

Introduction à l'analyse de Fourier

Amina Mecherbet

11 septembre 2026

Table des matières

1	Séries de Fourier	3
1.1	Notations et pré-requis	3
1.2	Coefficients de Fourier et premières propriétés	4
1.3	Convergence ponctuelle et uniforme	7
1.4	Cadre L^2 et interprétation géométrique des séries de Fourier	9
1.5	Quelques résultats de convergence plus généraux	10
1.5.1	Fonctions à variation bornée	11
2	Transformée de Fourier	12
2.1	Pré-requis et notations :	12
2.1.1	Convolution et approximation de l'unité	12
2.2	Définition et premières propriétés	14
2.3	Transformée de Fourier dans l'espace de Schwartz	16
2.4	Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R}^d)$	17
2.5	Transformée de Fourier et convolution	18
2.6	Principe d'incertitude de Heisenberg	19
3	Un aperçu de la théorie des distributions tempérées	19
3.1	Lien entre transformée de Fourier et série de Fourier	23
4	Application à l'équation de la chaleur : cadre L^1	23

« L'étude approfondie de la nature est la source la plus féconde des découvertes mathématiques. »

— Joseph Fourier

En 1822 Fourier publie son manuscrit intitulé *Théorie analytique de la chaleur* qui traite de la modélisation de la propagation de la chaleur dans un corps homogène à travers une équation aux dérivées partielles connue aujourd'hui sous le nom de l'équation de la chaleur. Au delà de la conceptualisation des aspects physiques de la chaleur, Fourier y expose une méthode de résolution de cette équation en utilisant des séries trigonométriques¹ en exploitant les conditions au bord du domaine. Il est notamment le premier à établir une formule pour ce qui est appelé aujourd'hui les coefficients de Fourier et plus généralement d'identifier le problème suivant : étant donné une fonction f , peut-on définir les valeurs suivantes

$$c_n = \int_0^1 f(x) e^{-2i\pi nx} dx$$

et étudier la convergence de la série suivante ainsi que son lien avec $f(x)$

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{2i\pi nx}$$

De plus, il y établit également une formule de *représentation intégrale* d'une fonction arbitraire qui correspond à ce qu'on appelle aujourd'hui le théorème d'inversion de Fourier.

La portée de ces travaux va au delà de la simple résolution de l'équation de la chaleur ou du développement de l'outil des séries de Fourier, cela permet de définir une certaine conception des mathématiques qui englobe à la fois la modélisation, la résolution, le calcul numérique et l'algorithmie. Nous referons aux ouvrages [2, 4] pour plus de détails concernant le caractère historique ainsi qu'aux nombreuses applications.

Le but de ce mini-cours est de proposer une introduction à l'analyse de Fourier, cela regroupe à la fois la notion de séries de Fourier ainsi que de la transformée de Fourier et éventuellement de son application à la résolution d'EDPs.

1. la notion de séries trigonométriques était déjà utilisée par Bernoulli pour proposer une solution au problème des cordes vibrantes

1 Séries de Fourier

Afin de répondre à la problématique évoquée dans l'introduction, nous avons besoin de spécifier la nature des fonctions que l'on considère. Une propriété importante pour espérer avoir l'égalité entre la série trigonométrique et une fonction arbitraire est la périodicité de la fonction. Nous rappelons ici les espaces fonctionnels qui nous intéresseront ainsi que certaines de leur propriétés.

1.1 Notations et pré-requis

Posons $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et on notera par $C^0(\mathbb{T})$ (resp. $C^1(\mathbb{T})$) l'espace des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continues (resp. de classe C^1) et 2π -périodiques

$$f(x) = f(x + 2\pi), \quad x \in \mathbb{R}$$

Le choix de la période 2π est arbitraire, on peut toujours se ramener à l'ensemble des fonctions $T > 0$ périodiques grâce à la transformation

$$x \mapsto f\left(\frac{2\pi x}{T}\right)$$

On utilise la notation $\|\cdot\|_{C^0(\mathbb{T})}$ pour la norme uniforme sur $C^0(\mathbb{T})$. On introduit les espaces $L^p(\mathbb{T})$ pour $p \geq 1$

$$L^p(\mathbb{T}) = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \text{ mesurables, } 2\pi\text{-périodiques et } \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p dt < +\infty \right\}$$

où l'intégrale ici est au sens de Lebesgue et on a par 2π périodicité que pour tout $a > 0$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \int_{a-\pi}^{a+\pi} f(t) dt$$

On normalise la mesure de Lebesgue et on munit cet espace de la norme

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{T})} := \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p dt \right)^{1/p}$$

qui est un espace de Banach. On rappelle que

- Par construction, l'espace des fonctions étagées (combinaison linéaire des fonctions indicatrices de segments fermés bornés dans $[-\pi, \pi]$) est dense dans $L^p(\mathbb{T})$.
- Les éléments de $L^p(\mathbb{T})$ sont des classes d'équivalence de fonctions égales presque partout et qu'il est usuel de confondre la classe d'équivalence avec un de ses représentants.

