intervalles de façon surjective sur une 1-cellule avec degré  $\pm 1$ . Pour une telle application de recollement la somme précédente décrit  $[s_0 \circ \phi_i] \cup [s_1 \circ \bar{\phi}_i] = \theta(s_0) - \theta(s_1)$ .

SI LA COCHAÎNE  $\theta(s)$  EST COHOMOLOGUE À ZÉRO, LA FIBRATION  $\dot{L}$  ADMET UNE SECTION SUR  $B_2$ . Plus précisément, l'on peut modifier la section  $s$  sur  $B_1$  rel  $B_0$  de manière à ce qu'elle admette une extension à  $B_2$ . En effet, si  $\theta(s) = \delta d$ , en inversant la construction du point précédent l'on peut trouver une homotopie qui commence avec  $s$ , qui est constante sur  $B_0$  et qui détermine le cocycle  $d$ . La section  $s_1$  que l'on obtient à l'autre bout de l'homotopie vérifie alors  $\theta(s_1) = 0$  et admet donc une extension à  $B_2$ .

SI LA FIBRATION  $\dot{L}$  ADMET UNE SECTION SUR  $B_2$ , ALORS  $e(L) = 0$ . En effet, la restriction  $s$  de cette section à  $B_1$  admet une extension et donc  $\theta(s) = 0$ , de sorte que  $e(L) = [\theta(s)] = 0$ .

LA CLASSE  $e(L)$  EST FONCTORIELLE PAR RAPPORT AUX MORPHISMES DE FIBRÉS. Nous ne donnons pas ici les détails de la preuve, qui repose sur le théorème d'approximation cellulaire. Nous renvoyons le lecteur à [Steenrod, §35].

UNE SECTION SUR  $B_2$  ADMET UNE EXTENSION À  $B$ . L'extension est construite inductivement sur la dimension du squelette. L'obstruction à étendre une section du  $k$ -squelette à une  $k + 1$ -cellule  $e_\beta^{k+1}$  est donnée par l'élément  $[s \circ \phi_\beta|_{\partial D^{k+1}}] \in [S^k, \dot{L}_{x_\beta^{k+1}}]$ . Or  $\pi_k(\dot{L}_{x_\beta^{k+1}}) = \pi_k(S^1) = 0$  pour  $k \geq 2$ , de sorte que l'extension est toujours possible.

(iii) Montrons que les classes d'homotopie de sections de  $\dot{L}|_{B_1}$  forment un espace affine sur  $H^1(B; \mathbb{Z})$ . Nous avons vu qu'à chaque section  $s$  sur  $B_1$  est associé un cocycle d'obstruction  $\theta(s) \in C^2(B; \mathbb{Z})$ , et tous deux tels cocycles d'obstruction  $\theta(s_0)$  et  $\theta(s_1)$  sont cohomologues. Plus précisément, le choix d'une homotopie  $h : s_0|_{B_0} \simeq s_1|_{B_0}$  détermine une cochaîne  $d(s_0, h, s_1) \in C^1(B; \mathbb{Z})$  telle que  $\theta(s_0) - \theta(s_1) = \delta d(s_0, h, s_1)$ . Le fait que  $\pi_0(L_b) = 0$  entraîne que, étant données deux telles homotopies, les cochaines correspondantes sont égales, de sorte qu'on les note  $d(s_0, s_1)$ .

Quitte à changer  $s_1$  par une homotopie sur  $B_1$ , l'on peut supposer que  $\theta(s_0) = \theta(s_1)$ . La cochaîne  $d(s_0, s_1)$  est alors un cocycle. L'on associe de cette manière à la paire (de classes d'homotopie)  $(s_0, s_1)$  la classe  $[d(s_0, s_1)] \in H^1(B; \mathbb{Z})$ . La relation

$$[d(s_0, s_1)] + [d(s_1, s_2)] = [d(s_0, s_2)]$$

découle directement des définitions.

Par ailleurs, pour toute classe  $d \in H^1(B; \mathbb{Z})$  et toute section  $s_0$  il existe une section  $s_1$  qui vérifie  $[d(s_0, s_1)] = d$ . Ceci démontre que l'ensemble des classes de sections sur  $B_1$  modulo homotopie est un espace affine sur  $H^1(B; \mathbb{Z})$ .  $\square$

Que se passe-t-il lorsque le fibré  $L$  n'est pas orientable? La preuve précédente ne fonctionne plus parce-que les isomorphismes  $\pi_1(L_b \setminus 0) \simeq \pi_1(L_{b'} \setminus 0)$  donnés par transport parallèle le long de chemins allant de  $b$  à  $b'$  dans  $B$  ne sont plus canoniques. Il y a un moyen simple de pallier à ce défaut qui est celui de considérer des groupes de cohomologie à coefficients dans des systèmes locaux.

**Théorème 4.16.** *Soit  $L \xrightarrow{p} B$  un fibré vectoriel de rang 2 sur  $\mathbb{R}$  dont la base est un CW-complexe. Soit  $\mathfrak{o}_L$  le système local des orientations de  $L$  de fibre  $\mathbb{Z}$ .*

(i) *Le fibré  $L$  admet une section partout non-nulle au-dessus du squelette  $B_1$ . Deux telles sections sont homotopes sur  $B_0$  dans l'espace des sections qui ne s'annulent pas.*

(ii) *Il existe une classe de cohomologie  $e(L) \in H^2(B; \mathfrak{o}_L)$ , appelée classe d'Euler, fonctorielle par rapport aux morphismes de fibrés, qui s'annule si et seulement si le fibré admet une section partout non-nulle au-dessus du squelette  $B_2$ .*

(iii) *L'ensemble des classes d'homotopie de sections partout non-nulles sur  $B_1$  forme un espace affine sur  $H^1(B; \mathfrak{o}_L)$ .*  $\square$

**Remarque 4.17.** *Pour un fibré orienté de rang 2 sur  $\mathbb{R}$ , l'existence d'une section qui ne s'annule pas est équivalente à sa trivialité. En effet, l'on munit le fibré d'un produit scalaire fibre par fibre et l'on construit une deuxième section en considérant dans chaque fibre l'unique vecteur*

de norme 1 orthogonal à la section donnée et qui forme une base positive avec celle-ci.

**Proposition 4.18.** *Soit  $L \rightarrow B$  un fibré en droites complexes. Regardé en tant que fibré réel de rang 2, il possède une orientation canonique. La classe d'Euler  $e(L) \in H^2(B; \mathbb{Z})$  coïncide avec la classe de Chern  $c_1(L) \in H^2(B; \mathbb{Z})$ .*

*Démonstration.* Par functorialité de la classe d'Euler et de la classe de Chern, il suffit de démontrer l'égalité dans le cas du fibré tautologique  $\gamma_1^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}P^\infty = G_1^{\mathbb{C}}$ .

En fait, il suffit de le démontrer pour le fibré tautologique  $\gamma = \gamma_{2,1}^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}P^1$ . En effet, la classe d'Euler est déterminée par la restriction du fibré au 2-squelette de la base, alors que  $\mathbb{C}P^\infty = \lim_n \mathbb{C}P^n$  admet une décomposition cellulaire dont le 2-squelette est  $\mathbb{C}P^1$ . Par ailleurs, le tiré-en-arrière de  $\gamma_1^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$  par l'inclusion  $\mathbb{C}P^1 \hookrightarrow \mathbb{C}P^\infty$  est  $\gamma$ . Puisque cette inclusion induit un isomorphisme sur  $H^2(\cdot; \mathbb{Z})$ , la classe de Chern de  $\gamma_1^{\mathbb{C}}$  est déterminée par la classe de Chern de  $\gamma$ .

Considérons donc le fibré tautologique  $\gamma \rightarrow \mathbb{C}P^1$ . Par convention

$$c_1(\gamma) = -h,$$

avec  $h \in H^2(\mathbb{C}P^1; \mathbb{Z})$  le générateur qui prend la valeur +1 sur la classe fondamentale  $[\mathbb{C}P^1]$  déterminée par l'orientation complexe. Nous souhaitons donc montrer que  $e(\gamma) = -h$ .

Considérons la décomposition cellulaire de  $\mathbb{C}P^1$  constituée d'une unique cellule en dimension 0, donnée par la point  $[1 : 0]$ , et d'une unique cellule en dimension 2. Le complexe cellulaire  $C(\mathbb{C}P^1; \mathbb{Z})$  est alors isomorphe à la cohomologie  $H(\mathbb{C}P^1; \mathbb{Z})$ . La cellule de dimension 2 est homéomorphe à  $\mathbb{C}$ , avec comme application caractéristique  $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}P^1 \setminus \{[1 : 0]\}$ ,  $z \mapsto [z : 1]$  (biholomorphisme sur image). L'on oriente cette 2-cellule par l'orientation complexe de  $\mathbb{C}$ . Le générateur  $h$  correspond alors à l'unique cocycle qui prend la valeur +1 sur cette 2-cellule. L'on trivialisise le tiré-en-arrière  $\phi^*\gamma$  par  $\Phi : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \xrightarrow{\cong} \phi^*\gamma$ ,  $\Phi(z, \lambda) = (z, \lambda(z, 1))$ . La classe d'Euler vaut  $\deg_\infty \cdot h$ , où  $\deg_\infty$  est le degré de l'application  $S^1(R) \rightarrow \mathbb{C}^*$  déterminée par la restriction à un cercle  $S^1(R)$  de rayon  $R \gg 0$  d'une section asymptotiquement constante. Considérons l'autre carte sur  $\mathbb{C}P^1$ , notée  $\psi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}P^1 \setminus \{[0 : 1]\}$ ,  $w \mapsto [1 : w]$  et la trivialisisation  $\Psi : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \psi^*\gamma$ ,  $\Psi(w, \lambda) = (w, \lambda(1, w))$ . Alors  $\Phi^{-1}\Psi(w, \lambda) = (1/w, \lambda w)$ . Pour  $|w| = \epsilon \ll 1$  et  $\lambda = 1$ , données qui correspondent à une section asymptotiquement constante, l'on obtient  $\Phi^{-1}\Psi(w, 1) = (1/w, w)$ . La restriction d'une section asymptotiquement constante au cercle  $S^1(R)$ ,  $R = 1/\epsilon$  orienté positivement est donnée par l'équation  $z = 1/w$ . Ainsi  $\deg_\infty$  est le degré de l'application  $S^1(R) \rightarrow \mathbb{C}^*$ ,  $z \mapsto 1/z$ , qui est égal à  $-1$ . Ceci démontre l'égalité

$$e(\gamma) = -h.$$



□

4.2.2. *Le théorème principal de la théorie de l'obstruction.*

**Définition 4.19.** *Soit  $n \geq 1$  un entier. Un espace topologique est dit  $n$ -simple si l'action du groupe fondamental  $\pi_1(Y; y)$  sur  $\pi_n(Y; y)$  est triviale pour tout  $y \in Y$ .*

Si l'action de  $\pi_1(Y; y_0)$  est triviale sur  $\pi_n(Y; y_0)$  pour un point base  $y_0 \in Y$ , la même propriété est vérifiée pour tout point appartenant à la composante connexe par arcs de  $y_0$  dans  $Y$ . En règle générale nous supposons désormais que  $Y$  est connexe par arcs. La  $n$ -simplicité implique le fait que les groupes d'homotopie  $\pi_n(Y; y_0)$  et  $\pi_n(Y; y_1)$  sont canoniquement identifiés pour tous  $y_0, y_1 \in Y$ . Pour cette raison nous pouvons omettre la mention du point base et écrire  $\pi_n Y$ . Lorsque  $n = 1$  la définition est équivalente au fait que  $\pi_1(Y)$  est abélien. Dans tous les cas, le fait que  $Y$  soit  $n$ -simple est équivalent à l'égalité

$$[S^n, Y] = \pi_n(Y).$$

**Théorème 4.20.** *Soit  $Y$  un espace  $n$ -simple,  $n \geq 1$ . Soit  $(X, A)$  un CW-complexe relatif. Soit  $g : X_n \rightarrow Y$  une application continue.*

(1) *Il existe un cocycle cellulaire*

$$\theta^{n+1}(g) \in C^{n+1}(X, A; \pi_n Y)$$

*qui s'annule si et seulement si  $g$  admet une extension à  $X_{n+1}$ .*

(2) *La classe de cohomologie  $[\theta^{n+1}(g)] \in H^{n+1}(X, A; \pi_n Y)$  est nulle si et seulement si la restriction  $g| : X_{n-1} \rightarrow Y$  admet une extension à  $X_{n+1}$  (autrement dit, si et seulement si  $g$  peut être modifiée rel  $X_{n-1}$  afin d'admettre une extension à  $X_{n+1}$ ).*

*Démonstration du Théorème 4.20, d'après [Davis et Kirk].* Rappelons que

$$C^{n+1}(X, A; \pi_n Y) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_{n+1}(X, A); \pi_n Y).$$

Pour toute cellule  $e_i^{n+1}$  ayant comme application caractéristique  $\phi_i : (D^{n+1}, \partial D^{n+1}) \rightarrow (X_{n+1}, X_n)$ , nous définissons  $\langle \theta^{n+1}(g), e_i^{n+1} \rangle \in \pi_n Y = [S^n, Y]$  comme la classe d'homotopie de l'application composée

$$S^n \xrightarrow{\phi_i|} X_n \xrightarrow{g} Y.$$

Clairement  $g$  admet une extension à  $X_{n+1}$  si et seulement si  $\theta^{n+1}(g) = 0$  : une telle extension équivaut à se donner une extension sur chaque cellule, ce qui équivaut à pouvoir étendre au disque  $D^{n+1}$  chaque application  $g \circ \phi_i| : S^n \rightarrow Y$ . Une telle extension est possible si et seulement si la classe d'homotopie de chaque telle application est triviale.



$\theta^{n+1}(g)$  EST UN COCYCLE. L'on rappelle que  $C_n(X, A) = H_n(X_n, X_{n-1})$  et la différentielle cellulaire est donnée par

$$H_n(X_n, X_{n-1}) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(X_{n-1}) \xrightarrow{incl_*} H_{n-1}(X_{n-1}, X_{n-2}).$$

La différentielle cellulaire  $\delta$  pour le complexe cellulaire cohomologique est définie à partir de  $\partial$  par dualité.

La preuve du fait que  $\delta\theta^{n+1}(g) = 0$  vient du diagramme commutatif suivant.

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_{n+2}(X_{n+2}, X_{n+1}) & \longrightarrow & H_{n+2}(X_{n+2}, X_{n+1}) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \pi_{n+1}(X_{n+1}) & \longrightarrow & H_{n+1}(X_{n+1}) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \pi_{n+1}(X_{n+1}, X_n) & \longrightarrow & H_{n+1}(X_{n+1}, X_n) \\
 \downarrow & & \downarrow \theta^{n+1}(g) \\
 \pi_n(X_n) & \xrightarrow{g_*} & \pi_n(Y)
 \end{array}$$

Les trois premières flèches horizontales sont les morphismes de Hurewicz. La commutativité des deux premiers carrés est une propriété générale des morphismes de Hurewicz (c'est la fameuse "échelle entre homotopie et homologie"). Nous allons démontrer la commutativité du carré du bas ci-dessous. Celle-ci étant admise, le théorème de Hurewicz assure que la flèche du haut  $\pi_{n+2}(X_{n+2}, X_{n+1}) \rightarrow H_{n+2}(X_{n+2}, X_{n+1})$  est surjective. Sur la colonne de droite nous lisons  $\delta\theta^{n+1}(g)$ . Sur la colonne de gauche la composition des deux dernières flèches est nulle puisqu'elles apparaissent dans la suite exacte longue d'homotopie de la paire  $(X_{n+1}, X_n)$ . Ceci nous permet de conclure.

Montrons la commutativité du carré du bas, que nous reproduisons pour plus de lisibilité.

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_{n+1}(X_{n+1}, X_n) & \xrightarrow{\rho} & H_{n+1}(X_{n+1}, X_n) \\
 \downarrow \partial & \searrow & \nearrow \bar{\rho} \cong \\
 & \pi_{n+1}^+(X_{n+1}, X_n) & \\
 & \searrow \overline{g_* \circ \partial} & \\
 \pi_n(X_n) & \xrightarrow{g_*} & \pi_n(Y) \\
 & & \downarrow \theta^{n+1}(g)
 \end{array}$$

Considérons le groupe  $\pi_{n+1}^+(X_{n+1}, X_n)$ , quotient du groupe  $\pi_{n+1}(X_{n+1}, X_n)$  par l'action de  $\pi_1(X_n)$ . Le théorème de Hurewicz assure que l'on a un isomorphisme  $\bar{\rho} : \pi_{n+1}^+(X_{n+1}, X_n) \xrightarrow{\cong} H_{n+1}(X_{n+1}, X_n)$  induit par la flèche  $\rho : \pi_{n+1}(X_{n+1}, X_n) \rightarrow H_{n+1}(X_{n+1}, X_n)$ . La flèche  $g_* \circ \partial$  que nous lisons sur les côtés bas et gauche du carré factorise par  $\pi_{n+1}^+(X_{n+1}, X_n)$  puisque  $Y$  est  $n$ -simple. L'on note  $\overline{g_* \circ \partial} : \pi_{n+1}^+(X_{n+1}, X_n) \rightarrow \pi_n Y$  cette factorisation. Nous souhaitons montrer l'égalité

$$\theta^{n+1}(g) \circ \bar{\rho} = \overline{g_* \circ \partial}.$$

Notons  $x_0 \in X_0$  et  $* \in S^n$  les points base. Soit  $e_i^{n+1}$  une  $n+1$ -cellule avec application caractéristique  $\phi_i : (D^{n+1}, S^n) \rightarrow (X_{n+1}, X_n)$ . Soit  $u$  un chemin de  $x_0$  à  $\phi_i(p)$  dans  $X_n$ . En regardant la cellule  $e_i^{n+1}$  comme générateur de  $H_{n+1}(X_{n+1}, X_n)$ , un représentant pour  $\bar{\rho}^{-1}(e_i^{n+1})$  est fourni par l'application  $\phi_i \vee u : (D^{n+1}, S^n) \rightarrow (X_{n+1}, X_n)$  obtenue en appliquant  $\phi_i$  sur une moitié du disque  $D^{n+1}$  qui ne contient pas le point base  $p$  et en écrasant l'autre moitié du disque  $D^{n+1}$  sur un intervalle, sur lequel on applique  $u$  (Figure 9). Le but de cette opération est de ramener le point base de  $\phi_i$  en  $x_0$ . Sur un tel élément  $\overline{g_* \circ \partial}$  agit en lui associant la classe d'homotopie libre de  $g \circ (\phi_i|_{S^n} \vee u)$ , qui est homotope à  $g \circ \phi_i|_{S^n}$ , dont la classe est la valeur de  $\theta^{n+1}(g)$ .

NOUS MONTRONS QUE, SI  $\theta^{n+1}(g) = \delta d$ ,  $d \in C^n(X, A; \pi_n Y)$ , ALORS  $g$  PEUT ÊTRE REDÉFINIE SUR LE  $n$ -SQUELETTE RELATIVEMENT AU  $n-1$ -SQUELETTE DE MANIÈRE À CE QU'ELLE ADMETTE UNE EXTENSION AU  $n+1$ -SQUELETTE.

**Lemme 4.21** (lemme d'homotopie). *Soient  $f_0, f_1 : X_n \rightarrow Y$  deux applications continues dont les restrictions au  $n-1$ -squelette sont homotopes. Le choix d'une homotopie  $G : X_{n-1} \times I \rightarrow Y$  définit une cochaîne de différence  $d = d(f_0, G, f_1) \in C^n(X, A; \pi_n Y)$  telle que*

$$\delta d = \theta^{n+1}(f_0) - \theta^{n+1}(f_1).$$

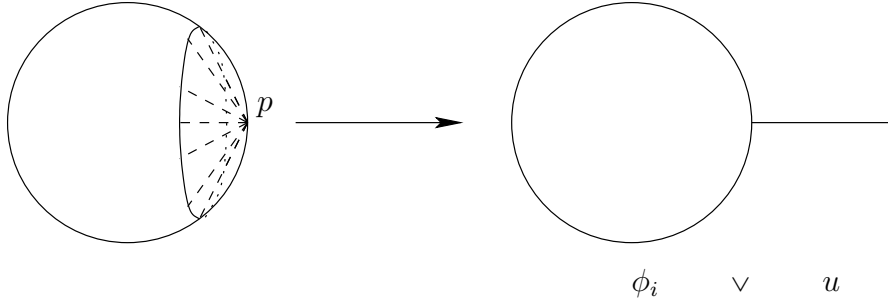


FIGURE 9

*Démonstration du Lemme 4.21.* Considérons sur l'intervalle  $I$  une décomposition cellulaire avec deux 0-cellules constituant  $\partial I = \{0, 1\}$  et une 1-cellule  $I$ . Soit  $\hat{X} = X \times I$ ,  $\hat{A} = A \times I$ . Alors  $(\hat{X}, \hat{A})$  est naturellement un CW-complexe relatif ayant pour  $n$ -squelette  $\hat{X}_n = X_n \times \partial I \cup X_{n-1} \times I$ . La donnée d'une application  $\hat{X}_n \rightarrow Y$  équivaut à la donnée d'une paire d'applications  $f_0, f_1 : X_n \rightarrow Y$  et d'une homotopie  $G : X_{n-1} \times I \rightarrow Y$  entre  $f_0|_{X_{n-1}}$  et  $f_1|_{X_{n-1}}$ . À ces données l'on associe donc un cocycle d'obstruction

$$\theta^{n+1}(f_0, G, f_1) \in C^{n+1}(\hat{X}, \hat{A}; \pi_n Y).$$

Nous définissons  $d(f_0, G, f_1) \in C^n(X, A; \pi_n Y)$  comme suit :

$$d(f_0, G, f_1)(e^n) = (-1)^{n+1} \theta^{n+1}(f_0, G, f_1)(e^n \times I).$$

Pour toute  $n+1$ -cellule  $e_i^{n+1}$  l'on obtient alors

$$\begin{aligned} \delta \theta^{n+1}(f_0, G, f_1)(e_i^{n+1} \times I) &= \theta^{n+1}(f_0, G, f_1)(\partial(e_i^{n+1})) \\ &= \theta^{n+1}(f_0, G, f_1)(\partial e_i^{n+1} \times I) \\ &+ (-1)^{n+1} (\theta^{n+1}(f_0, G, f_1)(e_i^{n+1} \times \{1\}) - \theta^{n+1}(f_0, G, f_1)(e_i^{n+1} \times \{0\})) \\ &= (-1)^{n+1} (\delta d(f_0, G, f_1)(e_i^{n+1}) + \theta^{n+1}(f_1)(e_i^{n+1}) - \theta^{n+1}(f_0)(e_i^{n+1})). \end{aligned}$$

