Examen du 24 octobre 2019

Durée : 3 heures

Sont autorisées les notes individuelles de cours, ainsi que le polycopié du cours. Les exercices sont indépendants et peuvent ne pas être traités dans l'ordre. Les copies peuvent être rédigées en anglais.

Exercice 1. (sphères et espaces projectifs)

Sphères

Soit $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$. On appelle *grand cercle* l'intersection de S^n avec un 2-plan vectoriel de $\mathbb{R}^{n+1}$. Nous munissons S^n de la métrique riemannienne induite par la métrique euclidienne sur $\mathbb{R}^{n+1}$. Étant donné $x \in S^n$ et $X \in T_x\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1}$, l'on note X^T la projection orthogonale de X sur T_xS^n.

(i) Soient D et $D^{\mathbb{R}^{n+1}}$ les connexions de Levi-Civita sur S^n et $\mathbb{R}^{n+1}$. Montrer l'égalité

$$D_XY = (D_X^{\mathbb{R}^{n+1}}Y)^T,$$

tout en précisant la nature de X et Y.

(ii) Utiliser un argument de symétrie pour montrer sans calcul que l'image de toute géodésique sur S^n est contenue dans un grand cercle.

(iii) Soient $x \in S^n$ et $u \in T_xS^n$. Donner une formule explicite pour la géodésique $\gamma_{x,u} : t \mapsto \exp_x(tu)$.

(iv) Soient $x \in S^n$ et $u, v \in T_xS^n$ de norme 1. Donner une formule explicite pour l'unique champ de Jacobi Y le long de la géodésique $\gamma_{x,u}$ tel que $Y(0) = 0$ et $D_tY(0) = v$ en utilisant une famille à 1 paramètre de géodésiques choisies convenablement.

(v) En déduire que la courbure sectionnelle de S^n est constante.

(vi) Calculer le rayon d'injectivité de S^n.

Espaces projectifs

Munissons l'espace projectif réel $\mathbb{R}P^n = S^n/\pm\,\mathrm{Id}$ de la métrique induite à partir de la métrique de S^n par quotient.

(vii) Calculer le rayon d'injectivité de $\mathbb{R}P^n$.

(viii) Montrer que le cut-locus de tout point $p \in \mathbb{R}P^n$ est une sous-variété de $\mathbb{R}P^n$ isométrique à $\mathbb{R}P^{n-1}$.

(ix) On note $O(1)$ le fibré tautologique sur $\mathbb{R}P^{n-1}$, dont la fibre au-dessus d'un point $[d]$ représenté par une droite $d \subset \mathbb{R}^n$ est la droite d.

Soit $p \in \mathbb{R}P^n$. Construire un difféomorphisme entre $\mathbb{R}P^n \backslash \{p\}$ et l'espace total de $O(1)$.

Exercice 2.

Soit M une variété de dimension n. Une distribution E sur M est dite *co-orientable* si TM/E est un fibré orientable. Une distribution de rang $n-1$ sur M est appelée *distribution d'hyperplans.*

(i) Montrer qu'une distribution d'hyperplans E est co-orientable si et seulement si il existe une 1-forme $\alpha \in \Omega^1(M)$ partout non-nulle telle que $E = \ker \alpha$.

(ii) Soit E une distribution d'hyperplans co-orientable et α une 1-forme telle que $E = \ker \alpha$. Montrer que E est intégrable si et seulement si $\alpha \wedge d\alpha = 0$.

(iii) Donner un exemple de distribution d'hyperplans intégrable sur S^3.

(iv) Regardons S^3 comme la sphère unité de $\mathbb{C}^2$ muni de coordonnées complexes (z, w) et définissons une distribution d'hyperplans de la manière suivante : $E_{(z,w)}$ est l'unique droite complexe de $\mathbb{C}^2$ contenue dans $T_{(z,w)}S^3$. Montrer que E n'est pas intégrable.

(v) Montrer que S^2 ne possède pas de distribution d'hyperplans.

(vi) Généraliser le points (iv) aux sphères S^{2n-1}, $n \geqslant 2$ et (v) aux sphères S^{2n}, $n \geqslant 2$.

Exercice 3.

Soient $E \xrightarrow{\pi} M$ un fibré vectoriel euclidien et $D : \Gamma(E) \to \Omega^1(M; E)$ une connexion linéaire. Montrer que le transport parallèle défini par D prend ses valeurs dans le groupe orthogonal si et seulement si la connexion D est compatible avec le produit scalaire au sens suivant : pour toutes deux sections $s_1, s_2 \in \Gamma(E)$ et tout champ de vecteurs $X \in \mathcal{X}(M)$ l'on a

$$X\langle s_1, s_2\rangle = \langle D_X s_1, s_2\rangle + \langle s_1, D_X s_2\rangle.$$

Exercice 4.

Notons S^2 la sphère de dimension 2 et T^2 le tore de dimension 2. Existe-t-il sur $S^2 \times T^2$ une métrique à courbure sectionnelle > 0 ? À courbure sectionnelle $\geqslant 0$? À courbure sectionnelle $\leqslant 0$? À courbure sectionnelle < 0 ?