Lorsque $p = 2$, l'espace est un espace de Hilbert muni du produit scalaire classique qu'on notera $(f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$. On définit également le cas $p = \infty$ par ²

$$L^\infty(\mathbb{T}) = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \text{ mesurables, } 2\pi\text{-périodiques pp et } \|f\|_\infty := \supess|f| < +\infty \right\}$$

On rappelle que pour $p > q \geq 1$

$$C^1(\mathbb{T}) \subset C^0(\mathbb{T}) \subset L^\infty(\mathbb{T}) \subset L^p(\mathbb{T}) \subset L^q(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T})$$

On a le résultat suivant

2. On rappelle que $\supess f := \inf\{t \in \mathbb{R}, \quad \lambda\{x \in \mathbb{R}, f(x) > t\} = 0\}$

Proposition 1.1. *L'espace des fonctions de classe $C^1(\mathbb{T})$ est dense dans $L^p(\mathbb{T})$ pour tout $p \geq 1$ fini.*

Démonstration. Il suffit d'approcher les fonctions indicatrices par une fonction C^1 et ceci peut se faire en lissant les bords du support de la fonction étagée. En effet si $f = 1_{[a,b]}$ avec $[a,b] \subset [-\pi, \pi]$ on peut simplement lisser le graphe de f via une fonction g affine (quitte à déborder dans le support) et cela permet d'avoir $\|g - f\|_p$ aussi petit que l'on veut en jouant sur la pente de la fonction affine et de son support. $\square$

1.2 Coefficients de Fourier et premières propriétés

Définition 1.2. Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$ et $k \in \mathbb{Z}$. On appelle k ème coefficient de Fourier de f le nombre complexe

$$\hat{f}(k) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-itk} dt$$

L'intégrale étant bien définie on a $|\hat{f}(k)| \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{T})}$.

On liste ci-dessous quelques propriétés remarquables des coefficients de Fourier

Proposition 1.3. • Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$. Si f est paire alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$

$$\hat{f}(n) = \hat{f}(-n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) f(x) dx$$

• Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$. Si f est impaire alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$

$$\hat{f}(n) = -\hat{f}(-n) = -\frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) f(x) dx$$

• Si f est à valeurs réelles alors $\hat{f}(-n) = \overline{\hat{f}(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

• Pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\hat{f}'(n) = in\hat{f}(n)$$

ceci est vrai dès qu'on peut donner un sens aux termes de droite et de gauche, par exemple lorsque $f' \in L^1(\mathbb{T})$ et par conséquent $f \in L^1(\mathbb{T})$ et continue.

Définition 1.4 (Série de Fourier). étant donné une fonction $f \in L^1(\mathbb{T})$, on définit la série de Fourier comme suit

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{inx}, \quad x \in \mathbb{T}$$

Le but de ce chapitre est donc de répondre à la question suivante : sous quelles conditions sur f peut-on affirmer que la série converge et dans quel sens ? si oui, peut-on établir l'égalité entre la série et f . On peut naturellement commencer par rappeler la condition nécessaire de convergence d'une série : son terme général tend vers 0, ainsi si on veut espérer que la série converge, il faut que les coefficients de Fourier de f tendent vers 0. On a le résultat suivant

Lemme 1.5 (Lemme de Riemann Lebesgue). Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$. On a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{f}(n) = 0$$

ou de manière équivalente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nkt) f(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nkt) f(t) dt = 0$$

Démonstration. D'après Proposition 1.1, par densité, il suffit de le montrer pour les fonctions $f \in C^1(\mathbb{T})$, par IPP on a

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \right| &= \left| \frac{1}{in} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-inx} dx - \left[f(x) \frac{e^{-inx}}{in} \right]_{-\pi}^{\pi} \right| \\ &\leq \frac{1}{n} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f'| + 2\|f\|_{\infty} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

puisque f' est localement intégrable car continue. Maintenant si $f \in L^1(\mathbb{T})$, pour tout $\epsilon > 0$ on peut trouver $g \in C^1(\mathbb{T})$ telle que $\|f - g\|_{L^1(\mathbb{T})} \leq \epsilon$ et on a

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \right| \leq \|f - g\|_{L^1(\mathbb{T})} + \left| \int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{-inx} dx \right| \leq \epsilon + \left| \int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{-inx} dx \right|$$

d'où le résultat en passant à la limite. □

Une autre propriété naturelle à vérifier est l'unicité des coefficients de Fourier au sens suivant

Proposition 1.6. *Soit $f \in C^0(\mathbb{T})$ telle que $\hat{f}(k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ alors $f = 0$.*

Démonstration. Remarquons, par linéarité, que l'intégrale de f sur $(-\pi, \pi)$ contre n'importe quelle fonction trigonométrique est nulle. Par l'absurde, supposons que f n'est pas nulle sur $(-\pi, \pi)$ et sans perte de généralité on suppose que $f(0) > 0$. Il existe donc $\pi/2 > \delta > 0$ tel que

$$f(x) \geq f(0)/2, \quad \forall x \in (-\delta, \delta)$$

L'idée est de construire une suite de fonctions trigonométriques p_n telle que l'intégrale

$$\int_{-\pi}^{\pi} p_n(x) f(x) dx$$

explose lorsque n tend vers $+\infty$ ce qui sera en contradiction avec le fait que les coefficients de Fourier sont tous nuls. Comme $\cos(0) = 1$ il suffit de considérer la fonction suivante

$$p(\theta) = \cos(\theta) + \varepsilon$$

avec $\varepsilon > 0$ assez petit tel que

$$|p(\theta)| \leq 1 - \varepsilon/2, \quad \forall \delta \leq |\theta| \leq \pi$$

et il existe $\eta > 0$ tel que $\eta < \delta$ satisfait

$$|p(\theta)| \geq 1 + \varepsilon/2, \quad \forall |\theta| \leq \eta$$

On pose pour $n \in \mathbb{N}$

$$p_n(\theta) = p(\theta)^n$$

clairement p_n est une combinaison linéaire de $\theta \mapsto e^{i\theta k}$ pour $k \in \{-n, \dots, n\}$ et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) p_n(\theta) d\theta = 0$$

On a cependant

- L'intégrale sur l'ensemble $\{\delta \leq |\theta| \leq \pi\}$ tend vers 0 puisque

$$\left| \int_{\{\delta \leq |\theta| \leq \pi\}} f(\theta) p_n(\theta) d\theta \right| \leq \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)| d\theta \right) (1 - \varepsilon/2)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

- L'intégrale est positive sur l'ensemble $\{\eta \leq |\theta| \leq \delta\}$ car p et f le sont.
- L'intégrale explose sur $\{|\theta| \leq \eta\}$ car

$$\left| \int_{\{\eta \leq |\theta|\}} f(\theta) p_n(\theta) d\theta \right| = \int_{\{\eta \leq |\theta|\}} f(\theta) p_n(\theta) d\theta \geq \eta f(0) (1 + \varepsilon/2)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$$

ainsi donc $\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) p_n(\theta) d\theta$ diverge, ce qui est absurde. □

Corollaire 1.7. *Deux fonctions continues $f, g \in C^0(\mathbb{T})$ sont égales ssi leurs coefficients de Fourier coïncident.*

Nous énonçons le résultat suivant permettant d'établir l'égalité entre la somme d'une série de Fourier et la fonction elle même.