La première égalité est la définition de  $\delta$ . La deuxième égalité vient de ce que, pour un produit de CW-complexes, la différentielle vérifie  $\partial(e^k \times f^\ell) = (\partial e^k) \times f^\ell + (-1)^k e^k \times (\partial f^\ell)$ . Par ailleurs  $\theta^{n+1}(f_0, G, f_1)$  est un cocycle, de sorte que le premier terme dans la suite d'égalités ci-dessus est nul.  $\square$

**Lemme 4.22** (lemme de réalisation). *Soit  $f_0 : X_n \rightarrow Y$  et soit  $G : X_{n-1} \times I \rightarrow Y$  une homotopie telle que  $G_0 = f_0|_{X_{n-1}}$ . Pour tout  $d \in C^n(X, A; \pi_n Y)$  il existe une application  $f_1 : X_n \rightarrow Y$  telle que  $f_1|_{X_{n-1}} = G_1$  et  $d = d(f_0, G, f_1)$ .*

*Démonstration du lemme 4.22.* Il s'ensuit de la preuve du Lemme d'homotopie 4.21 que la valeur de la cochaîne  $d(f_0, G, f_1)$  sur une  $n$ -cellule  $e_i^n$  avec application caractéristique  $\phi_i$  est définie en tant que

classe d'homotopie libre dans  $[S^n, Y]$ , ou encore en tant qu'élément de  $\pi_n Y$ , de la manière suivante : l'on regarde  $S^n$  comme  $\partial(D^n \times I) = D^n \times \{0\} \cup S^{n-1} \times I \cup D^n \times \{1\}$ , que l'on envoie dans  $Y$  via l'application  $(f_0 \cup G \cup f_1) \circ (\phi_i \times \text{Id})|_{\partial(D^n \times I)}$ .

$$\begin{array}{ccc} D^n \times I & \xrightarrow{\phi_i \times \text{Id}} & X_n \times I \\ \uparrow & & \uparrow \\ \partial(D^n \times I) & \xrightarrow{\phi_i \times \text{Id}|} & (X \times I)_n \xrightarrow{f_0 \cup G \cup f_1} Y \end{array}$$

Avec cette description du cocycle, il suffit de montrer que, étant donnée  $f : D^n \times \{0\} \cup S^{n-1} \times I \rightarrow Y$  et  $\alpha \in [\partial(D^n \times I), Y]$ , il existe  $F : \partial(D^n \times I) \rightarrow Y$  qui étend  $f$  telle que  $[F] = \alpha$ . Ceci est une conséquence de la propriété d'extension des homotopies pour la paire  $(\partial(D^n \times I), D)$ , avec  $D = D^n \times \{0\} \cup S^{n-1} \times I$ . Soit  $K : \partial(D^n \times I) \rightarrow Y$  une application qui représente  $\alpha$ . Puisque  $D$  est contractile nous avons  $K|_D \simeq f$ . Cette homotopie donnée sur  $D$  admet une extension  $H$  sur  $\partial(D^n \times I)$ . L'on prend alors  $F = H_1$ .  $\square$

La preuve du point 2. du théorème 4.20 est maintenant pour l'essentiel finie : l'on suppose  $\theta^{n+1}(g) = \delta d$ . Le lemme de réalisation 4.22 appliqué à l'homotopie constante  $g|_{X_{n-1}} \simeq g|_{X_{n-1}}$  fournit  $g' : X_n \rightarrow Y$  telle que  $d(g, \text{Id}, g') = d$  et  $g'|_{X_{n-1}} = g|_{X_{n-1}}$ . Mais par le lemme d'homotopie 4.21 l'on a  $\theta^{n+1}(g) - \theta^{n+1}(g') = \delta d(g, \text{Id}, g') = \delta d$ , de sorte que  $\theta^{n+1}(g') = 0$  et  $g'$  admet une extension à  $X_{n+1}$ .  $\square$

**4.2.3. Théorème d'obstruction pour les homotopies.** Ce que nous avons précédemment appelé "théorème principal de la théorie des obstructions" a de multiples variantes. Nous en donnons une concernant les homotopies, qui en est un cas particulier.

**Théorème 4.23** (théorème d'obstruction pour les homotopies). *Soient  $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$  deux applications continues,  $(X, A)$  un CW-complexe relatif,  $Y$  un espace topologique  $n$ -simple. L'on suppose donnée une homotopie  $G : X_{n-1} \times I \rightarrow Y$ . Il existe une classe d'obstruction*

$$[\theta(G)] \in H^n(X, A; \pi_n Y)$$

*qui s'annule si et seulement si  $G|_{X_{n-2} \times I}$  s'étend en une homotopie sur  $X_n$ .*

**Remarque.** En pratique, l'on pense l'énoncé de la manière suivante : l'on se donne une homotopie  $f_0|_A \simeq f_1|_A$  que l'on cherche à étendre à  $X$ . L'on raisonne de manière récursive et, en supposant avoir construit l'homotopie  $G$  sur le squelette  $X_{n-1}$ , l'on essaie d'étendre celle-ci au squelette  $X_n$ . L'énoncé du théorème donne une condition nécessaire et

suffisante pour l'existence d'une extension après éventuelle modification de  $G$  rel  $X_{n-2}$ .

*Démonstration.* Le point clé est de considérer le CW-complexe relatif  $(X^*, A^*)$  donné par

$$X^* = X \times I, \quad A^* = X \times \partial I \cup A \times I.$$

Ainsi le  $n$ -squelette de  $X^*$  est  $X_n^* = X \times \partial I \cup X_{n-1} \times I$  et la donnée d'une application  $G^* : X_n^* \rightarrow Y$  équivaut à la donnée d'une paire d'applications  $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$  et d'une homotopie  $G : f_0|_{X_{n-1}} \simeq f_1|_{X_{n-1}}$ . Par ailleurs

$$H^{n+1}(X^*, A^*) \simeq H^n(X, A).$$

Ceci est un cas particulier de la formule de Künneth en cohomologie relative C.6. La classe recherchée est la classe d'obstruction  $[\theta^{n+1}(f_0 \cup G \cup f_1)] \in H^{n+1}(X^*, A^*; \pi_n Y) \simeq H^n(X, A; \pi_n Y)$ , tel qu'il découle directement du Théorème principal 4.20.  $\square$

**Remarque.** L'on peut bien-sûr énoncer un théorème d'obstruction pour des homotopies d'applications définies partiellement  $f_0, f_1 : X_n \rightarrow Y$ , mais la formulation n'est plus si transparente. Quoi qu'il en soit, la stratégie est claire : il s'agit d'exhiber un CW-complexe relatif adapté à la situation.

4.2.4. *Théorème d'obstruction pour les sections de fibrations.* L'énoncé que nous discutons ici est strictement plus général que le Théorème principal 4.20. La démonstration est néanmoins analogue, avec des complications de nature purement technique liées à l'utilisation des systèmes locaux de coefficients.

L'on étudie une fibration  $E \xrightarrow{p} X$  au-dessus d'un CW-complexe relatif  $(X, A)$ , dont la fibre est connexe par arcs et  $n$ -simple. L'on note  $F_x = p^{-1}(x)$ ,  $x \in X$ . Les groupes d'homotopie  $\pi_n F_x$  sont définis sans mention de point base et s'assemblent en un système local sur  $X$  que l'on note

$$\{\pi_n F\}.$$

De manière explicite, étant donné un chemin  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  et une application  $f : S^n \rightarrow F_{\gamma(0)}$ , la propriété de relèvement des homotopies assure l'existence d'une homotopie  $\tilde{f} : S^n \times [0, 1] \rightarrow E$  telle que  $p \circ \tilde{f}_t = \gamma(t)$  et  $\tilde{f}_0 = f$ . La classe d'homotopie  $[\tilde{f}_1] \in [S^n, F_{\gamma(1)}] = \pi_n F_{\gamma(1)}$  est indépendante des choix. L'application

$$\tau_\gamma : \pi_n F_{\gamma(0)} \rightarrow \pi_n F_{\gamma(1)}, \quad [f] \mapsto [\tilde{f}_1]$$

définit un morphisme de groupes qui ne dépend que de la classe d'homotopie à extrémités fixées de  $\gamma$ . Celui-ci est bijectif : l'inverse est donné par  $\tau_{\tilde{\gamma}}$ .

**Théorème 4.24** (théorème d'obstruction pour les sections de fibrations). Soit  $E \xrightarrow{p} X$  une fibration au-dessus d'un CW-complexe relatif  $(X, A)$ , dont la fibre est connexe par arcs et  $n$ -simple. Soit  $g : X_n \rightarrow E$  une section définie sur le  $n$ -squelette de la base.

- (1) Il existe un cocycle cellulaire  $\theta^{n+1}(g) \in C^{n+1}(X, A; \{\pi_n F\})$  qui s'annule si et seulement si  $g$  admet une extension à  $X_{n+1}$ .
- (2) La classe de cohomologie  $[\theta^{n+1}(g)] \in H^{n+1}(X, A; \{\pi_n F\})$  s'annule si et seulement si  $g|_{X_{n-1}}$  admet une extension en une section définie sur  $X_{n+1}$ .

*Esquisse de preuve.* La preuve suit exactement les mêmes lignes que dans le cas du Théorème principal 4.20. La différence principale est la suivante : pour définir la valeur de  $\theta^{n+1}(g)$  sur une  $n + 1$ -cellule  $e_i^{n+1}$  avec application caractéristique  $\phi_i : (D^{n+1}, S^n) \rightarrow (X_{n+1}, X_n)$  nous commençons par trivialisier  $\phi_i^* E$  au-dessus de  $D^{n+1}$ . Le point clé est qu'une telle trivialisation n'est canoniquement définie à homotopie près que sous la forme

$$\phi_i^* E \simeq D^{n+1} \times E_{x_i^{n+1}},$$

où  $x_i^{n+1} \in e_i^{n+1}$  est un point base sur la cellule (par exemple le centre  $\phi_i(0)$ ). Bien-sûr, nous pouvons trouver des trivialisations  $D^{n+1} \times F$ , avec  $F$  la fibre type, mais ceci suppose avoir *choisi* une équivalence d'homotopie (ou un difféomorphisme, si l'on travaille avec des variétés)  $E_{x_i^{n+1}} \simeq F$ . Ce choix n'est pas canonique et détruit en général la propriété de cocycle à valeurs dans  $\pi_n F$ . Néanmoins, la propriété de cocycle reste valable à coefficients dans le système local  $\{\pi_n F\}$  puisque, dans la démonstration, nous utilisons la trivialisation canonique à homotopie près au-dessus d'une unique cellule  $e_i^{n+2}$ , qui étend les trivialisations canoniques à homotopie près sur toutes les cellules situées sur son bord.  $\square$

**Remarque.** Le Théorème principal 4.20 est un cas particulier du théorème précédent en considérant une fibration triviale.

**Exercice.** Énoncer et démontrer une variante du Théorème 4.20 pour des applications  $X_n \rightarrow Y$  avec  $Y$  un espace qui n'est pas  $n$ -simple.

4.2.5. *Classe d'obstruction primaire.* Les résultats précédents sont parfaitement satisfaisants dans la situation suivante [Steenrod, §35]. L'on considère une fibration  $E \xrightarrow{p} X$  au-dessus d'un CW-complexe  $X$ , avec fibre  $F$  connexe par arcs.

Soit  $q \geq 1$  le plus petit entier tel que  $\pi_q F \neq 0$ . Si  $q = 1$ , l'on suppose que  $F$  est 1-simple, c'est-à-dire que  $\pi_1 F$  est abélien.

**Théorème 4.25** (classe d'obstruction primaire). Dans la situation précédente :

- (1)  $E$  admet une section au-dessus de  $X_q$ . Toutes deux sections sont homotopes à travers des sections en restriction à  $X_{q-1}$ .
- (2) Les classes d'obstruction de toutes deux sections définies sur  $X_q$  coïncident. Leur valeur commune

$$\theta^{q+1}(E) \in H^{q+1}(X; \{\pi_q F\})$$

est appelée classe d'obstruction primaire.

- (3) La fibration admet une section sur  $X_{q+1}$  si et seulement si la classe d'obstruction primaire est nulle.
- (4) Les classes d'homotopie de sections définies sur  $X_q$  forment un espace affine sur  $H^q(X; \{\pi_q F\})$ .

*Démonstration.* Pour le point 1. l'on applique le Théorème 4.24 concernant l'extension des sections de façon inductive pour construire une section sur  $X_q$ . Toutes deux sections sont homotopes sur  $X_0$  puisque la fibre est supposée connexe par arcs, et l'on applique à nouveau le théorème pour construire des homotopies sur  $X_{q-1}$ .

Le point 2. découle de ce que toute homotopie sur  $X_{q-1}$  détermine une cochaîne  $d$  telle que  $\delta d$  est la différence des cocycles d'obstruction associés à deux sections données (Lemme 4.21). Ceux-ci sont par conséquent cohomologues.

Le point 3. est clair par le Théorème 4.24.

Le point 4. découle en combinant le Théorème 4.24 sur les sections avec le Théorème 4.23 sur les homotopies, comme dans le Théorème 4.15 sur la classe d'Euler des fibrés de rang 2 sur  $\mathbb{R}$ .  $\square$

**Exercice.** Énoncer et démontrer un théorème concernant la classe d'obstruction primaire associée à une fibration au-dessus d'un CW-complexe relatif  $(X, A)$ . L'on supposera donnée – et fixée – une section au-dessus de  $A$ , ou encore une classe d'homotopie de sections au-dessus de  $A$ .

#### 4.2.6. Classe d'Euler.

**Théorème 4.26.** Soit  $\xi \xrightarrow{p} B$  un fibré vectoriel de rang  $n$  sur  $\mathbb{R}$ , ayant comme base un CW-complexe.

0. Le système local  $\{\pi_{n-1}\xi_b \setminus 0\}$  est trivial si et seulement si  $\xi$  est orientable. On le note  $\mathfrak{o}(\xi)$  et on l'appelle système local des orientations de  $\xi$ .

1. Le fibré admet une section partout non-nulle sur le squelette  $B_{n-1}$ . Toutes deux telles sections sont homotopes (à travers des sections) sur le squelette  $B_{n-2}$ .

2. Il existe une classe de cohomologie  $e(\xi) \in H^n(B; \mathfrak{o}(\xi))$ , appelée classe d'Euler, qui s'annule si et seulement si le fibré  $\xi$  admet une section partout non-nulle sur  $B_n$ .

3. Les classes d'homotopie de sections partout non-nulles définies sur  $B_{n-1}$  forment un espace affine sur  $H^{n-1}(B; \mathfrak{o}(\xi))$ .

*Démonstration.* Le point 0. est une conséquence de la discussion concernant les orientations, que nous avons développée lorsque nous avons défini la classe d'Euler d'un fibré en droites. Le point 1. et le point 2. sont une conséquence directe du théorème concernant les classes d'obstruction primaires. La classe  $e(\xi)$  est la classe d'obstruction primaire de la fibration  $\xi \setminus 0 \xrightarrow{p} B$ . Le point 3. se démontre de la même manière que dans le Théorème 4.15.  $\square$

### Propriétés de la classe d'Euler

(a) fonctorialité :  $e(f^*\xi) = f^*e(\xi)$  pour  $f : B' \rightarrow B$ . Ceci est une propriété commune aux classes d'obstruction primaires.

(b) soit  $e(\xi \oplus \mathbb{R}) = 0$ , où  $\mathbb{R}$  désigne le fibré trivial de rang 1 sur  $\mathbb{R}$ . En particulier la classe d'Euler n'est pas une classe caractéristique stable par somme directe avec des fibrés triviaux, à la différence des classes de Stiefel-Whitney et Chern.

(c) soit  $\xi$  un fibré de rang  $n$  impair. Alors  $2e(\xi) = 0 \in H^n(B; \mathfrak{o}(\xi))$ . En effet, l'involution  $I : (b, v) \mapsto (b, -v)$  renverse l'orientation dans chaque fibre et relève  $\text{Id}_B$ . Au niveau du système local  $\mathfrak{o}(\xi)$  elle induit un automorphisme qui vaut  $-\text{Id}$  dans chaque fibre. Ainsi  $I^* : H^*(B; \mathfrak{o}(\xi)) \rightarrow H^*(B; \mathfrak{o}(\xi))$  est la multiplication par  $-1$ . Par fonctorialité  $e(I^*\xi) = I^*e(\xi) = -e(\xi)$ , mais  $I^*\xi = \xi$  donc  $e(\xi) = -e(\xi)$ .

(d) Soit  $M^n$  une variété fermée orientée. L'on note  $[M]$  sa classe fondamentale,  $e(M) = e(TM) \in H^n(M; \mathbb{Z})$  et

$$\chi(M) = \sum_i (-1)^i \dim H^i(M; \mathbb{Q})$$

sa caractéristique d'Euler-Poincaré.

**Théorème 4.27.** *L'on a*

$$\langle e(M), [M] \rangle = \chi(M).$$

$\square$

Ceci justifie la terminologie de *classe d'Euler*. Pour une preuve le lecteur pourra consulter [Husemoller, §18.7]. La preuve implique les notions de classe fondamentale, classe de Thom, isomorphisme de Thom, et dualité de Poincaré. Nous touchons brièvement à certaines d'entre elles dans la dernière partie du cours.



Notons par ailleurs que l'égalité précédente fait sens aussi dans le cas non-orientable : en notant  $\mathfrak{o}_M$  le système local d'orientation de  $M$  avec fibre  $\mathbb{Z}$ , l'on a  $e(M) \in H^n(M; \mathfrak{o}_M)$ ,  $[M] \in H_n(M; \mathfrak{o}_M)$  et  $\langle e(M), [M] \rangle \in H_0(M; \mathfrak{o}_M \otimes \mathfrak{o}_M)$ . Or  $\mathfrak{o}_M \otimes \mathfrak{o}_M = \mathbb{Z}$ , ce qui fait que le dernier groupe d'homologie est canoniquement isomorphe à  $\mathbb{Z}$ .

4.2.7. *Classes de Stiefel-Whitney et Chern comme classes d'obstruction.*

(I) CLASSES DE STIEFEL-WHITNEY.

**Définition 4.28.** *Soit  $\xi^n \rightarrow B$  un fibré vectoriel de rang  $n$  sur  $\mathbb{R}$ . La  $j$ -ème classe d'obstruction de Stiefel-Whitney, notée*

$$w_j^{obstr}(\xi) \in H^j(B; \mathbb{Z}/2),$$

*est la réduction modulo 2 de la classe primaire d'obstruction du fibré  $V_{n-j+1}(\xi)$  dont les fibres sont les variétés de Stiefel des  $n-j+1$ -repères dans les fibres de  $\xi$ . Autrement dit,  $w_j^{obstr}(\xi)$  est la réduction modulo 2 de la classe primaire d'obstruction à l'existence de  $n-j+1$  sections linéairement indépendantes sur le squelette  $B_j$ .*

Rappelons que la fibre  $V_{n-j+1}(\mathbb{R}^n)$  est  $j-2$ -connexe, avec  $j-2 = n - (n-j+1) - 1$ . Ainsi le fibré  $V_{n-j+1}(\xi)$  possède toujours une section sur le squelette  $B_{j-1}$ , toutes deux telles sections sont homotopes sur le squelette  $B_{j-2}$ , et il existe une section sur le squelette  $B_j$  si et seulement si la classe primaire d'obstruction

$$\theta^j(V_{n-j+1}(\xi)) \in H^j(B; \{\pi_{j-1}V_{n-j+1}(\mathbb{R}^n)\})$$

est nulle. Rappelons par ailleurs que

$$\pi_{j-1}(V_{n-j+1}(\mathbb{R}^n)) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}/2, & j \text{ pair et } j < n, \\ \mathbb{Z}, & j \text{ impair ou } j = n. \end{cases}$$

Dans la première situation, où  $\pi_{j-1}(V_{n-j+1}(\mathbb{R}^n)) \simeq \mathbb{Z}/2$ , le système local  $\{\pi_{j-1}V_{n-j+1}(\mathbb{R}^n)\}$  est nécessairement trivial puisque  $\mathbb{Z}/2$  ne possède pas d'automorphismes non-triviaux. La classe primaire d'obstruction vit alors dans  $H^j(B; \mathbb{Z}/2)$  et l'on a  $w_j^{obstr}(\xi) = \theta^j(V_{n-j+1}(\xi))$ .

Dans la deuxième situation, où  $\pi_{j-1}(V_{n-j+1}(\mathbb{R}^n)) \simeq \mathbb{Z}$ , le système local de coefficients  $\{\pi_{j-1}V_{n-j+1}(\mathbb{R}^n)\}$  peut être non trivial. Néanmoins, puisque la fibre  $\mathbb{Z}$  admet un unique morphisme non-trivial vers  $\mathbb{Z}/2$ , la réduction modulo 2 de ce système local existe toujours et est un système local trivial. Dans cette situation  $w_j^{obstr}(\xi) = \theta^j(V_{n-j+1}(\xi)) \bmod 2$  est en général différente de la classe d'obstruction  $\theta^j(V_{n-j+1}(\xi))$ .

Les classes primaires d'obstruction étant fonctorielles, l'on a  $\theta^j(f^*\xi) = f^*\theta^j(\xi)$  pour toute application continue  $f : B' \rightarrow B$ , et les réductions modulo 2 vérifient en particulier aussi

$$w_j^{obstr}(f^*\xi) = f^*w_j^{obstr}(\xi).$$

**Théorème 4.29.** *L'on a égalité entre les classes de Stiefel-Whitney  $w_j(\xi)$  définies comme tirés-en-arrière des classes de Stiefel-Whitney universelles sur la grassmannienne  $G_n^{\mathbb{R}}$ , et les classes de Stiefel-Whitney d'obstruction  $w_j^{obstr}(\xi)$  :*

$$w_j(\xi) = w_j^{obstr}(\xi) \in H^j(B; \mathbb{Z}/2).$$

*Démonstration.* (cf. [Milnor, Thm. 12.1]) Soient  $\gamma_n^{\mathbb{R}} \rightarrow G_n^{\mathbb{R}}$  le fibré tautologique et  $w_1, \dots, w_n$  ses classes de Stiefel-Whitney, de sorte que  $H^*(G_n^{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}/2) \simeq \mathbb{Z}/2[w_1, \dots, w_n]$ . Il s'ensuit qu'il existe des polynômes en  $n$ -variables  $f_j \in \mathbb{Z}/2[Y_1, \dots, Y_n]$ ,  $j = 1, \dots, n$  tels que

$$w_j^{obstr}(\gamma_n^{\mathbb{R}}) = f_j(w_1, \dots, w_n).$$

Puisque  $w_j^{obstr}(\gamma_n^{\mathbb{R}}) \in H^j(G_n^{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}/2)$ , il s'ensuit que chaque polynôme  $f_j$  est de la forme

$$f_j(w_1, \dots, w_n) = f'_j(w_1, \dots, w_{j-1}) + \lambda_j w_j,$$

avec  $f'_j \in \mathbb{Z}/2[w_1, \dots, w_{j-1}]$  homogène de degré  $j$  et  $\lambda_j \in \mathbb{Z}/2$ .

