# Écrit blanc de Mathématiques Générales, 11 janvier 2020

## Commentaires par Alexandru Oancea

1. Le sujet comporte 5 parties. Il est difficile de s'y repérer et de comprendre vers quoi on va. Indice important : la toute dernière question !

*Montrer que pour tout idéal homogène $I$ de $S$, la fonction $h_{S/I}$ appartient à $\mathcal{P}_\infty$.*

Ceci dit déjà que les notions suivantes seront centrales dans le problème :
- idéal homogène,
- la fonction $h_{S/I}$ pour un idéal homogène $I$,
- l'espace $\mathcal{P}_\infty$.

Et cela dit que le fait de passer du temps sur ces notions-là payera pour tout le sujet !

2. Le sujet était traître parce-que la première partie contenait des questions plus difficiles que la deuxième ou la troisième. La structure du sujet était la suivante : la première partie utilisait des notions plus élémentaires et était en quelque sorte déconnectée du reste, alors que les parties 2-5 étaient intimement liées l'une à l'autre, mais faisaient un usage intensif des notions d'anneau, idéal, polynme. Il y a un équilibre à trouver entre le temps que l'on passe sur les différentes questions.

3. Le sujet était aussi traître parce-que deux formules fondamentales n'y apparaissent pas de façon explicite. Être préparé à ce genre de situation !

Question III.1.a : si $P$ est homogène alors $\pi_n(PQ) = P\pi_{n-degP}Q$

Question V.5.a : si $I$ et $J$ sont deux idéaux homogènes alors

$$h_{S/I} + h_{S/J} = h_{S/(I\cap J)} + h_{S/(I+J)}$$

4. Question I.3.b : il était demandé d'exprimer la fonction $\partial^p f_k$ en fonction de $p$, $k$ et des fonctions $f_{k'}$ pour $k' \leq k$. Beaucoup d'entre vous ont juste démontré la relation $\partial^p f_k(n) = f_{k-p}(n-p)$

5. Question I.7 : on demandait de calculer une série. Dans ce contexte, "calculer" signifiait réduire à une forme plus simple. Beaucoup d'entre vous se sont bornés à l'écrire, mais sans la simplifier du tout.

6. Si $P_1, \dots, P_r \in k[X]$ engendrent un idéal $I$, alors tout élément de $I$ s'écrit $P = Q_1P_1 + \cdots + Q_rP_r$ avec $Q_1, \dots, Q_r \in k[X]$. Une erreur fréquente a été d'écrire que $P$ est combinaison linéaire des $P_1, \dots, P_r$ à coefficients dans $k$.

7. Retenir la formule combinatoire à la question II.2.a

Le nombre de partitions de $n$ en $r$ entiers est le coefficient binomial $\binom{n+r-1}{r-1}$.

La preuve par récurrence fournie dans le corrigé n'est pas particulièrement éclairante. Voici une preuve directe due à Nathan Chiche et Jules Baudrin. Fixons $r \geq 1$ et notons $a_n = h_S(n)$ le nombre de partitions de $n$ en $r$ entiers $\geq 0$. L'entier $a_n$ est le coefficient de $T^n$ dans la série formelle

$$f(T) = (\frac{1}{1-T})^r = (\sum_{k\geq 0} T^k) \dots (\sum_{k\geq 0} T^k).$$

Par ailleurs, nous pouvons calculer directement

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) = \frac{1}{n!} \frac{r(r+1)\dots(r+n-1)}{(1-T)^{r+n}}\Big|_{T=0} = \frac{r(r+1)\dots(r+n-1)}{n!} = \binom{n+r-1}{r-1}.$$