Théorème 1. *Si une fonction $f \in C^0(\mathbb{T})$ admet une série de Fourier absolument convergente ie*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(k)| < +\infty$$

alors f est la limite uniforme de sa série de Fourier i.e. si on note S_n la suite des sommes partielles de la série de Fourier

$$S_n(f) = \sum_{k=-n}^n \hat{f}(k) e^{ikx}$$

Alors

$$\|S_n(f) - f\|_{\infty} := \sup_{x \in \mathbb{T}} |S_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Démonstration. La série de fonctions $\sum_n \hat{f}(k) e^{ikx}$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$ et donc uniformément convergente vers une fonction continue, qu'on note $S := \lim S_n$. Un calcul direct montre que S admet les mêmes coefficients de Fourier que f , en effet on a pour tout $p, q \in \mathbb{Z}$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{it(q-p)} dt = \begin{cases} 1 & \text{si } p = q \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et donc $S = f$. □

Remarque 1.1. Nous avons montré dans la preuve du lemme de Riemann Lebesgue que les coefficients de Fourier $(\hat{f}(n))_n$ d'une fonction continument différentiable décroissent comme $\frac{1}{n}$. Ceci peut se généraliser à un taux de décroissance d'ordre $\frac{1}{n^\ell}$ pour une fonction $\ell \in \mathbb{N}^*$ fois continument différentiable. En particulier, on peut d'ores et déjà affirmer qu'une fonction au moins deux fois continument différentiable admet une série de Fourier absolument convergente et donc que $f \in C^2(\mathbb{T})$ est la limite uniforme de sa série de Fourier d'après le théorème précédent.

1.3 Convergence ponctuelle et uniforme

Le premier résultat que nous allons énoncer stipule que la suite de sommes partielles d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{T})$ converge en moyenne vers f . Pour cela on note $\sigma_n(f)$ cette suite

$$\sigma_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k$$

c'est la somme de Césaro des sommes partielles S_k , $k = 0, \dots, n-1$. Nous introduisons également les notations suivantes

Définition 1.8 (Noyaux de Dirichlet et de Féjer). Soit $n \in \mathbb{N}$, on appelle *noyau de Dirichlet* le polynôme trigonométrique suivant

$$D_n(x) := \sum_{k=-n}^n e^{ikx}$$

On appelle *noyau de Féjer* le polynôme trigonométrique suivant

$$F_n := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k$$

ce sont les sommes de Césaro des noyaux de Dirichlet.

Les propriétés suivantes s'obtiennent aisément par des calculs explicites, que nous laissons au lecteur.

Proposition 1.9. Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$. Alors³

$$S_n(f) = D_n \star f, \quad \sigma_n(f) = F_n \star f$$

et on a les propriétés suivantes

i) On a les formules suivantes

$$D_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{x}{2})} & si \quad x \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ 2n+1 & si \quad x \in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases}, \quad F_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} \left(\frac{\sin(\frac{nx}{2})}{\sin(\frac{x}{2})} \right)^2 & si \quad x \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ n & si \quad x \in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases}$$

ii) Le noyau de Féjer est positif et on a

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) dt = 1, \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(t) dt = 1 = \|F_n\|_{L^1(\mathbb{T})}$$

iii) Pour tout $0 < \delta < \pi$ on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\{|x| > \delta\} \cap (-\pi, \pi)} F_n(x) dx = 0$$

On a le résultat suivant

3. On rappelle que la convolution est donnée par la formule

$$f \star g(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} g(x-t)f(t)dt = g \star f(x)$$

Théorème 1.10 (Théorème de Féjer). *Soit $f \in C^0(\mathbb{T})$ alors*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\sigma_n(f) - f\|_{C^0(\mathbb{T})} = 0$$

On en déduit le théorème de Stone Weierstrass trigonométrique

Corollaire 1.11. *L'espace des fonctions trigonométriques est dense dans $C^0(\mathbb{T})$.*

Preuve du théorème 1.10. D'après la propriété de F_n dans ii) de la Proposition 1.9 on a pour tout $x \in \mathbb{T}$

$$\begin{aligned} |\sigma_n(f)(x) - f(x)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) F_n(t) dt - f(x) \right| \\ &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x)) F_n(t) dt \right| \end{aligned}$$

Comme f est continue et périodique, elle est uniformément continue⁴, ainsi pour $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \in \mathbb{R}$, $|t| < \delta \Rightarrow |f(x-t) - f(x)| < \varepsilon$. Ainsi on obtient pour tout $x \in \mathbb{T}$ en utilisant ii) et iii) de la Proposition 1.9

$$\begin{aligned} |\sigma_n(f)(x) - f(x)| &\leq \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{|t| \leq \delta} F_n(t) dt + \frac{\|f\|_{C^0(\mathbb{T})}}{\pi} \int_{(-\pi, \pi) \cap \{|t| > \delta\}} F_n(t) dt \\ &\leq \varepsilon + \frac{\|f\|_{C^0(\mathbb{T})}}{\pi} \int_{(-\pi, \pi) \cap \{|t| > \delta\}} F_n(t) dt \end{aligned}$$

On obtient en passant à la limite que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{T}} |\sigma_n(f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ et ceci pour tout $\varepsilon > 0$ ce qui permet de conclure. $\square$

Remarque 1.2. La convergence uniforme prouvée dans ce théorème ne dépend que des propriétés ii) et iii) de la Proposition 1.9 de la suite de noyaux $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$, c'est ce qu'on appelle une approximation de l'unité. Nous verrons cette notion plus en détails plus tard.