Par functorialité, pour tout fibré  $\xi \rightarrow B$  de rang  $n$  l'on a

$$w_j^{obstr}(\xi) = f'_j(w_1(\xi), \dots, w_{j-1}(\xi)) + \lambda_j w_j(\xi).$$

Montrons d'abord que  $f'_j = 0$ . Considérons à ce propos le fibré  $\xi = \gamma_{j-1}^{\mathbb{R}} \oplus \epsilon_{n-j+1}^{\mathbb{R}} \rightarrow G_{j-1}^{\mathbb{R}}$ , avec  $\epsilon_{n-j+1}^{\mathbb{R}}$  le fibré trivial de rang  $n - j + 1$ . Le fibré  $\xi$  admet  $n - j + 1$  sections globales linéairement indépendantes en chaque point. Par conséquent, la classe d'obstruction  $\theta^j(V_{n-j+1}(\xi))$  est nulle, et il en est de même pour sa réduction modulo 2 :  $w_j^{obstr}(\xi) = 0$ . Par ailleurs, par stabilité de la classe de Stiefel-Whitney  $w_j$ , l'on a  $w_j(\xi) = w_j(\gamma_{j-1}^{\mathbb{R}}) = 0$ . Ainsi

$$f'_j(w_1(\gamma_{j-1}^{\mathbb{R}}), \dots, w_{j-1}(\gamma_{j-1}^{\mathbb{R}})) = 0$$

et, puisque les classes de Stiefel-Whitney universelles sont algébriquement indépendantes, l'on obtient que  $f'_j = 0$ .

Nous avons donc

$$w_j^{obstr}(\xi) = \lambda_j w_j(\xi)$$

pour tout fibré  $\xi \rightarrow B$  de rang  $n$ , avec  $\lambda_j = \lambda_{j,n} \in \mathbb{Z}/2$ . Nous souhaitons montrer que  $\lambda_j = 1$  pour tout  $j$ . Nous donnons la démonstration uniquement pour  $j = n$ . (La démonstration pour  $j < n$  est similaire mais utilise une description géométrique d'un générateur de  $\pi_{j-1}(V_{n-j+1}(\mathbb{R}^n))$  que nous n'avons pas discutée, cf. [Steenrod, §25.6].)

Considérons le fibré  $\xi \rightarrow \mathbb{R}P^n$  défini comme suit : après identification par dualité  $\mathbb{R}P^n \cong \mathbb{P}((\mathbb{R}^{n+1})^\vee) \cong G_{n+1,n}^{\mathbb{R}}$ , le fibré  $\xi$  est le fibré tautologique  $\gamma_{n+1,n}^{\mathbb{R}} \rightarrow G_{n+1,n}^{\mathbb{R}}$  au-dessus de la grassmannienne des  $n$ -plans dans  $\mathbb{R}^{n+1}$ . De façon équivalente, en regardant  $\mathbb{R}P^n$  comme  $S^n/\{\pm 1\}$ , la fibre de  $\xi$  au-dessus d'un point  $[(u, -u)] \in \mathbb{R}P^n$  est l'hyperplan  $u^\perp \subset \mathbb{R}^{n+1}$ .

Fixons un point  $u_0 \in S^n$ , avec  $p = [(u_0, -u_0)] \in \mathbb{R}P^n$  le point associé sur  $\mathbb{R}P^n$ . La correspondance

$$[(u, -u)] \mapsto u_0 - \langle u_0, u \rangle u$$

définit une section de  $\xi$  qui s'annule uniquement au point  $p$ . En choisissant une décomposition cellulaire de  $\mathbb{R}P^n$  ayant une unique cellule en chaque dimension  $\leq n$  et en choisissant le point  $p$  sur la cellule de dimension maximale, l'on obtient une section  $s$  non-nulle sur le  $n-1$ -squelette de  $\mathbb{R}P^n$ . Le cocycle d'obstruction associé à l'unique cellule de dimension  $n$  un générateur de  $\pi_{n-1}(V_1(\xi_p)) \simeq \pi_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \simeq \mathbb{Z}$ . En effet, considérons la trivialisaton de  $\xi$  sur un voisinage  $U$  de  $p$  donnée de la manière suivante : pour un point  $q$  proche de  $p$  l'on note  $u = u(q) \in S^n$  l'unique représentant de  $q$  qui est proche de  $u_0$ , et la trivialisaton est  $U \times \xi_p \mapsto \xi|_U$ ,  $(q, v) \mapsto (q, v - \langle v, u \rangle u)$ . Lorsque  $q$  varie sur  $\mathbb{R}P^n$  le long d'une petite sphère  $S^{n-1}$  centrée en  $p$ , le point  $u$  varie sur  $S^n$  le long d'une petite sphère  $S^{n-1}$  centrée en  $u_0$  et l'application  $S^{n-1} \rightarrow u_0^\perp \setminus \{0\}$  déterminée par la section  $s$  prend la forme  $u \mapsto -(u - \langle u, u_0 \rangle u_0) / \langle u, u_0 \rangle$ . En composant avec une retraction de  $u_0^\perp \setminus \{0\}$  sur une sphère centrée en 0, ceci décrit une application de degré  $\pm 1$  et donc un générateur de  $\pi_{n-1}(V_1(\xi_p))$  comme annoncé. La réduction modulo 2 d'une tel générateur étant non-nulle, l'on déduit que la réduction modulo 2 de la classe d'obstruction est non-nulle, de sorte que  $\lambda_n \neq 0$ .  $\square$

### (I) CLASSES DE CHERN.

**Définition 4.30.** Soit  $\xi^n \rightarrow B$  un fibré vectoriel de rang  $n$  sur  $\mathbb{C}$ . La  $j$ -ème classe d'obstruction de Chern, notée

$$c_j^{obstr}(\xi) \in H^{2j}(B; \mathbb{Z}),$$

est la classe primaire d'obstruction du fibré  $V_{n-j+1}(\xi)$  dont les fibres sont les variétés de Stiefel des  $n-j+1$ -repères complexes dans les fibres de  $\xi$ . Autrement dit,  $c_j^{obstr}(\xi)$  est la classe primaire d'obstruction à l'existence de  $n-j+1$  sections linéairement indépendantes sur  $\mathbb{C}$  définies sur le squelette  $B_{2j}$ .

Rappelons que la fibre  $V_{n-j+1}(\mathbb{C}^n)$  est  $2j-2$ -connexe, avec  $2j-2 = 2(n - (n-j+1))$ . Ainsi le fibré  $V_{n-j+1}(\xi)$  possède toujours une section sur le squelette  $B_{2j-1}$ , toutes deux telles sections sont homotopes sur le squelette  $B_{2j-2}$ , et il existe une section sur le squelette  $B_{2j}$  si et seulement si la classe primaire d'obstruction

$$\theta^{2j}(V_{n-j+1}(\xi)) \in H^{2j}(B; \{\pi_{2j-1}V_{n-j+1}(\mathbb{C}^n)\})$$

est nulle. Rappelons par ailleurs que

$$\pi_{2j-1}(V_{n-j+1}(\mathbb{C}^n)) \simeq \mathbb{Z}.$$

**Remarque 4.31.** *Il découle de la démonstration de l'isomorphisme précédent, que nous ne détaillons pas, que le système local*

$$\{\pi_{2j-1}V_{n-j+1}(\mathbb{C}^n)\}$$

*est trivial et canoniquement isomorphe à  $\mathbb{Z}$  pour tout fibré complexe  $\xi$ . Ces propriétés sont ultimement des avatars du fait que  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$  est connexe, ou encore du fait que  $\mathbb{C}^n$  regardé comme espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  possède une orientation canonique.*

*À titre d'exemple, considérons le cas  $j = n$  : le choix d'un isomorphisme linéaire complexe  $\xi_b \simeq \mathbb{C}^n$ , qui se restreint en particulier à un homéomorphisme  $\xi_b \setminus \{0\} \simeq \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ , met en évidence un générateur de  $\pi_{2n-1}(\xi_b \setminus \{0\})$  donné par l'inclusion de la sphère unité  $S^{2n-1} \hookrightarrow \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ . Puisque  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$  agit librement et transitivement sur l'ensemble des isomorphismes linéaires complexes  $\xi_b \simeq \mathbb{C}^n$ , il s'ensuit que ce dernier est connexe par arcs et donc le générateur en question est indépendant des choix et donc canoniquement déterminé. Ceci équivaut au fait que le système local  $\{\pi_{2n-1}V_1(\mathbb{C}^n)\}$  est trivial et canoniquement isomorphe à  $\mathbb{Z}$ .*

*Toujours à titre d'exemple, considérons le cas  $j = 1$  : l'on a  $V_n(\mathbb{C}^n) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$  et  $\pi_1(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$  est canoniquement isomorphe à  $\mathbb{Z}$ , ayant comme générateur la classe de tout lacet  $\gamma : S^1 \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$  tel que*

$$\frac{\det}{|\det|} \circ \gamma : S^1 \rightarrow S^1$$

*est une application de degré 1. Lorsque  $\gamma$  est un tel lacet,  $\varphi \circ \gamma$  en est aussi un pour tout  $\varphi \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$  puisque  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$  est connexe par arcs et le degré est un invariant d'homotopie. Ainsi  $\pi_1(\xi_b \setminus \{0\})$  possède un générateur canonique, ce qui équivaut au fait que le système local  $\{\pi_1V_n(\mathbb{C}^n)\}$  est trivial et canoniquement isomorphe à  $\mathbb{Z}$ .*

*Dans le cas général  $1 < j < n$ , l'isomorphisme  $\pi_{2j-1}V_{n-j+1}(\mathbb{C}^n) \simeq \mathbb{Z}$  se ramène à l'isomorphisme canonique  $\pi_{2j-1}(S^{2j-1}) \simeq \mathbb{Z}$  donné par le degré. Le fait que le système local  $\{\pi_{2j-1}V_{n-j+1}(\mathbb{C}^n)\}$  est trivial et canoniquement isomorphe à  $\mathbb{Z}$  est établi par des arguments similaires à ceux donnés dans les cas  $j = 1$  et  $j = n$ .*

L'on définit ainsi

$$c_j^{obstr}(\xi) = \theta^{2j}(V_{n-j+1}(\xi)) \in H^{2j}(B; \mathbb{Z}).$$

Les classes primaires d'obstruction étant fonctorielles, l'on a en particulier

$$c_j^{obstr}(f^*\xi) = f^*c_j^{obstr}(\xi)$$

pour toute application continue  $f : B' \rightarrow B$ .

**Théorème 4.32.** *L'on a égalité entre les classes de Chern  $c_j(\xi)$  définies comme tirés-en-arrière des classes de Chern universelles sur la grassmannienne  $G_n^{\mathbb{C}}$ , et les classes de Chern d'obstruction  $c_j^{obstr}(\xi)$  :*

$$c_j(\xi) = c_j^{obstr}(\xi) \in H^{2j}(B; \mathbb{Z}).$$

□

La preuve suit les mêmes lignes que celle du théorème concernant les classes de Stiefel-Whitney : l'on démontre par des considérations abstraites que pour tout fibré  $\xi$  l'on a une égalité  $c_j^{obstr}(\xi) = \lambda_{j,n} c_j(\xi)$  avec  $\lambda_{j,n} \in \mathbb{Z}$  une constante universelle qui ne dépend que du rang  $n$  et du degré  $j$ , et l'on procède à une analyse explicite de certains fibrés tautologiques pour démontrer que  $\lambda_{j,n} = 1$  pour tous  $j$  et  $n$ .

Le corollaire suivant est immédiat.

**Corollaire 4.33.** *Soit  $\xi$  un fibré complexe de rang  $n$  sur  $\mathbb{C}$ . L'on a égalité*

$$c_n(\xi) = e(\xi),$$

*où la classe d'Euler est calculée en considérant  $\xi$  comme un fibré vectoriel de rang  $2n$  sur  $\mathbb{R}$ , muni de l'orientation canonique déterminée par la structure complexe.* □

### 4.3. Le théorème de Leray-Hirsch. Cohomologie des Grassmanniennes.

Nous démontrons dans cette section le Théorème 4.2. Nous utilisons un minimum de technologie à travers le théorème de Leray-Hirsch.

#### 4.3.1. Le théorème de Leray-Hirsch.

**Définition 4.34.** Une paire localement triviale de fibrations, notée  $(E, E_0) \xrightarrow{p} B$ , est une paire topologique  $(E, E_0)$  avec  $E_0 \subset E$  ouvert,  $E \xrightarrow{p} B$  une fibration localement triviale de fibre  $F$ , ayant la propriété qu'il existe un ouvert  $F_0 \subset F$  et des trivialisations locales simultanées

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{\Phi_U} & U \times F \\ & \searrow p & \swarrow \\ & U & \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} p^{-1}(U) \cap E_0 & \xrightarrow{\Phi_U|} & U \times F_0 \\ & \searrow p & \swarrow \\ & U & \end{array}$$

sur un ensemble d'ouverts  $U \subset B$  qui forment un recouvrement ouvert.

La fibre d'une telle fibration au-dessus d'un point  $b \in B$  est par définition la paire  $(p^{-1}(b), p^{-1}(b) \cap E_0)$ . Un ouvert  $U$  comme ci-dessus s'appelle ouvert de trivialisations.

Il s'ensuit de la définition que  $E_0 \xrightarrow{p|} B$  est une fibration localement triviale de fibre  $F_0$ . La notion habituelle de fibration localement triviale correspond au cas  $E_0 = \emptyset$ .

**Définition 4.35.** Une paire localement triviale de fibrations est dite de type fini s'il existe un recouvrement de la base par un nombre fini d'ouverts de trivialisations.

Dans le théorème qui suit nous utilisons des groupes de cohomologie à coefficients dans un anneau  $A$  fixé.

**Théorème 4.36** (Leray-Hirsch). Soit  $(E, E_0) \xrightarrow{p} B$  une paire localement triviale de fibrations de type fini telle que la cohomologie de la fibre est un  $A$ -module libre de rang fini en chaque degré.

Supposons qu'il existe une famille d'éléments  $\{a_i : i \geq 1\} \subset H^*(E, E_0)$  ayant la propriété que, en restriction à chaque fibre, ils engendrent librement la cohomologie de la fibre. Alors  $H^*(E, E_0)$  est un  $H^*(B)$ -module libre dont les éléments  $a_1, \dots, a_r$  forment une base. La structure de module est donnée par

$$\alpha \cdot a = p^*(\alpha) \cup a, \quad \alpha \in H^*(B), \quad a \in H^*(E, E_0).$$

*Démonstration.* Le cas d'une fibration triviale est une conséquence du théorème de Künneth C.6. Le cas d'une fibration quelconque est démontré en utilisant la suite de Mayer-Vietoris. Pour les détails nous

renvoyons par exemple à [Husemoller §17.1, Thm. 1.1] ou [Hatcher §4.D].  $\square$

**Remarque.** Le théorème est valable plus généralement pour des fibrations de Serre, c'est-à-dire des applications qui vérifient la propriété de relèvement des homotopies pour tous les cubes, sans aucune hypothèse de type fini. La preuve dans ce cadre utilise la suite spectrale de Leray-Serre.

**Remarque.** L'isomorphisme  $H^*(E, E_0) \simeq H^*(B) \otimes [\{a_i : i \geq 1\}]$  n'est pas en général un isomorphisme d'algèbres.

4.3.2. *La cohomologie de Grassmanniennes.* Nous démontrons maintenant le Théorème 4.2, en suivant pour l'essentiel [Hatcher, §4.D]. Pour fixer les idées nous donnons la preuve pour  $G_n^{\mathbb{R}}$  et nous utilisons donc dans toute la suite des coefficients  $\mathbb{Z}/2$ . La preuve pour  $G_n^{\mathbb{C}}$  et coefficients entiers est en tout point analogue.

La stratégie de la preuve sera la suivante. Dans une première partie nous allons construire une fibration  $F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} G_n^{\mathbb{R}}$  qui satisfait les hypothèses du théorème de Leray-Hirsch, telle que l'espace total  $E$  a le même anneau de cohomologie que  $(G_1^{\mathbb{R}})^n$  et telle que  $p^*$  est injective et a comme image le sous-anneau des polynômes symétriques dans  $H^*((G_1^{\mathbb{R}})^n)$ . Dans une deuxième partie nous allons montrer que cette construction implique la conclusion du théorème.

PREMIÈRE PARTIE DE LA PREUVE.

*Étape 1 : construction de la fibration  $F \hookrightarrow E \rightarrow G_n^{\mathbb{R}}$ .*

L'on appelle *drapeau de dimension  $n$*  dans  $\mathbb{R}^k$  une suite de sous-espaces vectoriels  $V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_n$  dans  $\mathbb{R}^k$  avec  $\dim V_i = i$ . De façon équivalente, un drapeau de dimension  $n$  est une suite ordonnée  $(L_1, \dots, L_n)$  de  $n$  droites vectorielles orthogonales deux à deux dans  $\mathbb{R}^k$ . L'on note

$$F_n(\mathbb{R}^k)$$

l'ensemble des drapeaux de dimension  $n$  dans  $\mathbb{R}^k$ . C'est naturellement une sous-variété fermée de  $(\mathbb{R}P^{k-1})^n$ , de dimension  $(k-1) + (k-2) + \dots + (k-n+1) = (n-1)k - (n-1)n/2$ .

L'on a une fibration  $F_n(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow F_n(\mathbb{R}^k) \xrightarrow{p} G_n(\mathbb{R}^k)$  définie par  $p : (L_1, \dots, L_n) \mapsto L_1 \oplus \dots \oplus L_n$ . Par passage à la limite sur  $k \rightarrow \infty$  l'on obtient une fibration

$$F_n(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow F_n(\mathbb{R}^\infty) \xrightarrow{p} G_n^{\mathbb{R}}.$$

C'est la fibration recherchée : l'on pose

$$F = F_n(\mathbb{R}^n), \quad E = F_n(\mathbb{R}^\infty).$$

*Étape 2 : calcul de la cohomologie de  $F_n(\mathbb{R}^\infty)$ .*

La variété des drapeaux  $F_n(\mathbb{R}^\infty)$  est munie de  $n$  applications

$$p_i : F_n(\mathbb{R}^\infty) \rightarrow \mathbb{R}P^\infty, \quad (L_1, \dots, L_n) \mapsto L_i.$$

Nous montrons par récurrence sur  $n \geq 1$  que

$$H^*(F_n(\mathbb{R}^\infty)) \simeq \mathbb{Z}/2[x_1, \dots, x_n], \quad |x_i| = 1,$$

avec  $x_i = p_i^*x$  et  $x$  le générateur de  $H^1(\mathbb{R}P^\infty) \simeq \mathbb{Z}/2$ , de sorte que  $H^*(\mathbb{R}P^\infty) \simeq \mathbb{Z}/2[x]$ .

Le cas  $n = 1$  est évident puisque  $F_1(\mathbb{R}^\infty) = \mathbb{R}P^\infty$ . En supposant l'énoncé vrai pour  $n - 1$ , considérons la fibration

$$\mathbb{R}P^\infty \hookrightarrow F_n(\mathbb{R}^\infty) \xrightarrow{p} F_{n-1}(\mathbb{R}^\infty),$$

avec  $p : (L_1, \dots, L_n) \mapsto (L_1, \dots, L_{n-1})$ . Le théorème de Leray-Hirsch permet de conclure en remarquant le fait que les éléments  $x_n^i$ ,  $i \geq 1$  engendrent la cohomologie de chaque fibre en tant que  $\mathbb{Z}/2$ -espace vectoriel.

*Étape 3 : calcul de la cohomologie de  $F_n(\mathbb{R}^k)$ .*

L'on considère à nouveau les applications  $p_i : F_n(\mathbb{R}^k) \rightarrow \mathbb{R}P^{k-1}$ ,  $(L_1, \dots, L_n) \mapsto L_i$  et l'on note  $x_i = p_i^*x$ , où  $x$  est le générateur de  $H^1(\mathbb{R}P^{k-1})$ , de sorte que  $H^*(\mathbb{R}P^{k-1}) \simeq \mathbb{Z}/2[x]/(x^k)$ . L'on montre par récurrence sur  $n \geq 1$  que  $H^*(F_n(\mathbb{R}^k))$  est un  $\mathbb{Z}/2$ -espace vectoriel ayant comme base

$$\{x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} : 0 \leq i_j \leq k - j, j = 1, \dots, n\}.$$

Ceci découle à nouveau du théorème de Leray-Hirsch en considérant la fibration

$$\mathbb{R}P^{k-n} \hookrightarrow F_n(\mathbb{R}^k) \xrightarrow{p} F_{n-1}(\mathbb{R}^k)$$

donnée par  $p : (L_1, \dots, L_n) \mapsto (L_1, \dots, L_{n-1})$ . En effet, les éléments  $x_n^i$ ,  $i = 0, \dots, k - n$  engendrent la cohomologie de chaque fibre en tant que  $\mathbb{Z}/2$ -espace vectoriel.

*Étape 4 : l'application  $p^* : H^*(G_n^{\mathbb{R}}) \rightarrow H^*(F_n(\mathbb{R}^\infty))$  est injective.*

Nous considérons la fibration construite à la première étape  $F_n(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow F_n(\mathbb{R}^\infty) \xrightarrow{p} G_n^{\mathbb{R}}$ . Nous avons déjà calculé à l'étape 2 la cohomologie  $H^*(F_n(\mathbb{R}^\infty))$ , qui contient les classes  $\{x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} : 0 \leq i_j \leq n - j, j = 1, \dots, n\}$ . Par l'étape 3, celles-ci engendrent librement la cohomologie de la fibre  $F_n(\mathbb{R}^n)$ . Par le théorème de Leray-Hirsch,  $H^*(F_n(\mathbb{R}^\infty))$  est un module libre sur  $H^*(G_n^{\mathbb{R}})$  ayant comme base ces mêmes classes de cohomologie

$$\{x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} : 0 \leq i_j \leq n - j, j = 1, \dots, n\}.$$

Puisque cet ensemble contient la classe  $1 \in H^0(F_n(\mathbb{R}^\infty))$ , il s'ensuit que  $p^* : H^*(G_n^{\mathbb{R}}) \rightarrow H^*(F_n(\mathbb{R}^\infty))$  est injective.