Nous allons à présent démontrer un résultat de convergence des séries de Fourier dans le cas de fonctions de classe C^1 par morceaux, remarquons que ces fonctions ne sont pas nécessairement continues et par conséquent, la convergence ne peut-être uniforme (en général). On a le résultat suivant

Théorème 1.12 (Théorème de Dirichlet). *Soit f une fonction 2π -périodique de classe C^1 par morceaux⁵. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f)(x) = \frac{f_+(x) + f_-(x)}{2}$$

où $f_{\pm}(x)$ sont les limites à droite et à gauche de x .

Remarque 1.3. Si de plus f est continue, alors la convergence est uniforme et même normale, voir Section 1.5.

4. à montrer en exercice

5. On rappelle qu'une fonction est de classe C^1 par morceaux s'il existe une subdivision telle que f restreinte à chacun des intervalles est de classe C^1 et f et f' admettent des limites à gauche et à droite des extrémités de ces intervalles

Démonstration. L'idée est d'utiliser i) et ii) de la Proposition 1.9 et le fait que D_n soit une fonction paire pour écrire

$$\begin{aligned}
S_n(f)(x) - f(x) &= D_n \star f(x) - \frac{f_+(x) + f_-(x)}{2} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) f(x-t) dt - \frac{f_+(x) + f_-(x)}{2} \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{\pi} D_n(t) f(x-t) dt + \int_{-\pi}^0 D_n(t) f(x-t) dt \right) - \frac{f_+(x) + f_-(x)}{2} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} D_n(t) (f(x-t) + f(x+t)) dt - \frac{f_+(x) + f_-(x)}{2} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} D_n(t) (f(x-t) - f_-(x)) D_n(t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} D_n(t) (f(x+t) - f_+(x)) D_n(t) dt
\end{aligned}$$

Il suffit alors de montrer que chacun des deux termes convergent vers 0. En utilisant la formule explicite de D_n , voir ii) de la Proposition 1.9, on a

$$\int_0^{\pi} D_n(t) (f(x-t) - f_-(x)) D_n(t) dt = \int_0^{\pi} \sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) t \right) \cdot \frac{t}{\sin \left(\frac{t}{2} \right)} \frac{f(x-t) - f_-(x)}{t} dt$$

on conclut en utilisant (une variante) du lemme (1.5) de Riemann-Lebesgue appliqué à la fonction $x \mapsto \frac{t}{\sin \left(\frac{t}{2} \right)} \frac{f(x-t) - f_-(x)}{t}$ qui est bien intégrable. $\square$

D'après la preuve, on remarque que la propriété de convergence en un point x ne dépend que du comportement de f au voisinage de x , il est donc assez naturel d'établir le résultat général suivant

Théorème 1.13 (Théorème de Dini). *Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$ telle qu'en un point $x \in \mathbb{R}$ on ait*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{f(x-t) + f(x+t) - 2f(x)}{t} \right| dt < +\infty$$

Alors $S_n(f)(x)$ converge vers $f(x)$.

Ainsi donc, ce résultat s'applique en particulier aux fonctions hölderiennes.

1.4 Cadre L^2 et interprétation géométrique des séries de Fourier

Pour finir, on s'intéresse au cadre $L^2(\mathbb{T})$ qui est plus confortable puisque la question de savoir si $f \in L^2(\mathbb{T})$ admet une série de Fourier convergente (au sens L^2) et qui coïncide avec f revient à montrer que la famille de fonctions $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ données par $e_n : x \mapsto e^{inx}$ est une base hilbertienne pour $L^2(\mathbb{T})$. En effet, il suffit de remarquer que

$$\hat{f}(k) = (f, e_k), \quad k \in \mathbb{Z}$$

Grâce au travail préliminaire de la section précédente, il est facile d'établir le résultat

Théorème 1.14. *$(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$ càd que c'est une base orthonormée de $L^2(\mathbb{T})$ et tout élément $f \in L^2(\mathbb{T})$ s'écrit comme*

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (f, e_n) e_n$$

autrement dit la suite des sommes partielles

$$S_n(f) = \sum_{k=-n}^n \hat{f}(k) e^{ikx}$$

satisfait

$$\|S_n - f\|_{L^2(\mathbb{T})} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Démonstration. Soient $p, q \in \mathbb{Z}$, un calcul direct montre que

$$(e_q, e_p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{it(q-p)} dt = \begin{cases} 1 & \text{si } p = q \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Enfin pour montrer que $\text{vect}\{e_n, n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $L^2(\mathbb{T})$ il suffit d'utiliser le Corollaire 1.11 qui affirme que les fonctions trigonométriques sont denses dans les fonctions continues pour la norme uniforme et donc pour la norme L^2 . On conclut que $\text{vect}(e_n, n \in \mathbb{Z}) = L^2(\mathbb{T})$ grâce au fait que les fonctions continues sont denses dans $L^2(\mathbb{T})$. $\square$

Grâce au fait que la famille $(e_n)_n$ soit une base hilbertienne, on en déduit rapidement les formules suivantes

Corollaire 1.15 (Formules de Parseval et de Plancherel). *Pour tous $f, g \in L^2(\mathbb{T})$ on a*

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |(f, e_n)|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{g(t)} dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) \overline{\hat{g}(n)}$$

Remarque 1.4. • Nous insistons sur le fait que la convergence dans le théorème 1.14 est au sens L^2 et n'est donc pas une convergence ponctuelle, nous rappelons toutefois que ceci permet d'extraire une sous-suite de $(S_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ qui converge presque partout vers f .