*Étape 5 : l'image de  $p^* : H^*(G_n^{\mathbb{R}}) \rightarrow H^*(F_n(\mathbb{R}^\infty)) \simeq \mathbb{Z}/2[x_1, \dots, x_n]$  est constituée du sous-anneau  $\mathbb{Z}/2[x_1, \dots, x_n]^{\mathfrak{S}_n}$  des polynômes symétriques en  $x_1, \dots, x_n$ .*

L'image de  $p^*$  est contenue dans  $\mathbb{Z}/2[x_1, \dots, x_n]^{\mathfrak{S}_n}$ . En effet, étant donnée une permutation de drapeaux  $\pi : F_n(\mathbb{R}^\infty) \rightarrow F_n(\mathbb{R}^\infty)$ , l'application  $\pi^*$  induite sur la cohomologie  $H^*(F_n(\mathbb{R}^\infty)) \simeq \mathbb{Z}/2[x_1, \dots, x_n]$  est déterminée par la permutation correspondante des variables  $x_1, \dots, x_n$ . Puisque  $p\pi = p$  l'on obtient  $\pi^*p^* = p^*$ . Ceci vaut pour toute permutation  $\pi$ , ce qui équivaut au fait que l'image de  $p^*$  est contenue dans  $\mathbb{Z}/2[x_1, \dots, x_n]^{\mathfrak{S}_n}$ .

Pour montrer que l'image de  $p^*$  coïncide avec  $\mathbb{Z}/2[x_1, \dots, x_n]^{\mathfrak{S}_n}$  il suffit de montrer l'égalité

$$\dim_{\mathbb{Z}/2} H^*(G_n^{\mathbb{R}}) = \dim_{\mathbb{Z}/2} \mathbb{Z}/2[x_1, \dots, x_n]^{\mathfrak{S}_n}$$

en chaque degré  $\ell \geq 0$ .

Le plus simple est d'utiliser les séries de Poincaré : étant donné un  $\mathbb{Z}/2$ -espace vectoriel gradué  $A = \bigoplus_{i \geq 0} A_i$  de dimension finie en chaque degré, sa *série de Poincaré* est définie comme

$$p_A(t) = \sum_{i \geq 0} (\dim A_i) t^i \in \mathbb{Z}[[t]].$$

Ce qui rend l'utilisation des séries de Poincaré particulièrement efficaces est l'identité évidente  $p_{A \otimes B}(t) = p_A(t)p_B(t)$  pour tous  $A, B$ .

Dans notre situation, nous avons les séries de Poincaré suivantes :

- pour  $\mathbb{Z}/2[x]$ ,  $|x| = 1$  :  $p(t) = \sum_{i \geq 0} t^i = (1 - t)^{-1}$ .
- pour  $H^*(F_n(\mathbb{R}^\infty))$  :  $q(t) = (1 - t)^{-n}$ .
- pour  $H^*(F_n(\mathbb{R}^n))$  :  $r(t) = (1 + t)(1 + t + t^2) \dots (1 + t + \dots + t^{n-1}) = (1 - t)^{-n} \prod_{i=1}^n (1 - t^i)$ .
- l'isomorphisme de  $\mathbb{Z}/2$ -espaces vectoriels gradués  $H^*(F_n(\mathbb{R}^\infty)) \simeq H^*(G_n^{\mathbb{R}}) \otimes H^*(F_n(\mathbb{R}^n))$  entraîne que la série de Poincaré de  $H^*(G_n^{\mathbb{R}})$  est

$$s(t) = q(t)/r(t) = \prod_{i=1}^n (1 - t^i)^{-1}.$$

– le sous-anneau des polynômes symétriques  $\mathbb{Z}/2[x_1, \dots, x_n]^{\mathfrak{S}_n}$  a comme base les polynômes symétriques élémentaires  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ , avec  $|\sigma_i| = i$ . Ainsi  $\mathbb{Z}/2[x_1, \dots, x_n]^{\mathfrak{S}_n} \simeq \mathbb{Z}/2[\sigma_1, \dots, \sigma_n] \simeq \mathbb{Z}/2[\sigma_1] \otimes \dots \otimes \mathbb{Z}/2[\sigma_n]$  a comme série de Poincaré le produit des séries de Poincaré des  $\mathbb{Z}/2[\sigma_i]$  :

$$\bar{s}(t) = \prod_{i=1}^n (1 - t^i)^{-1} = s(t).$$

L'égalité  $\bar{s}(t) = s(t)$  est la conclusion recherchée.

DEUXIÈME PARTIE DE LA PREUVE.

À ce stade de la preuve nous avons déjà calculé la cohomologie  $H^*(G_n^{\mathbb{R}})$ . Nous montrons maintenant que l'application de scindement

$$(\mathbb{R}P^\infty)^{\times n} \xrightarrow{f} G_n^{\mathbb{R}}$$

définie au §4.1 induit une application  $f^* : H^*(G_n^{\mathbb{R}}) \rightarrow (H^*(\mathbb{R}P^\infty))^{\otimes n} \simeq \mathbb{Z}/2[x_1, \dots, x_n]$  qui est injective et dont l'image coïncide avec le sous-anneau des polynômes symétriques en les variables  $x_1, \dots, x_n$ . L'observation clé est que les applications

$$F_n(\mathbb{R}^\infty) \xrightarrow{p} G_n^{\mathbb{R}}$$

et

$$F_n(\mathbb{R}^\infty) \xrightarrow{i} (\mathbb{R}P^\infty)^{\times n} \xrightarrow{f} G_n^{\mathbb{R}}$$

sont homotopes. En effet, toutes les deux sont des applications classifiantes pour le fibré tautologique  $\mathcal{L}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{L}_n$  de rang  $n$  au-dessus de  $F_n(\mathbb{R}^\infty)$  dont la fibre au-dessus d'un drapeau  $(L_1, \dots, L_n)$  est  $L_1 \oplus \dots \oplus L_n$ . Ceci est clair pour  $p$  par construction, alors que pour  $f \circ i$  nous avons

$$(f \circ i)^* \gamma_n^{\mathbb{R}} = i^* f^* \gamma_n^{\mathbb{R}} = i^* (p_1^* \gamma_1^{\mathbb{R}} \oplus \dots \oplus p_n^* \gamma_1^{\mathbb{R}}) = \mathcal{L}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{L}_n.$$

La conclusion découle alors du fait que  $i^*$  est un isomorphisme en cohomologie et la structure algébrique sur  $H^*(F_n(\mathbb{R}^\infty))$  est induite par celle de  $H^*((\mathbb{R}P^\infty)^{\times n})$  via  $i^*$ .

Ceci achève la preuve du Théorème 4.2 et donc la construction axiomatique des classes de Stiefel-Whitney et Chern.  $\square$

## 5. DUALITÉ DE POINCARÉ

Dans cette section nous présentons des applications de la dualité de Poincaré aux classes caractéristiques et à la topologie des variétés algébriques. Nous invitons le lecteur à étudier la notion de classe fondamentale et l'énoncé du théorème de dualité de Poincaré dans le livre de Hatcher, *Algebraic Topology*, §3.3. Des références plus précises et/ou alternatives sont les suivantes :

– Définition de la classe fondamentale et de l'orientabilité topologique d'une variété : [Bredon, §VI.7] et [Hatcher, §3.3].

– L'orientabilité d'une variété lisse (définie en termes d'atlas) équivaut à son orientabilité au sens topologique (définie en termes de groupes d'homologie  $H_n(M, M \setminus \{x\}; \mathbb{Z})$ ,  $x \in M$ ) : [Bredon, Proposition VI.7.15].

– Définition et propriétés générales du produit cup et du produit cap : [Hatcher §3.2, 3.3]

– Théorème de dualité de Poincaré : [Hatcher §3.3, Th. 3.30]

Des références possibles pour certains des points que nous abordons en détail plus bas sont les suivantes :

Classe de Thom d'un fibré vectoriel : [Husemoller §17.7, Th. 7.3], [Bredon §VI.11, Definition 11.1 and Corollary 11.6]

Produit cup et produit d'intersection : [Bredon §VI.11, en particulier pp. 371 sqq.]

**5.1. Orientabilité.** IL N'Y AURA PAS DE NOTES DE COURS SUR CETTE PARTIE. JE VOUS INVITE À ÉTUDIER LES RÉFÉRENCES INDIQUÉES.

**5.2. Dualité de Poincaré.** IL N'Y AURA PAS DE NOTES DE COURS SUR CETTE PARTIE. JE VOUS INVITE À ÉTUDIER LES RÉFÉRENCES INDIQUÉES.

### 5.3. Dualité de Poincaré et classe de Thom.

#### 5.3.1. Définition de la classe de Thom.

**Théorème 5.1** (Existence de la classe de Thom). *Soit  $\xi \xrightarrow{p} B$  un fibré vectoriel sur  $\mathbb{R}$  orienté de rang  $k$  et notons  $\dot{\xi} = \xi \setminus 0_B$  le complémentaire de la section nulle.*

(i) *Pour tout  $i < k$  l'on a  $H^i(\xi, \dot{\xi}) = 0$ .*

(ii) *Il existe une unique classe, appelée classe de Thom et notée*

$$U(\xi) \in H^k(\xi, \dot{\xi})$$

*telle que, pour tout  $b \in B$ , la restriction  $U(\xi)|_{(\xi_b, \dot{\xi}_b)} \in H^k(\xi_b, \dot{\xi}_b)$  coïncide avec le générateur positif.*

(iii) *Le produit cup avec la classe  $U(\xi)$  détermine un isomorphisme*

$$H^i(B) \xrightarrow{\simeq} H^{i+k}(\xi, \dot{\xi}), \quad a \mapsto p^*a \cup U(\xi)$$

*pour tout  $i \geq k$ .*

*Démonstration.* Nous donnons la démonstration en supposant que  $B$  possède un recouvrement fini par des ouverts de trivialisations (on dit que  $\xi$  est de type fini), mais le résultat est vrai en toute généralité.

L'on commence par démontrer les points (i) et (ii). Le groupe de cohomologie  $H^*(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k \setminus \{0\}) = H^*(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k \setminus \{0\}; \mathbb{Z})$  est libre et supporté en degré  $k$ . La formule de Künneth (C.6) assure que, pour tout  $U$ , l'on a  $H^{i+k}(U \times \mathbb{R}^k, U \times (\mathbb{R}^k \setminus \{0\})) \simeq H^i(U) \otimes H^k(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k \setminus \{0\})$  pour tout  $i$ . En particulier (ii) est vérifié pour la restriction de  $\xi$  au-dessus d'ouverts de trivialisations. Par ailleurs, puisque  $H^k(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k \setminus \{0\})$  est de rang 1, l'on obtient (i) pour la restriction de  $\xi$  au-dessus d'ouverts de trivialisations.

Par ailleurs, la suite de Mayer-Vietoris (en cohomologie relative) montre que si les affirmations (i) et (ii) sont vraies pour la restriction de  $\xi$  à  $V$ ,  $W$  et  $V \cap W$ , alors elles le sont aussi pour la restriction de  $\xi$  à  $V \cup W$ . Il suffit de considérer la suite exacte

$$\begin{aligned} H^{i-1}(\xi|_{V \cap W}, \dot{\xi}|_{V \cap W}) &\longrightarrow H^i(\xi|_{V \cup W}, \dot{\xi}|_{V \cup W}) \\ &\longrightarrow H^i(\xi|_V, \dot{\xi}|_V) \oplus H^i(\xi|_W, \dot{\xi}|_W) \longrightarrow H^i(\xi|_{V \cap W}, \dot{\xi}|_{V \cap W}) \end{aligned}$$

Celle-ci entraîne de façon immédiate (i), et aussi (ii) en analysant la structure des flèches dans la suite de Mayer-Vietoris.

Le point (iii) est une conséquence immédiate du théorème de Leray-Hirsch (Théorème 4.36) : la cohomologie  $H^*(\xi, \dot{\xi})$  est un module libre de rang 1 au-dessus de  $H^*(B)$ .  $\square$

Étant donnée une norme sur  $\xi$ , l'on note  $D\xi$ ,  $S\xi$  le fibré unitaire en boules, respectivement le fibré unitaire en sphères. Ainsi, par excision et invariance par homotopie l'on a des isomorphismes induits par restriction

$$H^k(\xi, \dot{\xi}) \xrightarrow{\cong} H^k(D\xi, D\xi \setminus 0_B) \xrightarrow{\cong} H^k(D\xi, S\xi).$$

Via ces isomorphismes, l'on regardera parfois  $U(\xi) \in H^k(D\xi, S\xi)$ .

La caractérisation de la classe de Thom implique de façon directe sa fonctorialité :

**Proposition 5.2** (Fonctorialité de la classe de Thom). *Soit  $\xi \xrightarrow{p} B$  un fibré vectoriel réel orienté de rang  $k$ . Pour toute application  $f : A \rightarrow B$  l'on a*

$$U(f^*\xi) = f^*U(\xi) \in H^k(f^*\xi, f^*\dot{\xi}).$$

□

**Remarque 5.3.** *En cohomologie de de Rham, la classe de Thom est représentée par une  $k$ -forme fermée à support compact dans  $\xi$  dont la restriction à chaque fibre est d'intégrale égale à 1 (Bott-Tu, Proposition 6.18).*

**Remarque 5.4.** *Dans le cas où le fibré  $\xi$  n'est pas orienté ou encore pas orientable, il existe une classe de Thom*

$$U(\xi) \in H^k(\xi, \dot{\xi}; p^*o_\xi)$$

à coefficients dans le système local  $p^*o_\xi$  tiré-en-arrière du système local  $o_\xi$  sur  $B$  de fibre  $H^k(\xi_b, \dot{\xi}_b; \mathbb{Z})$ . Dans le cas où le fibré est orientable mais non orienté, un choix d'orientation identifie  $p^*o_\xi$  à  $\mathbb{Z}$  et on retrouve la construction précédente.

La formule qui suit exprime la multiplicativité de la classe de Thom par rapport aux sommes de Whitney de fibrés et sera utilisée dans la section 5.4. Étant donnés deux fibrés orientés  $\xi$ ,  $\eta$  au-dessus d'une même base  $B$ , l'on oriente  $\xi \oplus \eta$  par la règle suivante : pour tout point  $b \in B$  et tout choix de bases positives  $(v_1, \dots, v_p)$  dans  $\xi_b$  et  $(w_1, \dots, w_q)$  dans  $\eta_b$ , la base  $(v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_q)$  dans  $\xi_b \oplus \eta_b$  est positive.

**Proposition 5.5** (Classe de Thom d'une somme de Whitney). *Avec les notations précédentes l'on a*

$$U(\xi \oplus \eta) = p_\xi^*U(\xi) \cup p_\eta^*U(\eta),$$

avec  $p_\xi : \xi \oplus \eta \rightarrow \xi$  et  $p_\eta : \xi \oplus \eta \rightarrow \eta$  les projections.

*Démonstration.* La formule découle du théorème de Künneth relatif (Théorème C.6). Considérons un produit de disques  $D^p \times D^q$  avec les

projections  $p_1 : D^p \times D^q \rightarrow D^p$  et  $p_2 : D^p \times D^q \rightarrow D^q$ . Le théorème de Künneth relatif (Théorème C.6) assure que l'application

$$H^p(D^p, \partial D^p) \otimes H^q(D^q, \partial D^q) \xrightarrow{\times} H^{p+q}(D^p \times D^q, \partial D^p \times D^q \cup D^p \times \partial D^q)$$

$$\parallel$$

$$H^{p+q}(D^p \times D^q, \partial(D^p \times D^q))$$

donnée par  $\alpha \otimes \beta \mapsto \alpha \times \beta = p_1^* \alpha \cup p_2^* \beta$  est un isomorphisme. De plus, lorsque  $\alpha$  et  $\beta$  sont les générateurs positifs déterminés par l'orientation canonique des disques  $D^p$  et  $D^q$ , leur produit  $\alpha \times \beta$  est le générateur positif déterminé par l'orientation canonique du cube  $D^p \times D^q$ .

Choisissons des normes  $\|\cdot\|_\xi$ ,  $\|\cdot\|_\eta$  sur  $\xi$ ,  $\eta$  et munissons  $\xi \oplus \eta$  de la norme  $\|(v, w)\| = \max\{\|v\|_\xi, \|w\|_\eta\}$ . L'on a alors  $D(\xi \oplus \eta) = D\xi \times_B D\eta$  et  $S(\xi \oplus \eta) = S\xi \times_B D\eta \cup D\xi \times_B S\eta$ . En vertu de la discussion ci-dessus, le produit  $p_\xi^* U(\xi) \cup p_\eta^* U(\eta)$  se restreint au générateur positif de  $H^{p+q}(D(\xi \oplus \eta)_b, S(\xi \oplus \eta)_b)$ ,  $b \in B$  dans chaque fibre. L'unicité de la classe de Thom implique l'égalité souhaitée.  $\square$

5.3.2. *Classe de Thom et dualité de Poincaré.* L'on décrit maintenant la relation entre classe de Thom et dualité de Poincaré. L'on se place dans le contexte suivant :  $\xi \xrightarrow{p} B$  est un fibré vectoriel réel orienté de rang  $k$  au-dessus d'une base  $B$  compacte sans bord et orientée.

**Convention.** Dans le contexte précédent, l'on oriente l'espace total  $\xi$  par la règle de la "base en premier" : en un point  $(b, 0)$  de la section nulle, l'orientation positive de  $T_{(b,0)}\xi \simeq T_b B \oplus \xi_b$  est définie par une base dont les premiers vecteurs appartiennent à  $T_b B$  et y définissent l'orientation positive, alors que les  $k$  derniers vecteurs appartiennent à  $\xi_b$  et y définissent l'orientation positive.

L'on note  $incl : B \hookrightarrow \xi$  l'inclusion de la section nulle. L'on note  $D\xi$ ,  $S\xi$  le fibré unitaire en boules, respectivement le fibré unitaire en sphères, pour un choix de métrique sur  $\xi$ . Ainsi, par excision et invariance par homotopie, l'on a des isomorphismes induits par restriction

$$H^k(\xi, \dot{\xi}) \xrightarrow{\cong} H^k(D\xi, D\xi \setminus 0_B) \xrightarrow{\cong} H^k(D\xi, S\xi).$$

**Proposition 5.6** (classe de Thom et dualité de Poincaré). *Avec la convention précédente et en regardant  $U(\xi) \in H^k(D\xi, S\xi)$ , l'on a*

$$PD(U(\xi)) = incl_*[B] \in H_n(\xi), \quad n = \dim B.$$

*Démonstration.* L'égalité équivaut à

$$U(\xi) \cap [D\xi, S\xi] = incl_*[B].$$

Soit  $\omega_B \in H^n(B; \mathbb{Z})$  la classe d'orientation, définie par  $\langle \omega_B, [B] \rangle = 1$ . L'identité précédente équivaut à

$$\begin{aligned} 1 &= p^* \omega_B \cap (U(\xi) \cap [D\xi, S\xi]) \\ &= (p^* \omega_B \cup U(\xi)) \cap [D\xi, S\xi]. \end{aligned}$$

Or  $p^* \omega_B \cup U(\xi)$  est un générateur de  $H^{n+k}(D\xi, S\xi; \mathbb{Z})$ , de sorte que l'évaluation sur  $[D\xi, S\xi]$  vaut  $\pm 1$ . Le signe  $+1$  vient de notre choix d'orientation pour l'espace total de  $\xi$  donné par la “base en premier”, cf. ci-dessus.  $\square$

Le résultat précédent peut être regardé comme étant de nature locale au voisinage de la section nulle  $0_B$ . La version globale concerne le contexte suivant : l'on considère une variété orientée  $W^{n+k}$  et

$$\text{incl} : B^n \hookrightarrow W^{n+k}$$

une sous-variété fermée orientée. Soit  $\nu = \nu_W B$  le fibré normal à  $B$  dans  $W$ . Le théorème du voisinage tubulaire assure l'existence d'un difféomorphisme  $(D\nu, S\nu) \simeq (T, \partial T)$ , où  $T$  est un voisinage de  $B$  dans  $W$ . L'on oriente le fibré  $\nu$  de sorte que l'orientation de son espace total par la règle de la “base en premier” coïncide avec l'orientation de  $W$  à travers le difféomorphisme donné par le théorème de voisinage tubulaire. L'on considère la composition

$$H^k(D\nu, S\nu) \simeq H^k(T, \partial T) \xleftarrow{\simeq} H^k(W, W \setminus T) \xrightarrow{i^*} H^k(W)$$

et l'on note  $U_B \in H^k(W)$  l'image de la classe de Thom  $U(\nu) \in H^k(D\nu, S\nu)$  (on l'appelle parfois *classe de Thom de B dans W*).

**Proposition 5.7** (dual de Poincaré d'un cycle défini par une sous-variété). *Soit  $B^n \subset W^{n+k}$  une paire de variétés fermées orientées et  $U_B \in H^k(W)$  la classe de Thom de B dans W. L'on a égalité*

$$PD(U_B) = \text{incl}_* [B].$$

*Démonstration.* Pour simplifier la notation l'on identifie la paire  $(T, \partial T)$  constituée du voisinage tubulaire et de son bord à la paire  $(D\nu, S\nu)$ . Considérons le diagramme dans lequel toutes les flèches sont des inclusions

$$\begin{array}{ccccc} B & \xhookrightarrow{i} & D\nu & \xhookrightarrow{j} & W \\ & & \downarrow \text{incl}_D & & \downarrow \text{incl}_W \\ & & (D\nu, S\nu) & \xhookrightarrow[\partial j]{} & (W, W \setminus D\nu). \end{array}$$

Considérons aussi la composition

$$H^k(D\nu, S\nu) \xleftarrow[\simeq]{(\partial j)^*} H^k(W, W \setminus D\nu) \xrightarrow{\text{incl}^*} H^k(W).$$

En utilisant la functorialité de la classe fondamentale

$$(\partial j)_*[D\nu, S\nu] = (\text{incl}_W)_*[W]$$

l'on obtient

$$\begin{aligned} \left( \text{incl}_W^* [(\partial j)^*]^{-1} U(\nu) \right) \cap [W] &= j_*(U(\nu) \cap [D\nu, S\nu]) \\ &= j_* i_* [B] \\ &= \text{incl}_* [B]. \end{aligned}$$

Pour montrer la première égalité nous calculons d'abord

$$(\text{incl}_W)_* \left( \left( \text{incl}_W^* [(\partial j)^*]^{-1} U(\nu) \right) \cap [W] \right) = (\text{incl}_W)_* j_* (U(\nu) \cap [D\nu, S\nu]).$$

L'on conclut en utilisant le fait que la classe à laquelle on applique  $(\text{incl}_W)_*$  provient de  $H_*(D\nu)$  mais pas de  $H_*(S\nu)$ , ensemble sur lequel  $(\text{incl}_W)_*$  est injective.  $\square$

**Exercice 5.** Soit  $B \subset W$  une paire de variétés fermées orientées et  $f : W' \rightarrow W$  une application lisse transverse à  $B$ . Montrer que la différentielle de  $f$  induit un isomorphisme

$$\nu_{W'} f^{-1}(B) \xrightarrow{\cong} f^* \nu_W B,$$

et en déduire la functorialité de la classe de Thom

$$(5.1) \quad U_{f^{-1}(B)} = f^* U_B.$$

Noter l'absence d'hypothèse d'orientabilité sur  $W'$  : tout ce qui compte ici est le fait que le fibré normal  $\nu_{W'} f^{-1}(B)$  est naturellement orienté via l'isomorphisme avec  $f^* \nu_W B$ .