- Si on note T_n le sous espace vectoriel de $L^2(\mathbb{T})$ défini par

$$T_n = \text{Vect}(e_k, |k| \leq n)$$

qui est de dimension finie et donc fermé, on a l'interprétation suivante

Proposition 1.16. *Soit $f \in L^2(\mathbb{T})$ alors $S_n(f)$ est la projection orthogonale de f sur T_n .*

1.5 Quelques résultats de convergence plus généraux

Nous terminons cette section par énoncer des résultats de convergence plus généraux.

Nous commençons par énoncer une version plus générale du théorème 1.10 qui peut se prouver directement en utilisant les propriétés du noyau de Féjer.

Théorème 1.17. *Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$ et $x \in \mathbb{T}$ tel que f admette une limite à gauche $f_-(x)$ et une limite à droite $f_+(x)$ en x alors*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(f) = \frac{f_+(x) + f_-(x)}{2}$$

La convergence simple du théorème de Dirichlet 1.12 peut devenir uniforme dès lors que f est continue :

Théorème 1.18 (Théorème de convergence normale de Dirichlet). *Soit f 2π -périodique et de classe C^1 par morceaux. Si f est continue alors $(S_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ converge normalement (et donc uniformément) vers f .*

En effet cela découle du fait que les fonctions C^1 par morceaux ont une dérivée bornée et donc $L^2(\mathbb{T})$, ce qui assure que $\sum_{k \in \mathbb{Z}} k^2 |\hat{f}(k)|^2 < +\infty$. On conclut grâce au théorème 1 puisque

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(k)| \leq \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|^2 k^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} < +\infty$$

1.5.1 Fonctions à variation bornée

Le résultat de convergence simple de la série de Fourier reste vrai dans le cas de fonctions à variation bornée définies comme suit : f - 2π périodique est à variation bornée si

$$BV(f) := \sup \left\{ \sum_{j=1}^L |f(x_j) - f(x_{j-1})|; \quad L \in \mathbb{N}^*, -\pi \leq x_0 < x_1 < \dots < x_L \leq \pi \right\}$$

Plusieurs exemples de ce genre de fonctions

- Les fonctions de classe C^1 sont à variation bornée
- Les fonctions Lipschitziennes sont à variation bornée.
- Les fonctions Holdériennes ne sont pas à variation bornée en général !
Contre-exemple : considérer la fonction

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- Les fonctions monotones sont à variation bornées.

On a plus précisément les propriétés suivantes

Proposition 1.19. *Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$. Alors*

- i) *f est à variation bornée ssi f est la différence de deux fonctions croissantes.*
- ii) *Si f est à variation bornée alors elle est réglée⁶ et elle admet une limite à gauche et à droite en tout point.*
- iii) *Si de plus, f est continue par morceaux, alors pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$ on a*

$$|c_n(f)| \leq \frac{BV(f)}{2n}$$

Exemple 1.20. La fonction $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \cos(n^3 x)$ est continue mais pas à variation bornée.

On a le résultat

Théorème 1.21. *Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$ à variation bornée au voisinage d'un point $x \in \mathbb{T}$ alors*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f)(x) = \frac{f_+(x) - f_-(x)}{2}$$

Nous referons à [1, Section 10.1] pour une preuve de ce résultat.

6. Une fonction réglée est une fonction qui est la limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier.

2 Transformée de Fourier

Le poly ci-dessous s'inspire de l'excellent poly de David Gérard-Varet [3] disponible en ligne ainsi que du livre [2]. Avant d'entamer ce chapitre nous rappelons ci-dessous certaines propriétés qui seront utiles pour la suite.

2.1 Pré-requis et notations :

Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Pour $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ et $y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$ on notera le produit scalaire comme suit

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^d x_i y_i$$

la norme euclidienne par $|x|^2 = x \cdot x$.

on notera ∂_{x_i} la dérivée partielle par rapport à x_i , $i = 1, \dots, d$ et pour $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$ on note

$$\partial^\alpha f = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_d}^{\alpha_d} f$$

Pour une fonction $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ on note $\nabla g(x) \in \mathbb{R}^d$ définit par

$$\nabla g(x) = (\partial_{x_i} g)_{i=1, \dots, d}$$

Nous utiliserons les notations suivantes lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté sur l'espace de définition

$$\|\cdot\|_p = \|\cdot\|_{L^p}$$

2.1.1 Convolution et approximation de l'unité

Nous rappelons ici une notion cruciale qui a été partiellement évoquée dans la première partie de ce cours. Rappelons d'abord la notion de convolution dans le cadre $\mathbb{R}^d$.

Définition 2.1 (Convolution). Soient $f, g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions mesurable. On définit pour $x \in \mathbb{R}^d$ l'intégrale suivante

$$f \star g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy$$

Cet objet est défini sur l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^d, y \mapsto |f(x-y)g(y)| \text{ est intégrable}\}$ qui est un borélien⁷, de plus si $f \star g(x)$ est défini alors $g \star f(x)$ l'est aussi et on a égalité $f \star g(x) = g \star f(x)$.

La proposition suivante donne des conditions suffisantes pour que la convolution soit bien définie.

Proposition 2.2. Soient $p, q, r \in [1, +\infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$ alors $f \star g$ est bien défini et on a $f \star g \in L^r(\mathbb{R}^d)$.

Définition 2.3 (Approximation de l'unité). Une approximation de l'unité est une suite $(\rho_n)_n$ de fonctions dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ qui satisfait les propriétés suivantes

- i) $\rho_n \geq 0$ presque partout, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- ii) $\|\rho_n\|_1 = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- iii) $\forall \eta > 0, \int_{|x|>\eta} \rho_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

7. en effet $\{x \in \mathbb{R}^d, y \mapsto |f(x-y)g(y)| \text{ est intégrable}\} = \varphi^{-1}([0, +\infty])$ avec $\varphi : x \mapsto \int |f(x-y)g(y)|dy$ mesurable.

Exemple 2.4. Si $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\rho \geq 0$ et $\int_{\mathbb{R}^d} \rho = 1$ alors

$$\rho_n(x) = n^d \rho(nx)$$

est une approximation de l'unité.

On a le résultat suivant

Théorème 2.5. Soit $p \geq 1$ fini, $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $(\rho_n)_n$ une approximation de l'unité, alors

$$\|\rho_n \star f - f\|_p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

En tronquant f càd en considérant $f1_{B(0,n)}$ et en convolant par une approximation de l'unité on obtient une suite de fonctions infiniment dérivables et à support compact permettant d'aboutir au résultat suivant

Corollaire 2.6. $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ pour tout $p \geq 1$ fini.

La preuve du Théorème 2.5 repose sur la notion de continuité de l'application translation $\mathcal{T}_h f = f(\cdot + h)$, plus précisément on a

Lemme 2.7. Soit $p \geq 1$ alors pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ on a

$$\|\mathcal{T}_h f - f\|_p \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

Démonstration. L'idée est de montrer le résultat pour n'importe quelle fonction étagée 1_A , A borélien et d'utiliser la densité des fonctions étagées dans L^p et le fait que $\mathcal{T}_h : L^p \rightarrow L^p$ soit une isométrie. $\square$

Preuve du Théorème 2.5. Soit ρ et ρ_n comme dans l'exemple précédent. On a pour tout $x \in \mathbb{R}^d$

$$|f \star \rho_n(x) - f(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} (f(x-y) - f(x)) \rho_n(y) dy \right|$$

Par l'inégalité de Minkowski on obtient

$$\begin{aligned} \|f \star \rho_n - f\|_p &= \left(\int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} (f(x-y) - f(x)) \rho_n(y) dy \right|^p dx \right)^{1/p} \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \|f(\cdot - y) - f\|_p |\rho_n(y)| dy \end{aligned}$$

or par le lemme 2.7 pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que $\|f(\cdot - y) - f\|_p \leq \varepsilon$ pour tout $|y| < \eta$ ainsi on découpe l'intégrale comme suit

$$\begin{aligned} \|f \star \rho_n - f\|_p &\leq \int_{|y| \geq \eta} \|f(\cdot - y) - f\|_p \rho_n(y) dy + \int_{|y| < \eta} \|f(\cdot - y) - f\|_p \rho_n(y) dy \\ &\leq 2\|f\|_p \int_{|y| \geq \eta} |\rho_n(y)| dy + \varepsilon \end{aligned}$$

on conclut grâce à la dernière propriété iii) de la définition 2.3 de la suite $(\rho_n)_n$ qui donne $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{|y| \geq \eta} |\rho_n(y)| dy = 0$ et ce pour tout $\varepsilon > 0$. $\square$

2.2 Définition et premières propriétés

Définition 2.8 (Transformée de Fourier dans $\mathbb{R}^d$). Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, à valeurs dans $\mathbb{C}$. La transformée de Fourier de f notée $\hat{f}$ ou $\mathcal{F}f$ est la fonction définie de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{C}$ par⁸

$$\mathcal{F}f(\xi) = \hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx$$

Comme $|e^{ix \cdot \xi}| = 1$, cette intégrale est bien définie ssi $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

Proposition 2.9. Pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$, la fonction $\hat{f}$ est bien définie, continue, bornée avec

$$\|\hat{f}\|_{\infty} \leq \|f\|_1$$

elle satisfait de plus la propriété de Riemann-Lebesgue

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \hat{f}(\xi) = 0$$

Exemple 2.10. • Pour $d = 1$, $f(x) = e^{-a|x|}$ on a $\hat{f}(\xi) = \frac{2a}{a^2 + \xi^2}$.

- pour $d = 1$, $a < b$ et $f(x) = 1_{[a,b]}$ on a

$$\hat{f}(\xi) = \begin{cases} 2 \frac{\sin(\frac{b-a}{2}\xi)}{\xi} e^{-i\frac{b+a}{2}\xi} & \text{si } \xi \neq 0 \\ b - a & \text{si } \xi = 0 \end{cases}$$

- *Transformée de Fourier de la Gaussienne* : Soit f donnée par $f(x) = e^{-a|x|^2}$, $a > 0$. Montrer que

$$\hat{f}(\xi) = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{d/2} e^{-\frac{|\xi|^2}{4a}}$$

Remarquons qu'en général $\hat{f}$ n'est pas dans L^1 lorsque $f \in L^1$.

Preuve de la Proposition 2.9. La continuité se prouve grâce au théorème de continuité sous le signe intégrale et la majoration

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |e^{-ix \cdot \xi} f(x)| dx = \|f\|_1$$

Pour la propriété de Riemann-Lebesgue, il suffit de raisonner de manière analogue à la preuve du Lemme 1.5 càd en utilisant la densité de $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ dans $L^1(\mathbb{R}^d)$. Soit $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, on remarque que pour $\xi \neq 0$ on a

$$e^{-ix \cdot \xi} = \frac{1}{-i|\xi|^2} \xi \cdot \nabla_x e^{-ix \cdot \xi}$$

ainsi pour $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ on trouve par IPP

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx \right| &= \left| \frac{1}{i|\xi|^2} \int_{\mathbb{R}^d} \xi \cdot \nabla f(x) e^{-ix \cdot \xi} dx \right| \\ &\leq \frac{1}{|\xi|} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla f(x)| dx \xrightarrow{|\xi| \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

□

8. On peut trouver dans la littérature une définition faisant intervenir 2π dans la phase ou dans l'intégrale.

Nous rassemblons ci-dessous quelques propriétés de la transformée de Fourier dont la preuve est laissée en exercice