**Remarque 5.8.** *L'on peut interpréter le résultat précédent en cohomologie de De Rham comme suit : le dual de Poincaré de  $\text{incl}_*[B]$  est représenté par une forme fermée et à support compact contenu dans un voisinage arbitrairement petit de  $B$ . En identifiant un tel voisinage avec un voisinage de la section nulle dans le fibré normal à  $B$ , l'intégrale de cette forme sur chaque fibre vaut 1. (Comparer avec la Remarque 5.3.)*



**5.4. Dualité de Poincaré et produit d'intersection.** Considérons le contexte suivant :  $W^n$  est une variété fermée orientée et  $K^k, L^\ell \subset W^n$  sont des sous-variétés fermées orientées. L'on suppose que l'intersection de  $K$  et  $L$  est transverse :

$$K \pitchfork L,$$

de sorte que  $K \cap L$  est une sous-variété fermée de codimension

$$\text{codim } K \cap L = \text{codim } K + \text{codim } L.$$

Les orientations de  $K$ ,  $L$  et  $W$  déterminent une orientation de  $K \cap L$  par la convention suivante. Cette orientation dépend d'un ordre choisi entre  $K$  et  $L$ . Notre choix, reflété par l'ordre alphabétique, sera de mettre  $K$  en première position et  $L$  en deuxième position. Le point de départ de cette convention est l'isomorphisme canonique

$$(5.2) \quad \begin{aligned} \nu_W(K \cap L) &\cong \nu_L(K \cap L) \oplus \nu_W L|_{K \cap L} \\ &\cong \nu_W K|_{K \cap L} \oplus \nu_W L|_{K \cap L}. \end{aligned}$$

Les orientations de  $K$ ,  $L$  et  $W$  déterminent des orientations de  $\nu_W K$  et  $\nu_W L$  via le théorème du voisinage tubulaire et la convention d'orientation "base en premier". L'on induit via l'isomorphisme ci-dessus une orientation de  $\nu_W(K \cap L)$ , qui détermine à son tour une orientation de  $K \cap L$  via le théorème du voisinage tubulaire et la convention d'orientation "base en premier". Voir la Figure 10 pour un exemple.

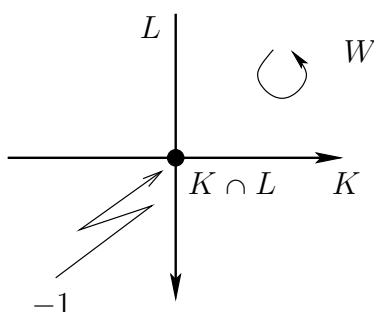


FIGURE 10. Pour  $W = \mathbb{R}^2$ , considérons deux courbes  $K$  et  $L$  avec un point d'intersection transverse, le tout orienté comme dans la figure. Le point d'intersection  $K \cap L$  hérite alors de l'orientation  $-1$ .

**Théorème 5.9.** *Étant données des sous-variétés orientées transverses  $K \pitchfork L$ , avec la convention d'orientation précédente nous avons l'égalité*

$$PD[K \cap L] = PD[K] \cup PD[L].$$

*Démonstration.* En vue de la Proposition 5.7 nous devons montrer l'égalité suivante entre classes de Thom dans  $W$  :

$$U_{K \cap L} = U_K \cup U_L.$$

En vue de la compatibilité de la classe de Thom avec la somme de Whitney des fibrés (Proposition 5.5), l'isomorphisme de fibrés orientés (5.2) implique

$$\begin{aligned} U(\nu_W(K \cap L)) &= p_K^*U(\nu_W K|_{K \cap L}) \cup p_L^*U(\nu_W L|_{K \cap L}) \\ &= p_K^*i_K^*U(\nu_W K) \cup p_L^*i_L^*U(\nu_W L), \end{aligned}$$

avec

$$\nu_W(K \cap L) \xrightarrow{p_K} \nu_W K|_{K \cap L} \xrightarrow{i_K} \nu_W K$$

et

$$\nu_W(K \cap L) \xrightarrow{p_L} \nu_W L|_{K \cap L} \xrightarrow{i_L} \nu_W L.$$

En vue du fait que  $U(\nu_W K)$  et  $U(\nu_W L)$  peuvent être représentées par des cocycles supportés dans des voisinages arbitrairement petits de  $K$ , respectivement  $L$ , cette dernière égalité implique directement

$$U_{K \cap L} = U_K \cup U_L$$

à partir de la définition des classes de Thom dans  $W$ .  $\square$

**Définition 5.10.** Soit  $W^n$  une variété fermée orientée et  $K^k, L^\ell \subset W$  deux sous-variétés fermées orientées. Leur produit d'intersection est défini comme

$$[K] \cdot [L] = PD^{-1}(PD([K]) \cup PD([L])) \in H_{k+l-n}(W).$$

Plus généralement, pour deux classes d'homologie  $A \in H_k(W)$ ,  $B \in H_\ell(W)$  qui ne sont pas représentées par des sous-variétés, l'on définit leur produit d'intersection comme

$$A \cdot B = PD^{-1}(PD(A) \cup PD(B)) \in H_{k+l-n}(W).$$

Une propriété importante, qui découle directement de la définition, est

$$A \cdot B = A \cap PD(B).$$

**Définition 5.11.** Soit  $W$  une variété fermée orientée et  $K, L \subset W$  deux sous-variétés fermées orientées de dimensions complémentaires qui s'intersectent transversalement. Leur nombre d'intersection

$$K \cdot L$$

est défini comme le comptage algébrique de leurs points d'intersection, chacun étant affecté d'un signe  $\pm 1$  selon l'orientation qu'il hérite dans  $K \cap L$  en tant que variété de dimension 0.

**Corollaire 5.12.** L'on a

$$K \cdot L = \langle PD([K]) \cup PD([L]), [W] \rangle.$$

En particulier  $K \cdot L$  est invariant par isotopie de  $K$  et  $L$ .  $\square$

**Remarque 5.13.** Soient  $K, L \subset W$  des variétés **complexes** (fermées) et  $K \pitchfork L$ . Alors  $K \cap L$  est une sous-variété complexe de  $W$  et l'orientation qu'elle hérite à partir des orientations canoniques de  $K$ ,  $L$  et  $W$  coïncide avec son orientation canonique.

Considérons le cas particulier où  $K$  et  $L$  sont de dimensions complémentaires et s'intersectent transversalement. Alors  $K \cap L$  est constituée d'un nombre fini de points et chacun d'entre eux hérite du signe  $+1$  comme orientation. L'on obtient

$$K \cdot L = \#(K \cap L).$$

**5.5. Dualité de Poincaré et première classe de Chern.** Dans cette section l'on interprète géométriquement la première classe de Chern d'un fibré en droites complexes.

**Proposition 5.14** (interprétation géométrique de la première classe de Chern). *Soit  $\xi \rightarrow B$  un fibré en droites complexes au-dessus d'une variété  $B$  fermée et orientée de dimension  $n$ . Soit  $s \in \Gamma(\xi)$  une section transverse à la section nulle. L'ensemble  $s^{-1}(0) \subset B$  est une sous-variété fermée de codimension 2, elle hérite d'une orientation induite par l'orientation de  $B$ , et*

$$[s^{-1}(0)] \in H_{n-2}(B; \mathbb{Z})$$

est le dual de Poincaré de  $c_1(\xi) \in H^2(B; \mathbb{Z})$ .

**Remarque 5.15.** *La condition de transversalité à la section nulle est générique dans l'espace des sections, cf. §2.2.3.*

**Lemme 5.16.** *Soit  $\eta \rightarrow B$  un fibré vectoriel lisse et  $s \in \Gamma(\eta)$  une section transverse à la section nulle. Alors  $s^{-1}(0) \subset B$  est une sous-variété de codimension égale au rang de  $\eta$  et l'on a un isomorphisme canonique*

$$\nu_B s^{-1}(0) \simeq \eta|_{s^{-1}(0)}.$$

*Démonstration.* En un point  $b \in s^{-1}(0)$  l'on peut écrire  $ds(b) : T_b B \rightarrow T_{(b,0)}\eta \cong T_b B \oplus \eta_b$  comme

$$ds(b) = (\text{Id}, ds^{\text{vert}}(b)).$$

Par définition  $s \pitchfork 0_B$  si et seulement si  $ds^{\text{vert}}(b) : T_b B \rightarrow \eta_b$  est surjective en tout point  $b \in s^{-1}(0)$ . Dans une trivialisation locale de  $\eta$  au voisinage d'un tel point l'on identifie  $s$  à une application à valeurs vectorielles et  $ds^{\text{vert}}$  à la différentielle de celle-ci, de sorte que  $s^{-1}(0)$  apparaît localement comme préimage de la valeur régulière 0 par cette application. Ceci démontre que  $s^{-1}(0)$  est bien une sous-variété de codimension égale au rang de  $\eta$ .

L'on a une suite exacte courte de fibrés au-dessus de  $s^{-1}(0)$  :

$$0 \rightarrow \ker ds^{\text{vert}}|_{s^{-1}(0)} \longrightarrow TB|_{s^{-1}(0)} \xrightarrow{ds^{\text{vert}}} \eta|_{s^{-1}(0)} \rightarrow 0,$$

où  $\ker ds^{\text{vert}}|_{s^{-1}(0)} = Ts^{-1}(0)$ . Ainsi  $ds^{\text{vert}}$  induit un isomorphisme

$$\nu_B s^{-1}(0) = TB|_{s^{-1}(0)}/Ts^{-1}(0) \simeq \eta|_{s^{-1}(0)}.$$

□

*Démonstration de la Proposition 5.14.* Le fait que  $s^{-1}(0) \subset B$  soit une sous-variété de codimension 2 est un cas particulier du lemme précédent.

Nous avons  $s^{-1}(0) = \text{im } s \pitchfork 0_B$ . Les sous-variétés  $\text{im } s$  et  $0_B$  sont naturellement orientées par l'orientation de  $B$ . L'espace total du fibré est orienté par l'orientation de  $B$  et l'orientation complexe de la fibre

(“base en premier”). Ainsi  $s^{-1}(0)$  hérite d’une orientation comme explicité plus haut.

Nous démontrons la proposition en deux étapes : d’abord par un calcul explicite pour les fibrés tautologiques  $\mathcal{O}(1) \rightarrow \mathbb{C}P^n$ , et ensuite par functorialité pour des fibrés en droites quelconques.

*Le cas  $\mathcal{O}(1) \rightarrow \mathbb{C}P^n$ .* Une section holomorphe non-nulle intersecte la section nulle de façon transverse en un hyperplan projectif, de classe d’homologie constante  $[\mathbb{C}P^{n-1}]$ . Montrons que celle-ci est la duale de Poincaré de  $c_1(\mathcal{O}(1))$ . Pour le voir, notons que  $c_1(\mathcal{O}(1))$  est le générateur positif de  $H^2(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z})$ , caractérisé par l’identité  $\langle c_1(\mathcal{O}(1)), [\mathbb{C}P^1] \rangle = 1$ . Par ailleurs le dual de Poincaré  $h$  de  $[\mathbb{C}P^{n-1}]$  vérifie aussi

$$\langle h, [\mathbb{C}P^1] \rangle = [\mathbb{C}P^{n-1}] \cdot [\mathbb{C}P^1] = 1$$

en vertu du Théorème 5.9.

*Le cas général.* Il existe  $N \geq 1$  et  $f : B \rightarrow \mathbb{C}P^N$  continue telle que  $\xi \simeq f^*\mathcal{O}(1)$ . Soit  $s \in \Gamma(\mathcal{O}(1))$  transverse à la section nulle.

$$\begin{array}{ccc} \xi = f^*\mathcal{O}(1) & \longrightarrow & \mathcal{O}(1) \\ \downarrow & & \downarrow \Big) s \\ B & \xrightarrow{f} & \mathbb{C}P^N \end{array}$$

Nous pouvons supposer sans perte de généralité que  $f$  est transverse à  $\mathbb{C}P^{N-1} = s^{-1}(0)$ . Ainsi

$$\nu_B(f^*s)^{-1}(0) \simeq f^*\nu_{\mathbb{C}P^N} s^{-1}(0).$$

En vue de la Proposition 5.6 reliant la dualité de Poincaré et la classe de Thom, et en utilisant la functorialité de la classe de Thom (5.1), l’on obtient

$$\begin{aligned} PD((f^*s)^{-1}(0)) &= U_{(f^*s)^{-1}(0)} \\ &= U_{f^{-1}(s^{-1}(0))} \\ &= f^*U_{s^{-1}(0)} \\ &= f^*PD([\mathbb{C}P^{N-1}]) \\ &= f^*c_1(\mathcal{O}(1)) \\ &= c_1(\xi). \end{aligned}$$

□

**5.6. Dualité de Poincaré et classe d'Euler.** Nous avons déjà donné dans le chapitre 4, §4.2.6 une définition de la classe d'Euler d'un fibré réel orienté. Nous donnons ici un point de vue alternatif.

**Définition 5.17.** Soit  $\xi^r \rightarrow B^n$  un fibré réel orienté de rang  $r$  au-dessus d'une variété fermée de dimension  $n$ . La classe d'Euler de  $\xi$  est définie comme

$$e(\xi) = PD(s^{-1}(0)) \in H^r(B; \mathbb{Z}),$$

pour  $s$  une section transverse à la section nulle.

La définition est cohérente en vue du lemme suivant.

**Lemme 5.18.** Soient  $s_0, s_1 \in \Gamma(\xi)$  deux sections transverses à la section nulle. Alors

$$[s_0^{-1}(0)] = [s_1^{-1}(0)] \in H_{n-r}(B; \mathbb{Z}).$$

*Démonstration.* Deux telles sections  $s_0$  et  $s_1$  sont homotopes. Le choix d'une homotopie lisse générique  $s = (s_t)$ ,  $t \in [0, 1]$  fournit un cobordisme lisse compact orienté  $\Sigma = s^{-1}(0) = \{(b, t) : s_t(b) = 0\} \subset B \times I$  entre  $\Sigma_0 = s_0^{-1}(0) \subset B \times \{0\}$  et  $\Sigma_1 = s_1^{-1}(0) \subset B \times \{1\}$ , autrement dit une variété  $\Sigma$  compacte à bord telle que  $\partial\Sigma = -\Sigma_0 \cup \Sigma_1$  (le signe  $-$  signifie que l'orientation de bord de  $\Sigma_0$  est l'opposée de son orientation d'origine).

Notons pour plus de commodité  $k = n - r$ . La classe fondamentale

$$[\Sigma, \partial\Sigma] \in H_{k+1}(\Sigma, \partial\Sigma)$$

existe et possède la propriété suivante (générale pour toute variété à bord) : son image via l'application de bord

$$\partial : H_{k+1}(\Sigma, \partial\Sigma) \rightarrow H_k(\Sigma)$$

est

$$[\partial\Sigma] \in H_k(\partial\Sigma),$$

la classe fondamentale du bord muni de son orientation de bord.

L'on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H_{k+1}(\Sigma, \partial\Sigma) & \longrightarrow & H_{k+1}(B \times I, B \times \partial I) = H_k(B) \otimes H_1(I, \partial I) \\ \partial \downarrow & & \downarrow \partial \\ H_k(\partial\Sigma) = H_k(\Sigma_0) \oplus H_k(\Sigma_1) & \longrightarrow & H_k(B \times \partial I) = H_k(B \times \{0\}) \oplus H_k(B \times \{1\}) \end{array}$$

et l'on voit que  $[\Sigma, \partial\Sigma]$  est transportée comme suit :

$$\begin{array}{ccc} [\Sigma, \partial\Sigma] & & \\ \downarrow & & \\ (-[\Sigma_0], [\Sigma_1]) & \longrightarrow & (-?, ?) \end{array}$$

avec ? désignant une certaine classe d'homologie dans  $H_k(B)$ . En effet, l'image de la flèche verticale de droite est constituée exactement de telles paires puisqu'elle s'identifie à  $\text{Id} \otimes \partial$ . Ceci montre que les images de  $[\Sigma_0]$  et  $[\Sigma_1]$  dans  $H_k(B)$  coïncident.  $\square$

**Proposition 5.19** (classe d'Euler via classe de Thom). *Considérons le diagramme*

$$H^r(\xi, \dot{\xi}) \xrightarrow{j^*} H^r(\xi) \xrightarrow[\cong]{i^*} H^r(B),$$

avec  $j : \xi \rightarrow (\xi, \dot{\xi})$  l'inclusion canonique et  $i : B \rightarrow \xi$  l'inclusion de la section nulle, qui est une équivalence d'homotopie. Alors

$$e(\xi) = i^* j^* U(\xi).$$

*Démonstration.* (cf. [Bredon, VI.12.8]) Pour simplifier la notation nous écrivons  $U(\xi)$  à la place de  $j^*U(\xi)$  par la suite. L'on note aussi  $i : s^{-1}(0) \rightarrow \xi$  l'inclusion. L'on a successivement

$$\begin{aligned} i_*[s^{-1}(0)] &= i_*[B] \cdot i_*[B] \\ &= i_*[B] \cap U(\xi) \\ &= i_*([B] \cap i^*U(\xi)). \end{aligned}$$

La première égalité est vraie puisque  $s^{-1}(0) = s(B) \pitchfork i(B)$ , en vertu du Théorème 5.9 et de la définition du produit d'intersection. La deuxième égalité est vraie puisque  $U(\xi)$  est le dual de Poincaré de  $i_*[B]$  (Proposition 5.6). La troisième égalité est une propriété générale des produits  $\cap$  et  $\cup$ .

Puisque  $i_*$  est bijective, on déduit  $[s^{-1}(0)] = [B] \cap i^*U(\xi)$ , ce qui signifie que  $i^*U(\xi)$  est le dual de Poincaré de  $[s^{-1}(0)]$  dans  $B$ , c'est-à-dire la classe d'Euler.  $\square$

**Théorème 5.20.** *La classe d'Euler  $e(\xi)$  est la classe d'obstruction primaire à l'existence d'une section non-nulle de  $\xi$ . Elle s'annule si et seulement si  $\xi$  admet une section non-nulle au-dessus du  $r$ -squelette de  $B$ .*  $\square$

Nous ne démontrons pas ce résultat ici. La preuve complète est donnée dans [Milnor, 12.5]. Elle utilise la functorialité pour se ramener à l'étude du fibré tautologique sur la grassmannienne des  $r$ -plans orientés, que nous n'avons pas discuté. Les techniques utilisées sont similaires à celles qui ont été explicitées dans le contexte des classes de Stiefel-Whitney et Chern pour montrer que le point de vue axiomatique et celui de la théorie de l'obstruction coïncident.

**Corollaire 5.21.** *Si  $\xi$  est un fibré complexe de rang  $r$ , alors*

$$e(\xi) = c_r(\xi) \in H^{2r}(B; \mathbb{Z}).$$

La classe d'Euler vérifie les propriétés suivantes :

(FONCTORIALITÉ) Pour toute application  $f : B' \rightarrow B$ , l'on a

$$e(f^*\xi) = f^*e(\xi).$$

Cette propriété est une conséquence de la functorialité de la classe de Thom, via la Proposition 5.19.

(MULTIPLICATIVITÉ)

$$e(\xi \oplus \eta) = e(\xi)e(\eta).$$

Cette propriété est une conséquence de la multiplicativité de la classe de Thom par rapport aux sommes de Whitney (Proposition 5.5).

(ANNULATION PAR STABILISATION) Si  $\underline{\mathbb{R}}$  désigne le fibré trivial, alors

$$e(\xi \oplus \underline{\mathbb{R}}) = 0.$$

Cette propriété peut être vue comme conséquence de la multiplicativité, mais découle aussi de la définition puisqu'une stabilisation  $\xi \oplus \underline{\mathbb{R}}$  possède une section  $s$  qui ne s'annule pas, de sorte que  $[s^{-1}(0)] = 0$  de façon tautologique.

**Proposition 5.22.** *Soit  $M$  une variété compacte orientable et  $\chi(M)$  sa caractéristique d'Euler-Poincaré. L'on a*

$$\langle e(TM), [M] \rangle = \chi(M).$$

Remarquer le fait que l'on ne suppose pas  $M$  orientée : dans la formule précédente l'on peut utiliser une orientation quelconque pour donner sens au membre de gauche. En effet, un changement d'orientation multiplie par  $-1$  aussi bien  $e(TM)$  que  $[M]$  et le résultat de l'évaluation reste inchangé.

*Démonstration.* L'on considère une section  $s$  transverse à la section nulle. Alors  $s^{-1}(0)$  est un ensemble discret de points  $p$ , munis de signes  $\epsilon(p) \in \{\pm 1\}$ . L'on a

$$\langle e(TM), [M] \rangle = [s^{-1}(0)] \cdot [M] = \sum_{p \in s^{-1}(0)} \epsilon(p).$$

L'on souhaite montrer que la somme est égale à la caractéristique d'Euler-Poincaré. Ceci est essentiellement l'énoncé du théorème de Poincaré-Hopf, puisqu'une section de  $TM$  n'est rien d'autre qu'un champ de vecteurs sur  $M$ , la transversalité à la section nulle équivaut au fait que les zéros de ce champ de vecteurs sont non-dégénérés, et le signe  $\epsilon(p)$  hérité par chaque point  $p \in s^{-1}(0)$  est l'indice de  $p$  en tant que zéro du champ de vecteurs.

L'on renvoie à Milnor, *Topology from the differentiable viewpoint* pour une discussion du théorème de Poincaré-Hopf.  $\square$



**Corollaire 5.23.** *Une variété compacte orientable admet un champ de vecteurs partout non-nul si et seulement si sa caractéristique d'Euler-Poincaré est nulle.  $\square$*

**Remarque 5.24.** *Ce dernier résultat reste vrai même sans hypothèse d'orientabilité, en utilisant la classe d'Euler à coefficients dans le système local des orientations, et le théorème de dualité de Poincaré dans un contexte non-orientable.*

*De façon plus générale, toute la discussion que nous avons menée dans ce chapitre se généralise aux variétés non-orientables en travaillant avec des groupes d'homologie et de cohomologie à coefficients tordus par le système local des orientations. Voir par exemple [Hatcher, 3.H] pour les définitions et propriétés de ces groupes d'homologie.*

**5.7. Topologie des surfaces projectives lisses dans  $\mathbb{C}P^3$ .** Le but de cette section est de présenter quelques applications des notions développées précédemment à la topologie des variétés algébriques.