Proposition 2.11 (Quelques propriétés). *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$*

i) **Fourier et translation** : *Soit $h \in \mathbb{R}^d$ et $\mathcal{T}_h$ l'opérateur de translation $\mathcal{T}_h f(x) = f(x + h)$. Alors*

$$\mathcal{F}(\mathcal{T}_h f)(\xi) = e^{ih \cdot \xi} \mathcal{F}f(\xi)$$

ii) **Fourier et homothétie** : *Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $\mathcal{H}_\lambda$ l'opérateur d'homothétie $\mathcal{H}_\lambda f(x) = f(\lambda x)$. Alors*

$$\mathcal{F}(\mathcal{H}_\lambda f)(\xi) = \frac{1}{\lambda^d} \mathcal{H}_{\frac{1}{\lambda}} \mathcal{F}f(\xi)$$

iii) **Fourier et multiplication** : *Si $x_j f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ pour tout $j = 1, \dots, n$ alors $\mathcal{F}f \in C^1(\mathbb{R}^d)$ et*

$$\partial_{\xi_j} \mathcal{F}f = -i \mathcal{F}(x_j f)$$

iv) **Fourier et dérivation** : *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap C^1(\mathbb{R}^d)$ et $\partial_{x_j} f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ alors*

$$\mathcal{F}(\partial_{x_j} f)(\xi) = i \xi_j \mathcal{F}f(\xi)$$

v) **Fourier et parité** : *Si f est paire (resp. impaire) alors $\hat{f}$ est paire (resp. impaire)*

On en déduit le résultat suivant qui découle du fait que $x_j^k f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ pour tout $j = 1, \dots, d$ et tout $k \in \mathbb{N}$ dès lors que f est à support compact.

Corollaire 2.12. *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ est à support compact alors $\hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$*

Une autre propriété notable qui découle directement de Fubini est la propriété suivante

Proposition 2.13. *Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Alors $\hat{f}g, \hat{g}f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et on a*

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(t) \hat{g}(t) dt = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(t) g(t) dt$$

L'intérêt de la transformée de Fourier est de traduire des propriétés de régularité sur l'espace physique en des propriétés algébriques (multiplication par des monômes) sur l'espace spectral (en ξ), de plus on a une formule permettant de recouvrir la fonction initiale connaissant sa transformée de Fourier sous certaines hypothèses. Ainsi, la puissance de cet outil réside dans le fait de pouvoir raisonner sur l'espace spectral pour récupérer des informations sur l'espace physique grâce à la formule d'inversion.

Théorème 2.14 (Formule d'inversion de Fourier). *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$*

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix \cdot \xi} \hat{f}(\xi) d\xi$$

Démonstration. On cherche à montrer la formule suivante

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(x-y) \cdot \xi} f(y) dy d\xi$$

On souhaite utiliser Fubini mais la fonction n'est pas intégrable dans $L^1_{(y,\xi)}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$. On introduit la régularisation gaussienne suivante pour $\varepsilon > 0$

$$I_\varepsilon(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(x-y) \cdot \xi} e^{-\varepsilon^2 \frac{|\xi|^2}{4}} f(y) dy d\xi$$

En intégrant d'abord par rapport à y ensuite en ξ on trouve

$$I_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^d} g_\varepsilon(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi$$

avec $g_\varepsilon(\xi) = \hat{f}(\xi) e^{-\varepsilon^2 \frac{|\xi|^2}{4}}$. On a $g_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \hat{f}$ presque partout et $|g_\varepsilon(\xi)| \leq |\hat{f}(\xi)|$ intégrable donc par convergence dominée, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$

$$I_\varepsilon(x) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi$$

D'autre part, en appliquant Fubini à I_ε et en rappelant que la transformée de Fourier d'une gaussienne et une gaussienne

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \mathcal{F}(G_\varepsilon)(z) = \frac{1}{(2\pi)^d} \mathcal{F}\left(t \mapsto e^{-\varepsilon^2 |t|^2/4}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}}\right)^d e^{-|z|^2/\varepsilon^2}$$

on trouve

$$\begin{aligned} I_\varepsilon(x) &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}(G_\varepsilon)(x-y) f(y) dy \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}}\right)^d \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|x-y|^2/\varepsilon^2} f(y) dy \\ &= \rho_\varepsilon \star f \end{aligned}$$

avec $\rho_\varepsilon(z) = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}}\right)^d e^{-|z|^2/\varepsilon^2}$ qui est une approximation de l'unité, on a donc d'après le théorème 2.5 que $I_\varepsilon \rightarrow f$ dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ et donc on obtient l'égalité presque partout entre f et $x \mapsto \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi$. $\square$

On en déduit l'injectivité de la transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^d)$.

Corollaire 2.15. *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $\hat{f} = 0$ alors $f = 0$ pp.*

2.3 Transformée de Fourier dans l'espace de Schwartz

Nous avons vu dans la partie précédente qu'il est nécessaire de restreindre le choix des fonctions dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ pour pouvoir utiliser la différentiation ou la transformée inverse. Dans cette partie nous introduisons un sous-espace de $L^1(\mathbb{R}^d)$ qui soit invariant par la transformée de Fourier, la dérivation et la multiplication par des monômes.

Définition 2.16 (Espace de Schwartz).

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}), \forall \alpha \in \mathbb{N}^d, \forall m \in \mathbb{N}, \sup_{x \in \mathbb{R}^d} (1 + |x|^2)^m |\partial^\alpha f(x)| < \infty \right\}$$

L'espace de Schwartz est appelé espace à décroissance rapide. En effet, toute fonction dans cet espace décroît plus vite que n'importe quel polynôme lorsque $|x| \rightarrow \infty$.

Exemple 2.17. $x \mapsto e^{-\sqrt{|x|^2+1}} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $x \mapsto e^{-x} \notin \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $x \mapsto \frac{1}{1+|x|^2} \notin \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Remarque 2.1. Nous avons les propriétés suivantes

- **Invariance par multiplication par des monômes :** $\forall k \in \mathbb{N}, \forall j^1, \dots, d, \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), x_j^k f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.
- **Invariance par dérivation :** $\forall \alpha \in \mathbb{N}^d, \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \partial^\alpha f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

- $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^p(\mathbb{R}^d)$, $\forall p \in (1, +\infty]$.