Soit  $d \geq 1$  et considérons

$$X_d = \{[z_0 : z_1 : z_2 : z_3] \in \mathbb{C}P^3 : \sum_{i=0}^3 z_i^d = 0\}.$$

Ceci est une sous-variété complexe lisse de codimension 1 dans  $\mathbb{C}P^3$ . On la regarde comme lieu d'annulation de la section holomorphe de  $\mathcal{O}(d)$  définie par le polynôme  $P(X_0, X_1, X_2, X_3) = \sum_{i=0}^3 X_i^d$ , homogène de degré  $d$ . On dit aussi que  $X_d$  est une *hypersurface lisse de degré  $d$* .

**Exercice 6.** Toutes deux hypersurfaces lisses de même degré  $d$  dans  $\mathbb{C}P^3$  (ou encore dans  $\mathbb{C}P^n$ ) sont difféomorphes. En considérant leurs polynômes de définition, on les identifie à des points de l'espace projectif  $\mathbb{P}(\mathbb{C}_d[X_0, X_1, X_2, X_3])$ , où  $\mathbb{C}_d[X_0, X_1, X_2, X_3]$  désigne l'espace des polynômes homogènes de degré  $d$  en les variables  $X_0, X_1, X_2, X_3$  à coefficients complexes. Les polynômes dont le lieu des zéros est lisse constituent le complémentaire d'un sous-ensemble algébrique strict. L'on montre que tout sous-ensemble strict algébrique sur  $\mathbb{C}$  est union finie de strates lisses de codimension complexe  $\geq 1$ , donc de codimension réelle  $\geq 2$ . Ceci implique le fait que le complémentaire d'un tel sous-ensemble algébrique est connexe. Ainsi, l'on peut interpoler entre toutes deux hypersurfaces algébriques lisses de même degré par une famille lisse à un paramètre constituée d'hypersurfaces algébriques lisses. Le type de difféomorphisme est localement constant le long d'une telle famille, donc globalement constant.

La sous-variété  $X_d \subset \mathbb{C}P^3$  est compacte sans bord et canoniquement orientée en tant que variété complexe. De ce fait, elle possède une classe fondamentale  $[X_d] \in H_4(X_d; \mathbb{Z})$ .

**Proposition 5.25.** *Soit  $i : X_d \hookrightarrow \mathbb{C}P^3$  l'inclusion. L'on a*

$$i_*[X_d] = d[\mathbb{C}P^2].$$

*Démonstration.* Puisque  $H_2(\mathbb{C}P^3; \mathbb{Z})$  est de rang 1 engendré par  $[\mathbb{C}P^2]$ , la classe  $i_*[X_d]$  est nécessairement un multiple de  $[\mathbb{C}P^2]$ . Or une droite complexe générique intersecte  $X_d$  de manière transverse en  $d$  points. Ceci implique le résultat désiré en vue du Théorème 5.9 combiné à la Remarque 5.13.  $\square$

**Théorème 5.26.** *La variété  $X_d$  est connexe et simplement connexe.*

Ce théorème n'est pas immédiat. Il découle du théorème fondamental suivant.

**Théorème 5.27** (section hyperplane de Lefschetz). Soit  $V^n \subset \mathbb{C}P^N$  une sous-variété algébrique lisse et  $H \subset \mathbb{C}P^N$  un hyperplan projectif tel que l'intersection  $V \cap H$  soit transverse. L'inclusion

$$X = V \cap H \hookrightarrow V$$

induit des isomorphismes sur  $\pi_i$ ,  $i < n - 1$  et induit un morphisme surjectif sur  $\pi_{n-1}$ .

Nous donnons seulement une idée de preuve et mettons en évidence le phénomène géométrique sous-jacent au théorème. Pour une preuve complète le lecteur pourra consulter Milnor, *Morse Theory*, § I.7, ou bien Voisin, *Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe*. Une discussion moderne, prenant un point de vue symplectique, est menée dans Cieliebak-Eliashberg, *From Stein to Weinstein and back*.

*Idée de preuve.* Le phénomène géométrique sous-jacent au théorème de Lefschetz est le suivant : le complémentaire  $X^c = V \setminus X$  porte une structure naturelle de variété de Stein, cf. infra. Ceci assure que  $X^c$  se rétracte par déformation sur un CW-complexe  $\Delta$  de dimension  $\leq n$  (appelé *squelette isotrope*). Par ailleurs, le théorème de voisinage tubulaire appliqué à  $X$  implique le fait que  $V \setminus \Delta$  est diffeomorphe à un fibré en disques au-dessus de  $X$  et en particulier se rétracte sur  $X$ . Des arguments de déformation générique montrent alors que toute sphère de dimension  $\leq n - 1$  dans  $V$  peut être disjointe de  $\Delta$  et ensuite poussée dans  $X$ , et toute homotopie entre sphères de dimension  $\leq n - 2$  dans  $X$  peut être choisie disjointe de  $\Delta$  et donc à valeurs dans  $X$ . Voir Figure 11.

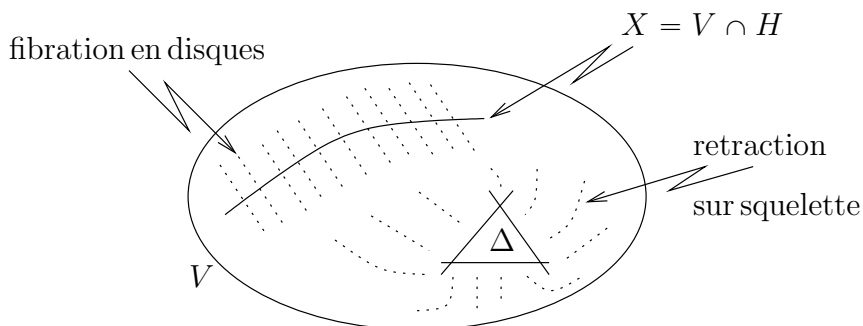


FIGURE 11. Décomposition d'une variété algébrique  $V$  par rapport à une section hyperplane  $X = V \cap H$  : il existe un CW-complexe  $\Delta$  de dimension  $\leq n$  tel que  $X^c$  se rétracte sur  $\Delta$  et  $\Delta^c$  se rétracte sur  $X$ .

Dire que la variété  $X^c$  munie de sa structure complexe  $I$  est de Stein signifie qu'elle admet une fonction lisse  $\varphi : X^c \rightarrow \mathbb{R}$  qui est pluriharmonique, propre et bornée inférieurement. La condition

de plurisousharmonicit  signifie que  $-d(d\varphi \circ I)(v, Iv) > 0$  pour tout vecteur tangent  $v$  non-nul. Plus spécifiquement, en regardant  $X = V \cap H$  comme lieu d'annulation d'une section holomorphe  $s$  de  $\mathcal{O}(1)|_V$  et en choisissant une métrique hermitienne sur  $\mathcal{O}(1)$ , la fonction  $-\log \|s\|^2$  est plurisousharmonique.

La condition de plurisousharmonicit  est ouverte en topologie  $C^2$  et donc une variété de Stein admet toujours une fonction plurisousharmonique qui est de Morse. Les indices des points critiques d'une telle fonction sont au plus égaux à  $n$ , et ceci implique que  $X^c$  se rétracte sur un CW-complexe  $\Delta$  de dimension  $\leq n$ .  $\square$

*Preuve du Théorème 5.26.* Le théorème est conséquence du théorème de section hyperplane de Lefschetz.

Pour l'appliquer nous choisissons un plongement  $f : \mathbb{C}P^3 \hookrightarrow \mathbb{C}P^N$  tel que  $f^*\mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(d)$ . Ce plongement peut être choisi holomorphe, donné par la base  $(s_0, \dots, s_N)$  de sections holomorphes de  $\mathcal{O}(d)$  fournie par les mon mes de degré  $d$  en les variables  $X_0, X_1, X_2, X_3$  (*plongement de Veronese*) :

$$\mathbb{C}P^3 \hookrightarrow \mathbb{C}P^N, \quad [z_0 : z_1 : z_2 : z_3] \mapsto [s_0(z) : s_1(z) : \dots : s_N(z)].$$

On note  $V = f(\mathbb{C}P^3)$  et l'on obtient  $X_d = f^{-1}(X)$ , avec  $X = V \cap H$  la section par l'hyperplan  $H$  déterminé par la forme linéaire  $s$  en les  $\{s_i\}$  qui correspond au polynôme de définition de  $X_d$ , ici  $s = X_0^d + X_1^d + X_2^d + X_3^d$ . Par le théorème de Lefschetz l'on obtient que l'hypersurface  $X_d$  a le même  $\pi_0$  et  $\pi_1$  que  $\mathbb{C}P^3$ , c'est-à-dire elle est connexe et simplement connexe.  $\square$

**Corollaire 5.28.** *L'on a*

$$H_0(X_d; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}, \quad H_4(X_d; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z},$$

et

$$H_1(X_d; \mathbb{Z}) = 0, \quad H_3(X_d; \mathbb{Z}) = 0.$$

*Démonstration.* L'isomorphisme  $H_0(X_d; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$  équivaut à la connexité de  $X_d$  et résulte de la trivialité de  $\pi_0(X_d)$ .

L'isomorphisme  $H_4(X_d; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$  vaut puisque  $X_d$  est une variété lisse compacte connexe sans bord orientée (par son orientation complexe).

La simple connexité de  $X_d$  implique par le théorème de Hurewicz l'égalité

$$H_1(X_d; \mathbb{Z}) = 0.$$

Par le théorème des coefficients universels nous avons

$$H^1(X_d; \mathbb{Z}) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_1(X_d; \mathbb{Z}); \mathbb{Z}) = 0.$$

Par dualité de Poincaré nous obtenons  $H_3(X_d; \mathbb{Z}) = 0$ .  $\square$

**Théorème 5.29.** *Le groupe  $H_2(X_d; \mathbb{Z})$  est libre de rang*

$$b_2 = d^3 - 4d^2 + 6d - 2.$$

*Démonstration.* Par dualité de Poincaré et le théorème des coefficients universels l'on a

$$H_2(X_d; \mathbb{Z}) \simeq H^2(X_d; \mathbb{Z}) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_2(X_d; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}).$$

Ainsi  $H_2(X_d; \mathbb{Z})$  est libre en tant que dual d'un  $\mathbb{Z}$ -module.

Nous avons déjà montré  $b_0 = b_4 = 1$  et  $b_1 = b_3 = 0$ . Pour calculer  $b_2$  il suffit de calculer la caractéristique d'Euler-Poincaré

$$\chi(X_d) = 2 + b_2.$$

Pour ce faire nous utilisons l'expression de  $\chi(X_d)$  en fonction de la classe d'Euler (Proposition 5.22) et l'identification de la classe d'Euler avec la classe de Chern de degré maximal (Proposition 5.21) :

$$\chi(X_d) = \langle e(TX_d), [X_d] \rangle = \langle c_2(X_d), [X_d] \rangle.$$

Le point de départ du calcul est l'isomorphisme

$$T\mathbb{C}P^3|_{X_d} \simeq TX_d \oplus \nu X_d \simeq TX_d \oplus \mathcal{O}(d)|_{X_d},$$

qui implique l'identité de classes de Chern totales

$$(5.3) \quad c(T\mathbb{C}P^3|_{X_d}) = c(TX_d)c(\mathcal{O}(d)|_{X_d}).$$

Soit  $i : X_d \rightarrow \mathbb{C}P^3$  et  $h \in H^2(\mathbb{C}P^3; \mathbb{Z})$  le générateur positif. La classe de Chern totale de  $\mathbb{C}P^3$  est

$$c(T\mathbb{C}P^3) = (1 + h)^4.$$

En degré 2 l'égalité (5.3) donne  $c_1(T\mathbb{C}P^3|_{X_d}) = c_1(TX_d) + c_1(\mathcal{O}(d)|_{X_d})$ . L'on obtient

$$c_1(TX_d) = (4 - d)i^*h$$

en utilisant les relations  $c_1(T\mathbb{C}P^3) = 4h$  et  $c_1(\mathcal{O}(d)) = dh$ .

En degré 4 l'égalité (5.3) donne  $6i^*h^2 = c_2(TX_d) + c_1(TX_d)c_1(\mathcal{O}(d)|_{X_d})$ , ou encore

$$c_2(TX_d) = (d^2 - 4d + 6)i^*h^2.$$

En utilisant  $i_*[X_d] = d[\mathbb{C}P^2]$  (Proposition 5.25) l'on obtient finalement

$$\langle c_2(TX_d), [X_d] \rangle = d(d^2 - 4d + 6).$$

□

**Corollaire 5.30.** *Le deuxième nombre de Betti de la quartique de Fermat*

$$X_4 = \{[z_0 : z_1 : z_2 : z_3] : \sum_{i=0}^3 z_i^4 = 0\} \subset \mathbb{C}P^3$$

est

$$b_2(X_4) = 22.$$

□

La quartique de  $\mathbb{C}P^3$  est une surface complexe lisse simplement connexe et telle que  $c_1(TX_4) = 0$ . C'est un exemple de *surface K3*, une classe de surfaces qui occupe un rôle central en géométrie algébrique.

## ANNEXE A. CONNEXIONS ET DISTRIBUTIONS HORIZONTALES

Nous discutons dans cette section un point de vue inverse, mais équivalent, sur les connexions linéaires dans les fibrés vectoriels : celui des distributions horizontales, ou encore des connexions au sens de Ehresmann.

Pour un fibré vectoriel  $E \xrightarrow{\pi} B$ , l'espace tangent aux fibres  $T_v E_p = \ker d\pi(p, v)$  est bien défini en chaque point. On le note aussi  $T_{(p,v)}^{vert} E$  et on l'appelle *espace tangent vertical*. Rappelons qu'une *distribution de rang  $k$*  sur une variété est un sous-fibré de rang  $k$  du fibré tangent.

**Définition A.1.** Soit  $E \rightarrow B$  un fibré vectoriel. Une connexion sur  $E$  est la donnée d'une distribution  $H \subset TE$  transverse aux fibres et de rang égal à la dimension de la base, c'est-à-dire la donnée d'une famille lisse

$$H_{(p,v)} \subset T_{(p,v)} E, \quad (p, v) \in E$$

telle que  $\dim H_{(p,v)} = \dim T_p B$  et

$$H_{(p,v)} + T_{(p,v)}^{vert} E = T_{(p,v)} E.$$

**Exemple.** Soit  $H$  une connexion sur  $E$  et  $E|_U \simeq U \times \mathbb{K}^k$  une trivialisat-ion locale de  $E$ . Puisque  $T_{(p,v)}(U \times \mathbb{K}^k)$  est canoniquement isomorphe à  $T_p U \oplus \mathbb{K}^k$ , il s'ensuit que la connexion  $H$  s'écrit à travers cette trivialisat-ion en tout point  $(p, v) \in U \times \mathbb{K}^k$  comme graphe d'une application linéaire

$$A(p, v) : T_p U \rightarrow \mathbb{K}^k.$$

Toute connexion sur un fibré définit un *transport parallèle partiel* comme suit.

**Proposition-Définition A.2.** Soit  $\gamma : [0, 1] \rightarrow B$  un chemin lisse. Pour tout  $v \in E_{\gamma(0)}$  il existe  $\epsilon > 0$  et un chemin  $\tilde{\gamma}_v : [0, \epsilon[ \rightarrow E$  tel que

$$\pi \circ \tilde{\gamma}_v = \gamma|_{[0, \epsilon[}, \quad \tilde{\gamma}_v(0) = v.$$

Le chemin  $\tilde{\gamma}_v$  est unique avec cette propriété. Étant donné  $v$ , l'on peut choisir un  $\epsilon > 0$  uniforme pour la construction précédente sur un voisinage de  $v$  dans la fibre.

On appelle  $\tilde{\gamma}$  un *relevé* de  $\gamma$  (en  $v$ , ou encore avec point base  $v$ ). L'on appelle *transport parallèle partiel* l'application  $w \mapsto \tilde{\gamma}_w(\epsilon)$ , qui réalise un difféomorphisme entre des ouverts de  $E_{\gamma(0)}$  et  $E_{\gamma(\epsilon)}$ .

*Démonstration.* Considérons le diagramme déterminé par tiré-en-arrière

$$\begin{array}{ccc} \gamma^* E & \xrightarrow{\Gamma} & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ [0, 1] & \xrightarrow{\gamma} & B \end{array}$$

La connexion  $H$  induit sur  $\gamma^*E$  une connexion  $\gamma^*H$  et le champ  $\frac{\partial}{\partial t}$  sur  $[0, 1]$  admet un relevé horizontal global unique qui définit un champ de vecteurs sur  $\gamma^*E$ . Les relevés de  $\gamma$  dans  $E$  sont les images par  $\Gamma$  des courbes intégrales de ce champ de vecteurs. Celles-ci existent et sont uniques localement à condition initiale  $v \in E_{\gamma(0)} = (\gamma^*E)_0$  fixée. Par ailleurs, le flot local est un difféomorphisme local et son domaine de définition est ouvert.  $\square$

La raison pour laquelle il faut prendre des précautions quant au domaine de définition du transport parallèle est que, dans la généralité ci-dessus, le flot de l'équation différentielle que l'on obtient sur  $\gamma^*E$  peut ne pas être globalement défini.

**Définition A.3.** Une connexion sur un fibré est dite linéaire si le transport parallèle est linéaire dans les fibres.

**Proposition A.4.** Une connexion est linéaire si et seulement si, lorsque l'on écrit comme ci-dessus

$$H_{(p,v)} = \text{graphe}(A(p, v) : T_pU \rightarrow \mathbb{K}^k)$$

dans une trivialisatation locale  $E|_U \simeq U \times \mathbb{K}^k$ , l'on a que  $A(p, \cdot)X : \mathbb{K}^k \rightarrow \mathbb{K}^k$  est linéaire pour tout  $X \in T_pU$ .

*Démonstration.* Le point clé est l'observation suivante, que l'on peut aisément vérifier :

*Le flot d'une équation différentielle définie sur  $\mathbb{K}^k$  est linéaire si et seulement si l'équation différentielle est linéaire.*

Dans notre situation, si  $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$  est une courbe lisse prenant ses valeurs dans un ouvert où l'on écrit  $H_{(p,v)} = \text{graphe}(A(p, v))$  il s'ensuit que le champ de vecteurs horizontal qui relève  $\frac{\partial}{\partial t}$  sur  $\gamma^*E$  est

$$Y_{(t,v)} = \left( \frac{\partial}{\partial t}, A(\gamma(t), v)\dot{\gamma}(t) \right).$$

Pour que le transport parallèle soit linéaire, par l'observation précédente il faut et il suffit que l'application  $v \mapsto A(\gamma(t), v)\dot{\gamma}(t)$  soit linéaire en  $v$ . Comme  $\dot{\gamma}(t)$  peut prendre n'importe quelle valeur dans  $T_{\gamma(t)}U$ , la conclusion en découle.  $\square$

Un point de vue plus algébrique mais utile est le suivant. Toute connexion  $H$  définit une projection

$$TE \rightarrow E, \quad Y \mapsto Y^{vert}$$

en décomposant de manière unique tout vecteur  $Y \in T_{(p,v)}E$  comme  $Y = Y^H + Y^{vert}$ , avec  $Y^H \in H_{(p,v)}$  et  $Y^{vert} \in T_{(p,v)}^{vert}E \simeq E_p$ . Étant



donnée une connexion  $H$ , pour toute section  $s \in \Gamma(E)$  et tout champ de vecteurs  $X \in \mathcal{X}(B)$  l'on peut définir la différentielle verticale

$$\nabla_X^H s \in \Gamma(E), \quad (\nabla_X^H s)(p) := (ds(p) \cdot X)^{vert}.$$

La différentielle verticale est clairement linéaire en  $X$  pour tout choix de connexion, linéaire ou pas.

**Exercice.** Vérifier que la distribution horizontale  $H$  peut être décrite comme

$$H_{(p,v)} = \{ds(p)X : X \in T_p B, s \in \Gamma(E), s(p) = v, (\nabla_X^H s)|_p = 0\}.$$

**Proposition A.5.** Une connexion  $H$  est linéaire si et seulement si la différentielle verticale

$$\nabla^H : \Gamma(E) \rightarrow \Omega^1(B, E)$$

est une application  $\mathbb{R}$ -linéaire qui vérifie la règle de Leibniz

$$\nabla^H(fs) = df \otimes s + f\nabla^H s, \quad f \in \mathcal{F}(B).$$

□

L'on voit donc que le point de vue de la section 2.2.1 est équivalent au point de vue plus géométrique décrit ci-dessus.

**Exercice.** Soit  $H$  une connexion sur un fibré vectoriel  $E$ .

(i) Considérons le fibré  $E \oplus E \rightarrow B$ . Celui-ci peut être décrit de façon alternative comme le produit fibré  $E_{B \times B} E$  au-dessus des applications de projection, de sorte que  $T_{(b,v,w)}(E \oplus E) \simeq T_{(b,v)}E_{T_b B} \times_{T_b B} T_{(b,w)}E$ , le produit fibré de  $T_{(b,v)}E$  avec  $T_{(b,w)}E$  au-dessus des applications  $d\pi(b, v)$  et  $d\pi(b, w)$ . La connexion  $H$  détermine dans  $E \oplus E$  une distribution  $H_{B \times B} H$  transverse aux fibres de rang égal à  $\dim H$ , donnée par

$$(H_{B \times B} H)_{(b,v,w)} = H_{(b,v)} T_b B \times_{T_b B} H_{(b,w)}.$$

(ii) Considérons les applications

$$\alpha : E \oplus E \rightarrow E, \quad (b, v, w) \mapsto (b, v + w)$$

et, pour  $\lambda \in \mathbb{K}^*$ ,

$$h_\lambda : E \rightarrow E, \quad (b, v) \mapsto (b, \lambda v).$$

Montrer que  $H$  est linéaire si et seulement si elle est invariante par  $\alpha$  et  $h_\lambda$ ,  $\lambda \in \mathbb{K}^*$  :

$$\alpha_* H_{B \times B} H = H, \quad (h_\lambda)_* H = H.$$

ANNEXE B. CW-COMPLEXES. THÉORÈME DE HUREWICZ.  
THÉORÈME DE WHITEHEAD. THÉORÈME  
D'APPROXIMATION CELLULAIRE.

IL N'Y AURA PAS DE NOTES DE COURS SUR CETTE PARTIE. JE  
VOUS INVITE À ÉTUDIER LES RÉFÉRENCES INDIQUÉES

[Hatcher 4.1, 4.2], [Bredon IV.8, IV.9, IV.11, VII.10, VII.11]

## ANNEXE C. RAPPELS D'HOMOLOGIE ET DE COHOMOLOGIE

Nous renvoyons le lecteur à tout texte de topologie algébrique pour les définitions. Nous rappelons dans cette section les énoncés des théorèmes de changement de coefficients en homologie et cohomologie, ainsi que les énoncés de différentes versions du théorème de Künneth.

Dans la suite  $G$  désigne un groupe abélien et  $R$  désigne un anneau commutatif.

Rappelons que les groupes de cohomologie à coefficients dans un anneau commutatif  $R$  forment une algèbre commutative graduée avec le produit cup  $\cup$  (voir par exemple [Hatcher §3.2]) :

$$H^i(X; R) \otimes H^j(X; R) \rightarrow H^{i+j}(X; R).$$

**Théorème C.1** (Coefficients universels, [Bredon, V.7.1]). *L'on a une suite exacte naturelle en  $X$  et  $G$ , qui scinde naturellement en  $G$  (mais pas en  $X$ ) :*

$$0 \longrightarrow \text{Ext}(H_{n-1}(X), G) \longrightarrow H^n(X; G) \xrightarrow{\text{ev}} \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_n(X), G) \longrightarrow 0,$$

avec  $\text{ev}(\alpha)(A) = \langle \alpha, A \rangle$ .

**Théorème C.2** (Coefficients universels, [Bredon, V.7.1]). *L'on a une suite exacte naturelle en  $X$  et  $G$ , qui scinde naturellement en  $G$  (mais pas en  $X$ ) :*

$$0 \longrightarrow H_n(X) \otimes_{\mathbb{Z}} G \xrightarrow{s} H_n(X; G) \longrightarrow \text{Tor}_{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(X), G) \longrightarrow 0,$$

avec  $s([a] \otimes g) = [a \otimes g]$ .

On dit qu'un module gradué est de *type fini* s'il est finiment engendré en chaque degré.

**Théorème C.3** (Coefficients universels, [Spanier, p. 246]). *L'on suppose que  $H^*(X)$  est de type fini. L'on a une suite exacte naturelle en  $X$  et  $G$ , qui scinde naturellement en  $G$  (mais pas en  $X$ ) :*

$$0 \longrightarrow H^n(X) \otimes_{\mathbb{Z}} G \xrightarrow{\mu} H^n(X; G) \longrightarrow \text{Tor}_R(H^{n+1}(X), G) \longrightarrow 0,$$

avec  $\mu$  induit par l'isomorphisme  $\text{Hom}(C_*, \mathbb{Z}) \otimes G \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_*, G)$ .

**Théorème C.4** (Théorème de Künneth, [Husemoller, 7.4.7]). *Soient  $X, Y$  deux CW-complexes. L'on a un isomorphisme de  $\mathbb{Z}$ -modules*

$$H^n(X \times Y; G) \simeq \bigoplus_{0 \leq q \leq n} H^q(X; H^{n-q}(Y; G)).$$

**Corollaire C.5** (Théorème de Künneth, [Spanier, p. 247]). *Soient  $X, Y$  tels que  $H^*(Y; G)$  est de type fini. L'on a une suite exacte*

$$0 \longrightarrow (H^*(X; G) \otimes H^*(Y; G))^n \xrightarrow{\quad \times \quad} H^n(X \times Y; G) \\ \longrightarrow \text{Tor}_R^{n+1}(H^*(X; G), H^*(Y; G)) \longrightarrow 0$$

**Théorème C.6** (Théorème de Künneth relatif, [Hatcher, Thm. 3.21]). *Soient  $(X, A)$  et  $(Y, B)$  des paires d'espace topologiques. L'on suppose que  $H^*(Y, B; R)$  est libre et de rang fini en chaque degré. L'on a alors un isomorphisme d'anneaux*

$$H^*(X, A; R) \otimes H^*(Y, B; R) \xrightarrow{\sim} H^*(X \times Y, A \times Y \cup X \times B; R).$$

## ANNEXE D. SUITES SPECTRALES

Les suites spectrales sont un outil de calcul puissant. La référence maîtresse est le livre [McCleary], tourné vers les applications et qui contient de nombreux exemples.

En cours nous avons donné la définition de la suite spectrale de Leray-Serre d'une fibration et nous avons calculé trois exemples :

– la fibration de Hopf

$$S^1 \hookrightarrow S^3 \rightarrow S^2.$$

Connaissant les homologies de la base, de la fibre, et de l'espace total, nous avons déduit la forme de la différentielle  $d^2 : H_2(S^2; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z} \rightarrow H_1(S^1; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$  : c'est la multiplication par  $\pm 1$ .

– la fibration

$$S^1 \hookrightarrow S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n.$$

Connaissant l'homologie de la fibre et de l'espace total nous avons déduit l'homologie de  $\mathbb{C}P^n$ .

– la fibration

$$\Omega X \rightarrow PX \rightarrow X,$$

où  $X$  est un espace connexe par arcs avec point base  $x_0$  et  $PX$  désigne l'espace des chemins  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  avec  $\gamma(0) = x_0$ . La projection  $PX \rightarrow X$  est l'évaluation à l'autre extrémité de chaque chemin  $\gamma \mapsto \gamma(1)$ . La fibre homotopique est l'espace  $\Omega X$  des lacets à point base  $x_0$ . Les relations fondamentales

$$\pi_k(X; x_0) \simeq \pi_{k-1}(\Omega; x_0), \quad k \geq 1$$

et

$$H_1(X; \mathbb{Z}) \simeq \pi_1 / [\pi_1, \pi_1], \quad \pi_1 = \pi_1(X; x_0)$$

permettent de naviguer entre homologie et homotopie en différentes dimensions. La suite spectrale de Leray-Serre permet en particulier d'obtenir une preuve rapide du théorème de Hurewicz, cf. [McCleary, §5.2, Theorem 5.14].

ANNEXE E. PREMIERS GROUPES D'HOMOTOPIE NON-NULS DES  
VARIÉTÉS DE STIEFEL

Nous présentons dans cette section le calcul des premiers groupes d'homotopie non-nuls des variétés de Stiefel réelles. Le calcul est complet modulo le calcul du degré d'une certaine application explicite notée plus bas  $c_{n-1}$ , pour lequel nous renvoyons à Steenrod, *Topology of fiber bundles*, Chapitre 8, Thm. 10.1.

Le calcul est présenté comme un problème, avec une solution détaillée à la fin (examen final de janvier 2017).

L'on note  $V_k\mathbb{R}^n$  la variété de Stiefel des  $k$ -repères *orthogonaux* dans  $\mathbb{R}^n$ . À titre d'exemple  $V_1\mathbb{R}^{n+1} = S^n$ .

PREMIÈRE PARTIE : ÉTUDE DE  $V_k\mathbb{R}^n$  ET RÉDUCTION À  $V_2\mathbb{R}^n$ .

(1) Montrer que l'application

$$p : V_{k+1}\mathbb{R}^{n+1} \rightarrow V_1\mathbb{R}^{n+1}, \quad p(v_1, \dots, v_{k+1}) = v_{k+1}$$

est une fibration localement triviale de fibre  $V_k\mathbb{R}^n$ .

(2) Considérons l'inclusion

$$j : V_k\mathbb{R}^n \hookrightarrow V_{k+1}\mathbb{R}^{n+1}, \quad j(v_1, \dots, v_k) = (v_1, \dots, v_k, e_{n+1}).$$

Ici  $\mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$  et  $e_{n+1} = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ . Montrer que

$$j_* : \pi_i(V_k\mathbb{R}^n) \rightarrow \pi_i(V_{k+1}\mathbb{R}^{n+1})$$

est un isomorphisme pour  $i \leq n - 2$ .

(3) En déduire que

$$\pi_i(V_k\mathbb{R}^n) = 0, \quad i \leq n - k - 1.$$

(4) L'on suppose connu que

$$\pi_{n-2}(V_2\mathbb{R}^n) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}, & n \text{ pair,} \\ \mathbb{Z}/2, & n \text{ impair.} \end{cases}$$

Montrer que

$$\pi_{n-k}(V_k\mathbb{R}^n) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}, & k = 1 \text{ ou } n - k \text{ pair,} \\ \mathbb{Z}/2, & k \geq 2 \text{ et } n - k \text{ impair.} \end{cases}$$

DEUXIÈME PARTIE : ÉTUDE DE  $V_2\mathbb{R}^n$ .

Soit  $E \rightarrow S^n$  une fibration localement triviale lisse de fibre  $F$ . Soit  $\Phi : (S^{n-1}, *) \rightarrow (\text{Diff}_0(F), \text{Id})$  l'application qui la définit via  $E \simeq D_+^n \times F \sqcup D_-^n \times F / \sim$ , avec  $D_\pm^n$  deux hémisphères qui s'intersectent le long d'un équateur  $D_+^n \cup D_-^n = S^n$ ,  $D_+^n \cap D_-^n = S^{n-1}$  et  $(x, p) \sim (y, q)$ ,  $(x, p) \in D_+^n \times F$ ,  $(y, q) \in D_-^n \times F$  si et seulement si  $x = y \in S^{n-1}$

et  $p = \Phi(x)q$ . Soit  $p_0 \in F$  et  $c : (S^{n-1}, *) \rightarrow (F, p_0)$  l'application caractéristique définie par

$$c(x) = \Phi(x)p_0.$$

(5) Considérons le morceau

$$\pi_n(S^n, *) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F, p_0) \longrightarrow \pi_{n-1}(E, p_0) \longrightarrow 0$$

de la suite exacte d'homotopie de la fibration  $E \rightarrow S^n$ . Montrer que l'image par  $\partial$  d'un générateur de  $\pi_n(S^n)$  est représentée par l'application  $c$ .

(6) Soit  $c_{n-1} : S^{n-2} \rightarrow S^{n-2}$  l'application caractéristique du fibré tangent unitaire  $S(TS^{n-1}) \rightarrow S^{n-1}$ . Montrer que

$$\pi_{n-2}(V_2\mathbb{R}^n) \simeq \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, \quad d = \deg(c_{n-1}).$$

L'on suppose par la suite avoir calculé

$$\deg(c_{n-1}) = \begin{cases} 0, & n \text{ pair,} \\ \pm 2, & n \text{ impair,} \end{cases}$$

de sorte que le calcul de  $\pi_{n-k}(V_k\mathbb{R}^n)$  indiqué au (4) est valable.

### TROISIÈME PARTIE : CLASSES DE STIEFEL-WHITNEY.

(7) Montrer qu'un générateur de  $\pi_{j-1}(V_{n-j+1}\mathbb{R}^n)$  est représenté par l'application  $f : S^{j-1} \rightarrow V_{n-j+1}\mathbb{R}^n$  décrite de façon explicite comme suit : l'on fixe un  $n - j$ -repère dans  $\mathbb{R}^n$ , noté  $(v_1, \dots, v_{n-j})$ ; l'on note  $V = \text{Vect}(v_1, \dots, v_{n-j})$ ; l'on considère la sphère unité  $S^{j-1} \subset V^\perp$ ; enfin, l'on définit  $f : S^{j-1} \rightarrow V_{n-j+1}\mathbb{R}^n$  par

$$f(v) = (v, v_1, \dots, v_{n-j}).$$

(8) Soit  $\xi$  un fibré vectoriel de rang  $n$  sur  $\mathbb{R}$  au-dessus d'un CW-complexe  $B$ . Démontrer que, pour tout  $1 < j < n$ , la définition de la  $j$ -ème classe de Stiefel-Whitney de  $\xi$  en tant que réduction modulo 2 d'une classe d'obstruction primaire coïncide avec la définition qui prend comme point de départ le calcul de la cohomologie des variétés de Grassmann.

### Solutions

(1)

**Solution 1.** Étant donnée une inclusion de groupes de Lie compacts  $K \subset H \subset G$ , la projection naturelle  $G/K \rightarrow G/H$  est une fibration localement triviale de fibre  $H/K$ . Dans le cas particulier  $O(n-k) \subset O(n) \subset O(n+1)$  l'on a  $V_{k+1}\mathbb{R}^{n+1} = O(n+1)/O(n-k)$ ,  $V_1\mathbb{R}^{n+1} = O(n+1)/O(n)$  et la flèche  $p$  s'identifie à la projection  $O(n+1)/O(n-k) \rightarrow O(n+1)/O(n)$ . C'est donc une fibration localement triviale de fibre  $O(n)/O(n-k) = V_k\mathbb{R}^n$ .

**Solution 2.** L'on construit des trivialisations locales explicites. Pour tout  $v \in S^n = V_1\mathbb{R}^{n+1}$  il existe un voisinage ouvert  $v \in \mathcal{U} \subset S^n$  et une application lisse  $R : \mathcal{U} \rightarrow SO(n+1)$  telle que  $R_u(v) = u$ ,  $u \in \mathcal{U}$  et  $R_v = \text{Id}$ . (Une telle application n'est bien-sûr pas unique.) Alors  $R_u(v^\perp) = u^\perp$ . Fixons une isométrie  $I : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\simeq} v^\perp$ . Posons

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{U} \times V_k\mathbb{R}^n &\longrightarrow V_{k+1}\mathbb{R}^{n+1}, \\ (u, (e_1, \dots, e_k)) &\longmapsto (R_u I e_1, \dots, R_u I e_k, u). \end{aligned}$$

L'on a clairement  $p \circ \Phi = \text{pr}_1$ , l'application  $\Phi$  réalise un difféomorphisme fibre par fibre et ceci implique le fait qu'elle réalise un difféomorphisme sur son image. C'est donc une trivialisations locale.

**Solution 3.** (présentée par C. Arnal, T. Bénard, P.-L. Blayac, T. Massoni) L'on montre que l'application  $V_{k+1}\mathbb{R}^{n+1} \rightarrow V_1\mathbb{R}^{n+1}$  est une submersion propre. Un théorème de Ehresmann affirme que c'est alors une fibration localement triviale.

(2) En tenant compte du fait que  $V_1\mathbb{R}^{n+1} = S^n$ , la suite exacte d'homotopie pour la fibration  $V_k\mathbb{R}^n \xrightarrow{j} V_{k+1}\mathbb{R}^{n+1} \xrightarrow{p} V_1\mathbb{R}^{n+1}$  prend la forme

$$\dots \longrightarrow \pi_{i+1}(S^n) \longrightarrow \pi_i(V_k\mathbb{R}^n) \xrightarrow{j_*} \pi_i(V_{k+1}\mathbb{R}^{n+1}) \xrightarrow{p_*} \pi_i(S^n) \longrightarrow \dots$$

Tenant compte du fait que  $\pi_i(S^n) = 0$  pour  $i < n$  l'on obtient que  $j_*$  est un isomorphisme pour  $i+1 \leq n-1$ , ou encore  $i \leq n-2$ .

(3) En utilisant le point précédent, l'on obtient pour  $i \leq n-k-1$  des isomorphismes

$$0 = \pi_i(S^{n-k}) = \pi_i(V_1\mathbb{R}^{n-k+1}) \xrightarrow{j_*} \pi_i(V_2\mathbb{R}^{n-k+2}) \xrightarrow{j_*} \dots \xrightarrow{j_*} \pi_i(V_k\mathbb{R}^n).$$

(4)

Pour  $k=1$  l'on a  $V_1\mathbb{R}^n = S^{n-1}$  et l'on sait que  $\pi_{n-1}(S^{n-1}) \simeq \mathbb{Z}$ .

Pour  $k \geq 2$ , par le point (2) l'on a une suite d'isomorphismes

$$\pi_{n-k}(V_2\mathbb{R}^{n-k+2}) \xrightarrow{j_*} \pi_{n-k}(V_3\mathbb{R}^{n-k+3}) \xrightarrow{j_*} \dots \xrightarrow{j_*} \pi_{n-k}(V_k\mathbb{R}^n).$$



Ainsi  $\pi_{n-k}(V_k\mathbb{R}^n) \simeq \mathbb{Z}$  si  $n - k + 2$  est pair, ou encore si  $n - k$  est pair, et  $\pi_{n-k}(V_k\mathbb{R}^n) \simeq \mathbb{Z}/2$  si  $n - k + 2$  est impair, ou encore si  $n - k$  est impair.

(5) Étant donnée une paire  $(X, A)$  et un point base  $x_0$ , l'ensemble sous-jacent au groupe d'homotopie  $\pi_k(X, A, x_0)$  est par définition l'ensemble des classes d'homotopie d'applications  $f : (I^k, I^{k-1}, J^{k-1}) \rightarrow (X, A, x_0)$ , où  $I^{k-1} \equiv I^{k-1} \times \{0\}$  est la  $k - 1$ -face initiale et  $J^{k-1}$  est l'union des autres faces qui composent  $\partial I^k$ . L'application bord dans la suite exacte d'homotopie de la paire  $(X, A)$  associe à  $[f] \in \pi_k(X, A, x_0)$  la classe d'homotopie  $[f|_{I^{k-1}}] \in \pi_{k-1}(A, x_0)$  de la restriction de  $f$  à  $I^{k-1}$ .

De façon alternative,  $\pi_k(X, A, x_0)$  peut être décrit comme étant l'ensemble des classes d'homotopie d'applications

$$f : (D^k, S^{k-1}, *) \rightarrow (X, A, x_0),$$

avec  $D^k$  la boule de dimension  $k$ ,  $S^{k-1} = \partial D^k$  son bord et  $*$   $\in S^{k-1}$  un point base. L'application bord dans la suite exacte d'homotopie de la paire  $(X, A)$  associe à une telle classe d'homotopie  $[f]$  la classe d'homotopie  $[f|_{S^{k-1}}]$  de la restriction de  $f$  à  $S^{k-1}$ .

Soit  $p : E \rightarrow B$  une fibration localement triviale et  $b_0 \in B$ ,  $p_0 \in F = p^{-1}(b_0)$  des points base. L'application bord  $\pi_k(B, b_0) \rightarrow \pi_{k-1}(F, p_0)$  dans la suite exacte d'homotopie de la fibration est la composée

$$\pi_k(B, b_0) \xleftarrow[\simeq]{p_*} \pi_k(E, F, p_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{k-1}(F, p_0)$$

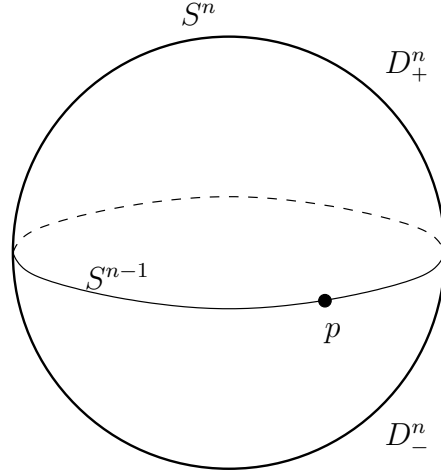
Autrement dit

$$\partial[f] = [f|_{S^{k-1}}],$$

où  $f : (D^k, S^{k-1}) \rightarrow (B, b_0)$  et  $\tilde{f} : (D^k, S^{k-1}, *) \rightarrow (E, F, p_0)$  est un relevé de  $f$ .

Après ces considérations générales revenons à notre situation concrète. L'on prend comme modèle pour  $S^n$  la sphère ronde dans  $\mathbb{R}^{n+1}$ , avec  $D_{\pm}^n = \{x \in S^n : \pm x_{n+1} \geq 0\}$ . L'on fixe comme point base le pôle nord  $b_0 = (0, \dots, 0, 1) \in D_+^n$ . Soit  $\sigma = (0, \dots, 0, -1) \in D_-^n$  le pôle sud. Adoptons la description suivante du générateur canonique de  $\pi_n(S^n)$  : c'est la classe d'homotopie de l'application  $f : D_-^n \rightarrow S^n$  qui fixe  $\sigma$  et qui associe à  $x \in D_-^n \setminus \{\sigma\}$  l'unique point situé sur le grand demi-cercle qui relie le pôle sud  $\sigma$  au pôle nord  $b_0$  et qui passe par  $x$ , situé à un angle égal au double de celui mesuré de  $\sigma$  vers  $x$ .

Nous construisons un relèvement  $\tilde{f}$  comme suit. L'on note  $D_-^n(\frac{\pi}{4}) \subset D_-^n$  la calotte sphérique constituée des points  $x$  situés à un angle  $\leq \frac{\pi}{4}$  mesuré à partir de  $\sigma$ . L'on définit  $\tilde{f}(x) = (f(x), p_0)$  sur  $D_-^n(\frac{\pi}{4})$ . Puisque  $f(D_-^n \setminus \text{int} D_-^n(\frac{\pi}{4})) \subset D_+^n$ , pour construire le relèvement sur  $D_-^n \setminus \text{int} D_-^n(\frac{\pi}{4})$  nous devons prendre en compte l'application de recollement  $\Phi$  : pour  $x \in D_-^n \setminus \text{int} D_-^n(\frac{\pi}{4})$  l'on pose  $\tilde{f}(x) = (f(x), \Phi(x')p_0)$ , où



$x' \in S^{n-1}$  est l'unique point situé sur le grand demi-cercle qui relie  $\sigma$  à  $b_0$  et passe par  $x$ . La continuité de  $\tilde{f}$  découle de la définition de la fibration  $E$ , ainsi que le fait que c'est un relèvement de  $f$ . La restriction de  $\tilde{f}$  à  $S^{n-1} = \partial D_-^n$  est exactement l'application  $c$  décrite dans l'énoncé.

(6) Les fibrations  $V_2\mathbb{R}^n \rightarrow S^{n-1}$ ,  $(v_1, v_2) \mapsto v_2$  et  $S(TS^{n-1}) \rightarrow S^{n-1}$ ,  $(q, v) \mapsto q$  sont isomorphes par  $(v_1, v_2) \mapsto (v_2, v_1)$ . En effet, la fibre de  $S(TS^{n-1})$  au-dessus d'un point  $q \in S^{n-1}$  est l'ensemble des vecteurs unitaires  $v$  tels que  $v \perp q$ , ou encore l'ensemble des vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  tels que  $(q, v)$  est un 2-repère orthonormé. Les morceaux correspondants de suites exactes d'homotopie décrits au (5) sont donc isomorphes, ce qui entraîne

$$\begin{aligned} \pi_{n-2}(V_2\mathbb{R}^n) &\simeq \pi_{n-2}(S(TS^{n-1})) \\ &= \text{coker}(\pi_{n-1}(S^{n-1}) \rightarrow \pi_{n-2}(S^{n-2}), [f] \mapsto [c_{n-1}]), \end{aligned}$$

où  $[f]$  est un générateur de  $\pi_{n-1}(S^{n-1})$ . Puisque  $\pi_k(S^k) \simeq \mathbb{Z}$ , l'isomorphisme étant donné par le degré, la dernière flèche s'identifie à  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $1 \mapsto d$  et son conoyau est  $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ .

(7) L'isomorphisme  $j_* \circ \dots \circ j_*$  que nous avons utilisé dans la preuve du (4) montre qu'il suffit de montrer l'énoncé pour  $n - j + 1 = 2$ , ou encore  $j - 1 = n - 2$ . Or la suite exacte

$$\pi_{n-1}(S^{n-1}) \longrightarrow \pi_{n-2}(S^{n-2}) \xrightarrow{j_*} \pi_{n-2}(V_2\mathbb{R}^n) \longrightarrow 0$$

montre qu'un générateur de  $\pi_{n-2}(V_2\mathbb{R}^n)$  est l'image d'un générateur de  $\pi_{n-2}(S^{n-2})$ , que l'on peut prendre comme étant  $\text{Id}_{S^{n-2}}$ , par l'application  $j_*$  induite par l'inclusion de la fibre  $S^{n-2} = V_1\mathbb{R}^{n-1} \hookrightarrow V_2\mathbb{R}^n$ . Ceci est exactement le contenu de l'énoncé, puisque l'application  $f : S^{n-2} \rightarrow V_2\mathbb{R}^n$ ,  $v \mapsto (v, v_1)$  est précisément l'inclusion de la fibre.

(8) Notons  $w_j^{obstr}(\eta)$  la  $j$ -ème classe de Stiefel-Whitney définie pour un fibré  $\eta$  de rang  $n$  comme réduction modulo 2 de la classe primaire d'obstruction à l'existence de  $n - j + 1$  sections linéairement indépendantes en chaque point sur le  $j$ -squelette.

En suivant la preuve du Théorème 4.28 du polycopié du cours, il suffit de montrer que, pour tout  $n$ , il existe un fibré  $\eta$  de rang  $n$  sur  $\mathbb{R}$  tel que  $w_j^{obstr}(\eta) \neq 0$ . L'on considère le fibré

$$\eta^n = \xi^j \oplus \epsilon^{n-j} \rightarrow \mathbb{R}P^j,$$

où  $\epsilon^{n-j}$  est le fibré trivial de rang  $n - j$  et  $\xi^j \rightarrow \mathbb{R}P^j$  est le fibré tautologique des  $j$ -plans utilisé dans la preuve du Théorème 4.28.

L'argument donné dans la preuve du Théorème 4.28 pour  $j = n$  montre que la classe primaire d'obstruction à l'existence d'une section partout non-nulle de  $\xi^j$  sur  $\mathbb{R}P^j$  est non-triviale. Celle-ci coïncide, par la description géométrique du générateur de  $\pi_{j-1}(V_{n-j+1}\mathbb{R}^n)$  donnée au point (7), avec la classe primaire d'obstruction à l'existence de  $n - j + 1$  sections linéairement indépendantes sur  $\mathbb{R}P^j$ . Cette dernière est donc non-nulle.

## ANNEXE F. TOPOLOGIE DES COURBES ALGÈBRIQUES

Nous présentons dans cette section le calcul des groupes d'homologie des courbes algébriques lisses dans  $\mathbb{C}P^2$ . Ce calcul est l'analogie en dimension 1 de celui que nous avons détaillé pour les surfaces algébriques dans §5.7. À nouveau, le calcul est présenté comme un problème, avec une solution détaillée à la fin (examen final de décembre 2017).

Étant donné un entier  $d \geq 1$ , une *courbe lisse de degré  $d$*  dans  $\mathbb{C}P^2$  est le lieu des zéros d'une section holomorphe du fibré  $\mathcal{O}(d) \rightarrow \mathbb{C}P^2$  transverse à la section nulle.

(i) Soit  $\Sigma$  une courbe lisse de degré  $d$ . Montrer que  $\Sigma$  est une variété complexe compacte de dimension 1. En déduire que  $\Sigma$  est naturellement orientée.

(ii) Soit  $\nu_{\mathbb{C}P^2}\Sigma$  le fibré normal à  $\Sigma$  dans  $\mathbb{C}P^2$ . Alors

$$\nu_{\mathbb{C}P^2}\Sigma \simeq \mathcal{O}(d)|_{\Sigma}.$$

(iii) Montrer que  $H_1(\Sigma; \mathbb{Z})$  est un groupe abélien libre de rang pair.

On appelle *genre de  $\Sigma$*  le nombre  $g = g(\Sigma)$  tel que  $\text{rang } H_1(\Sigma; \mathbb{Z}) = 2g$ . L'on suppose connu le fait que  $\Sigma$  est connexe (mais vous pouvez bien-sûr l'expliquer le cas échéant).

(iv) Exprimer la caractéristique d'Euler-Poincaré de  $\Sigma$  en fonction du genre.

(v) Notons  $i : \Sigma \rightarrow \mathbb{C}P^2$  l'inclusion. Soit  $h$  le générateur positif de  $H^2(\mathbb{C}P^2; \mathbb{Z})$ . Montrer que

$$c_1(T\Sigma) = (3 - d)i^*h.$$

(vi) Justifier que

$$i_*[\Sigma] = d[\mathbb{C}P^1].$$

(vii) Montrer que le genre est déterminé par le degré via la *formule du genre*

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}.$$

*Indication : l'on utilisera le fait que, pour un fibré en droites complexes, la première classe de Chern et la classe d'Euler coïncident.*

### Solutions.

(i)

Soit  $s$  la section telle que  $\Sigma = s^{-1}(0)$ . Le fait que  $\Sigma$  soit une variété découle de la condition de transversalité : dans une trivialisaton locale on identifie  $s$  à une fonction et la transversalité avec la section nulle équivaut au fait que 0 est une valeur régulière de  $s$ , auquel cas l'intersection de l'ouvert de trivialisaton avec  $\Sigma$  est une variété. Cette variété est complexe puisque la section est holomorphe, de dimension 1 car la source est de dimension 2. La compacité de  $\Sigma$  découle du fait que c'est un ensemble fermé dans  $\mathbb{C}P^2$ , qui est compact. Toute variété complexe est naturellement orientée : si  $I$  désigne la multiplication complexe dans le tangent de  $\Sigma$ , on oriente  $T\Sigma$  en chaque point par la base  $(v, Iv)$ , avec  $v \in T_p\Sigma$  un vecteur non-nul quelconque.

(ii)

En chaque point  $(p, 0)$  de la section nulle on a une décomposition de l'espace tangent à l'espace total du fibré  $T_{(p,0)}\mathcal{O}(d) \simeq T_p\mathbb{C}P^2 \oplus \mathcal{O}(d)_p$ . La différentielle  $ds(p, 0)$  s'écrit par rapport à cette décomposition  $ds(p, 0) : T_p\mathbb{C}P^2 \rightarrow T_p\mathbb{C}P^2 \oplus \mathcal{O}(d)_p$ ,  $ds(p, 0) = (\text{Id}_{T_p\mathbb{C}P^2}, ds^{vert}(p, 0))$  et la transversalité de  $s$  avec la section nulle équivaut au fait que  $ds^{vert}(p, 0) : T_p\mathbb{C}P^2 \rightarrow \mathcal{O}(d)_p$  est surjective pour tout  $p \in \mathbb{C}P^2$  tel que  $s(p) = 0$ . Le noyau de  $ds^{vert}(p, 0)$  s'identifie naturellement à  $T_p\Sigma$  et l'on a ainsi une suite exacte courte de fibrés

$$0 \rightarrow T\Sigma \rightarrow T\mathbb{C}P^2|_{\Sigma} \xrightarrow{ds^{vert}} \mathcal{O}(d)|_{\Sigma} \rightarrow 0.$$

En vertu de la définition du fibré normal  $\nu_{\mathbb{C}P^2}\Sigma \simeq T\mathbb{C}P^2|_{\Sigma}/T\Sigma$ , on déduit que  $ds^{vert}$  induit un isomorphisme

$$ds^{vert} : \nu_{\mathbb{C}P^2}\Sigma \xrightarrow{\simeq} \mathcal{O}(d)|_{\Sigma}.$$

Le fait que  $s$  soit holomorphe implique le fait que  $ds^{vert}$  est  $\mathbb{C}$ -linéaire et donc l'isomorphisme ci-dessus est un isomorphisme de fibrés (en droites) complexes.

(iii)

Par dualité de Poincaré l'on a  $H_1(\Sigma; \mathbb{Z}) \simeq H^1(\Sigma; \mathbb{Z})$ . Or  $H^1(\Sigma; \mathbb{Z}) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_1(\Sigma; \mathbb{Z}), \mathbb{Z})$  (théorème des coefficients universels) et ce dernier groupe est libre. En effet, pour tout groupe abélien  $A$  qui est de torsion, l'on a  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Z}) = 0$ .

Le  $\mathbb{Z}$ -module libre  $H^1(\Sigma; \mathbb{Z})$  porte une forme bilinéaire anti-symétrique donnée par le produit cup, suivi de l'évaluation sur la classe fondamentale  $[\Sigma]$ . Cette forme bilinéaire est non-dégénérée par dualité de Poincaré et, puisqu'elle est anti-symétrique, ceci implique le fait que le rang de  $H^1(\Sigma; \mathbb{Z})$  est pair.

(iv)

L'on a  $\chi(\Sigma) = \text{rang } H_0 - \text{rang } H_1 + \text{rang } H_2 = 1 - 2g + 1 = 2 - 2g$ .

(v)

Les fibrés  $T\Sigma$  et  $\nu_{\mathbb{C}P^2}\Sigma$  sont des fibrés en droites complexes sur  $\Sigma$  tels que  $T\Sigma \oplus \nu_{\mathbb{C}P^2}\Sigma \simeq T\mathbb{C}P^2|_{\Sigma}$ . L'on a  $c(\nu_{\mathbb{C}P^2}\Sigma) = 1 + di^*h$  en vertu de (ii), car  $c_1(\mathcal{O}(d)) = dh$ . On a  $c(T\mathbb{C}P^2|_{\Sigma}) = (1 + i^*h)^3 = 1 + 3i^*h$ . L'identité  $c(T\Sigma)c(\nu_{\mathbb{C}P^2}\Sigma) = c(T\mathbb{C}P^2|_{\Sigma})$  équivaut alors à

$$c_1(T\Sigma) + di^*h = 3i^*h.$$

(vi)

*Solution 1.* Puisque  $\Sigma$  est lieu transverse des zéros d'une section de  $\mathcal{O}(d)$ , un théorème du cours assure que  $i_*[\Sigma]$  est le dual de Poincaré de  $c_1(\mathcal{O}(d))$ . Or  $c_1(\mathcal{O}(d)) = dh$ , le dual de Poincaré est  $[\mathbb{C}P^1]$  et donc le dual de Poincaré de  $c_1(\mathcal{O}(d)) = dh$  est  $d[\mathbb{C}P^1]$ . Ainsi  $i_*[\Sigma] = d[\mathbb{C}P^1]$ .

*Solution 2.* L'on sait que les sections holomorphes de  $\mathcal{O}(d) \rightarrow \mathbb{C}P^2$  sont les polynômes homogènes de degré  $d$  en 3 variables représentées par les coordonnées homogènes sur  $\mathbb{C}P^2$ . L'on choisit une droite complexe  $L \cong \mathbb{C}P^1$  qui intersecte de façon transverse  $\Sigma$ . L'intersection  $\Sigma \cap \mathbb{C}P^1$  s'identifie aux zéros de  $s|_{\mathbb{C}P^1}$ , ou encore aux zéros d'un polynôme homogène de degré  $d$  en 2 variables. En déshomogénéisant par rapport à l'une des variables on trouve que cet ensemble est constitué de  $d$  points, distincts car les zéros de  $s|_{\mathbb{C}P^1}$  sont transverses. Chacun de ces points contribue +1 au nombre d'intersection et on déduit que le produit d'intersection entre  $i_*[\Sigma]$  et  $[\mathbb{C}P^1]$  est  $i_*[\Sigma] \cdot [\mathbb{C}P^1] = d$ . Puisque  $H_2(\mathbb{C}P^2; \mathbb{Z})$  est un  $\mathbb{Z}$ -module libre de rang 1 et  $[\mathbb{C}P^1] \cdot [\mathbb{C}P^1] = 1$ , on déduit que  $i_*[\Sigma] = d[\mathbb{C}P^1]$ .

Remarque : il existe bien une telle droite complexe  $L$  qui intersecte de façon transverse  $\Sigma$ . En effet, les droites complexes dans  $\mathbb{C}P^2$  sont en bijection avec les points du plan projectif dual  $(\mathbb{C}P^2)^\vee$ . L'ensemble des tangentes à  $\Sigma$  détermine dans  $(\mathbb{C}P^2)^\vee$  une famille algébrique de dimension 1, contenue strictement dans  $(\mathbb{C}P^2)^\vee$ .

(vii) L'on a successivement

$$\begin{aligned} 2 - 2g &= \chi(\Sigma) \\ &= \langle c_1(T\Sigma), [\Sigma] \rangle \\ &= \langle (3 - d)i^*h, [\Sigma] \rangle \\ &= (3 - d)\langle h, i_*[\Sigma] \rangle \\ &= (3 - d)\langle h, d[\mathbb{C}P^1] \rangle \\ &= (3 - d)d. \end{aligned}$$

Ainsi  $g = (d^2 - 3d + 2)/2$ , ou encore  $g = (d - 1)(d - 2)/2$ .

ANNEXE G.  $w_1$  ET  $c_1$  CLASSIFIENT LES FIBRÉS EN DROITES

Nous démontrons dans cette Annexe la Proposition 4.9, à savoir que les classes  $w_1$  et  $c_1$  classifient les fibrés en droites réels, resp. complexes. Nous donnons la preuve pour  $w_1$ , celle concernant  $c_1$  est analogue. Nous présentons le tout comme un problème, avec une solution détaillée à la fin (examen final de décembre 2017).

Soit  $B$  une variété compacte de dimension  $n$  et notons  $\mathcal{Vect}_1(B)$  l'ensemble des classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels réels de rang 1 sur  $B$ . L'on se propose de montrer dans cet exercice que la première classe de Stiefel-Whitney réalise un isomorphisme de groupes abéliens

$$w_1 : \mathcal{Vect}_1(B) \xrightarrow{\sim} H^1(B; \mathbb{Z}/2).$$

(i) Montrer que  $\mathcal{Vect}_1(B)$  est naturellement muni d'une structure de groupe abélien donnée par le produit tensoriel de fibrés. Montrer que tout élément est d'ordre 2.

(ii) Soit  $\mathbb{R}P^\infty = \cup_{k \geq 1} \mathbb{R}P^k$  l'union croissante par rapport aux inclusions canoniques  $\mathbb{R}P^k \hookrightarrow \mathbb{R}P^{k+1}$ , muni de la topologie de colimite définie comme suit : les ouverts de  $\mathbb{R}P^\infty$  sont par définition les sous-ensembles dont l'intersection avec chaque  $\mathbb{R}P^k$  est un ouvert. Montrer que  $\mathbb{R}P^\infty$  est connexe. Montrer que

$$\pi_1(\mathbb{R}P^\infty) = \mathbb{Z}/2 \quad \text{et} \quad \pi_i(\mathbb{R}P^\infty) = 0, \quad \forall i \geq 2.$$

(iii) Montrer que l'on a un isomorphisme de  $\mathbb{Z}/2$ -algèbres

$$H^*(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}/2) \simeq \mathbb{Z}/2[w],$$

avec  $w$  de degré 1 le générateur de  $H^1(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}/2)$ .

(iv) Montrer que l'on a une bijection canonique

$$[B, \mathbb{R}P^\infty] \xrightarrow{\sim} H^1(B; \mathbb{Z}/2), \quad [f] \mapsto f^*w.$$

Ici  $[B, \mathbb{R}P^\infty]$  désigne l'ensemble des classes d'homotopie d'applications continues définies sur  $B$  à valeurs dans  $\mathbb{R}P^\infty$ . *Indication : on pourra utiliser le fait que  $B$  admet une structure de CW-complexe fini et considérer les squelettes successifs.*

(v) Conclure. *Indication : on pourra utiliser le fait que  $w_1(\xi \otimes \eta) = w_1(\xi) + w_1(\eta)$  pour tous deux fibrés en droites  $\xi, \eta$ .*

**Solutions.**

(i)

Étant donnés deux espaces vectoriels réels  $K, L$  de dimension 1, il existe un isomorphisme canonique

$$K \otimes L \xrightarrow{\cong} L \otimes K, \quad u \otimes v \mapsto v \otimes u.$$

Aussi, étant donné un espace vectoriel réel  $L$  de dimension 1, en notant  $L^\vee$  son dual il existe un isomorphisme canonique

$$L^\vee \otimes L \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}, \quad \alpha \otimes v \mapsto \alpha(v).$$

Étant donné un espace vectoriel réel  $E$  muni d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  il existe un isomorphisme canonique

$$E \xrightarrow{\cong} E^\vee, \quad v \mapsto \langle v, \cdot \rangle.$$

En particulier, si  $L$  est un espace vectoriel réel de dimension 1 muni d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , il existe un isomorphisme canonique

$$L \otimes L \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}, \quad u \otimes v \mapsto \langle u, v \rangle.$$

Ces isomorphismes étant canoniques, ils passent aux fibrés (notamment puisque tout fibré réel possède une structure euclidienne, à savoir une famille continue de produits scalaires sur les fibres). La conclusion en découle.

(ii)

L'espace  $\mathbb{R}P^\infty$  possède une décomposition cellulaire avec une unique cellule en chaque dimension  $k \geq 0$ . Puisqu'il n'y a qu'une seule cellule en dimension 0 la connexité en découle (le rattachement de cellules de dimension 1 ne peut pas augmenter le nombre de composantes connexes, et le rattachement de cellules de dimension  $> 1$  ne change pas le nombre de composantes connexes).

L'inclusion  $\mathbb{R}P^k \hookrightarrow \mathbb{R}P^{k+1}$  induit des isomorphismes  $\pi_i(\mathbb{R}P^k) \rightarrow \pi_i(\mathbb{R}P^{k+1})$  pour  $k > i$ . En effet, toute  $i$ -sphère dans  $\mathbb{R}P^{k+1}$  évite un point à homotopie près (lissage et transversalité) et donc peut être déformée par une homotopie jusqu'à prendre ses valeurs dans  $\mathbb{R}P^k$ . Il en est de même pour toute homotopie de  $i$ -sphères.

La suite exacte d'homotopie pour la fibration  $\{\pm 1\} \hookrightarrow S^k \rightarrow \mathbb{R}P^k$ ,  $k \geq 2$  montre que  $\pi_1(\mathbb{R}P^k) = \mathbb{Z}/2$  et  $\pi_i(\mathbb{R}P^k) = \pi_i(S^k) = 0$  pour  $i < k$ . Ceci implique la conclusion : pour calculer  $\pi_i(\mathbb{R}P^\infty)$  il suffit de remarquer le fait que toute  $i$ -sphère dans  $\mathbb{R}P^\infty$ , étant compacte, est nécessairement contenue dans un  $\mathbb{R}P^N$ ,  $N \gg 0$ . L'on peut supposer sans perte de généralité que  $N > i + 1$  et, par ce qui précède, que cette  $i$ -sphère est contenue à homotopie près dans  $\mathbb{R}P^{i+1}$ . De même, toute homotopie entre deux sphères peut être choisie de façon à ce



que son image soit contenue dans  $\mathbb{R}P^{i+1}$ , et ceci montre que l'inclusion  $\mathbb{R}P^{i+1} \hookrightarrow \mathbb{R}P^\infty$  induit un isomorphisme sur  $\pi_i$ .

(iii)

L'on suppose connu le fait que  $H^*(\mathbb{R}P^k; \mathbb{Z}/2) \simeq \mathbb{Z}/2[w]/(w^{k+1})$ , avec  $w$  de degré 1.

Considérons la décomposition cellulaire standard de  $\mathbb{R}P^\infty$  avec une cellule en chaque dimension  $\geq 0$ . Le complexe cellulaire à coefficients  $\mathbb{Z}/2$  est à différentielle triviale. Ceci montre que l'isomorphisme de l'énoncé est vrai au niveau des  $\mathbb{Z}/2$ -espaces vectoriels sous-jacents et les inclusions  $incl_k : \mathbb{R}P^k \hookrightarrow \mathbb{R}P^\infty$  induisent des isomorphismes en cohomologie de degré  $\leq k$ . Soit  $w$  le générateur de  $H^1(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}/2)$ . Pour montrer l'isomorphisme de l'énoncé au niveau des  $\mathbb{Z}/2$ -algèbres, il suffit de montrer que  $w^i \neq 0$  pour tout  $i \geq 1$ . Or, pour  $k \geq i$ , l'on a  $incl_k^* w^i = (incl_k^* w)^i \neq 0$ , puisque  $incl_k^* w \in H^1(\mathbb{R}P^k; \mathbb{Z}/2)$  est le générateur et chacune de ses puissances  $\leq k$  est non-nulle. Ceci assure que  $w^i \neq 0$  et finit la démonstration.

(iv)

La démonstration est en tout point analogue – et plus simple – à celle du fait que l'on a un isomorphisme  $[B, S^1] \simeq H^1(B; \mathbb{Z})$  (cf. cours). Dans le cas du cercle nous utilisons le fait que  $S^1$  est connexe,  $\pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$  et  $\pi_i(S^1) = 0$ ,  $i \geq 2$ . Dans le cas de  $\mathbb{R}P^\infty$  les conditions analogues sont celles du (ii) ci-dessus. (On dit que le cercle est un espace  $K(\mathbb{Z}, 1)$  et  $\mathbb{R}P^\infty$  est un espace  $K(\mathbb{Z}/2, 1)$ .) Dans le cas du cercle la démonstration faisait intervenir le degré d'une application  $S^1 \rightarrow S^1$ , dans le cas de  $\mathbb{R}P^\infty$  la démonstration utilise le degré modulo 2 d'une application  $S^1 \rightarrow \mathbb{R}P^1 \simeq S^1$ .

(v)

La première classe de Stiefel-Whitney  $w_1 : \mathcal{V}ect_1(B) \rightarrow H^1(B; \mathbb{Z}/2)$  est un morphisme de groupes abéliens car  $w_1(\xi \otimes \eta) = w_1(\xi) + w_1(\eta)$  pour tous deux fibrés en droites  $\xi$  et  $\eta$ . La bijectivité découle du point (iv), de la définition de  $w_1$  et du fait que l'on a une bijection canonique  $[B, \mathbb{R}P^\infty] \simeq \mathcal{V}ect_1(B)$  (cf. cours).

## VARIA

Calculs explicites : fibrés vectoriels en droites réelles sur les sphères. Fibrés vectoriels en droites complexes. Fibrés de rang  $n$  sur la sphère  $S^n$ . Fibrés de petit rang sur des sphères de petite dimension.

**À INCLURE DANS UNE VERSION ULTÉRIEURE ?**

- ! Functorialité de la classe d'obstruction primaire
- ! Comportement de  $w_1$  et  $c_1$  par rapport aux produits tensoriels
- Première classe de Chern en termes de courbure et en termes de suite exacte exponentielle
- Deuxième classe de Stiefel-Whitney et structures spin
- Formule de Wu
- Le fibré tangent d'une variété de dimension 3 est trivial