Théorème 2.18. *La transformée de Fourier $\mathcal{F}$ envoie $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans lui même et $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est une bijection.*

Démonstration. On rappelle que pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et tout $j = 1, \dots, d$, on a $\partial_{x_j} f, |x_j|f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^1(\mathbb{R}^d)$. En utilisant donc les propriétés de la Proposition 2.11 ainsi que Proposition 2.9 on a que $|\partial_{\xi_j} \mathcal{F}| = |\mathcal{F}(x \mapsto x_j f)| \in C(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$, et de même pour $|\xi_j \mathcal{F}| = |\mathcal{F}(\partial_{x_j} f)| \in C(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$, ainsi en réitérant aux dérivées successives on obtient que $\hat{f}$ est à décroissance rapide. L'injectivité de l'application provient du Corollaire 2.15. Pour la surjectivité, il suffit d'appliquer le théorème d'inversion. En effet soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, il s'agit de trouver $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ tel que $\hat{g} = f$, il suffit de prendre $g(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^d \hat{f}(-x)$ et on a $\hat{g} = f$. $\square$

Nous terminons cette section par la fameuse formule de Plancherel-Parseval

Proposition 2.19. *Soient $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Alors*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} d\xi = (2\pi)^d \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \overline{g(x)} dx$$

on en déduit la formule de Parseval

$$(2\pi)^d \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 = \|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2$$

Démonstration. La preuve découle directement de Proposition 2.13 et de la formule d'inversion de Fourier, en effet pour $h(\xi) = \overline{\hat{g}(\xi)}$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) h(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \hat{h}(x) dx$$

or par la formule d'inversion de Fourier

$$\hat{h}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix \cdot \xi} h(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix \cdot \xi} \overline{\hat{g}(x)} dx = \overline{\int_{\mathbb{R}^d} e^{ix \cdot \xi} \hat{g}(x) dx} = (2\pi)^d \overline{g(\xi)}$$

d'où le résultat en remplaçant h et $\hat{h}$ en fonction de g et $\hat{g}$. $\square$

2.4 Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R}^d)$

Dans le traitement du signal, $L^2(\mathbb{R})$ modélise l'espace des signaux comme fonctions de la variable de temps et ayant une énergie finie. Pour l'instant, nous avons défini la transformée de Fourier uniquement sur $L^1(\mathbb{R}^d)$, le but ici est d'étendre cette définition à $L^2(\mathbb{R}^d)$ en utilisant l'espace de Schwartz. En effet, comme ce dernier contient l'espace des fonctions $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ alors

Proposition 2.20. *$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^d)$.*

Ainsi, comme l'application $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est continue d'après la formule de Parseval, on peut la prolonger, de manière unique, par densité à une application $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$ tout en gardant les propriétés déjà vues lorsqu'elles font sens dans L^2 .

Proposition 2.21. *L'application $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ se prolonge de manière unique à une application bijective $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$ qui vérifie les propriétés suivantes*

- Si $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ alors il existe une suite de fonctions $f_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^1 \cap L^2$ telles que $f_n \rightarrow f$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ et

$$\mathcal{F}(f) := \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{f}_n \text{ dans } L^2(\mathbb{R}^d)$$

et $\mathcal{F}f$ ne dépend pas du choix de la suite $(f_n)_n$. En particulier on a

$$\mathcal{F}(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{|x| \leq n} e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx \text{ dans } L^2(\mathbb{R}^d)$$

La transformée de Fourier définie sur $L^1(\mathbb{R}^d)$ (qu'on note $\hat{f}$ et celle définie sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ par extension (qu'on note $\mathcal{F}(f)$) coïncident sur $L^2 \cap L^1$.

- Formule de Plancherel et de Parseval : pour tous $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}(f)(\xi) \overline{\mathcal{F}(g)(\xi)} d\xi = (2\pi)^d \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \overline{g(x)} dx, \quad \|\mathcal{F}(f)\|_2^2 = (2\pi)^d \|f\|_2^2$$

- $\mathcal{F}^{-1} = (2\pi)^{-d} \check{\mathcal{F}}$ où $\check{f}(x) = f(-x)$.

2.5 Transformée de Fourier et convolution

D'après Proposition 2.2, on peut donner un sens à la transformée de Fourier d'un produit de convolution $f \star g$ dès lors que les deux sont dans L^1 ou si l'une est dans L^1 et l'autre dans L^2 , en effet ce sont les conditions pour avoir $f \star g$ dans L^2 ou L^1 . On a le résultat suivant

Proposition 2.22. *La convolution définit une application bilinéaire de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et on a pour tout $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$*

$$\widehat{f \star g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$$

et cette égalité s'étend naturellement pour tous $f \in L^1$ et $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ou pour tous $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$

$$\mathcal{F}(f \star g) = \mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}g$$

Démonstration. Le fait que $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy$ est C^∞ et à décroissance rapide se prouve grâce aux propriétés de dérivation sous le signe intégrale et en remarquant que pour tout $j = 1, \dots, d$ et tout $p \in \mathbb{N}$

$$x_j^p (f \star g)(x) = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \int_{\mathbb{R}^d} (x_j - y_j)^{p-k} f(x-y) y_j^k g(y) dy = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \left(x \mapsto x_j^{p-k} f(x) \right) \star \left(x \mapsto x_j^k g(x) \right)$$

Grâce à Fubini et un changement de variables $z = x - y$ on a

$$\begin{aligned} \widehat{f \star g}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix \cdot \xi} f \star g(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix \cdot \xi} f(x-y) g(y) dy dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\xi \cdot y} g(y) \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\xi \cdot (x-y)} f(x-y) dx \right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\xi \cdot y} g(y) \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\xi \cdot z} f(z) dz \right) dy \\ &= \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi) \end{aligned}$$

□

2.6 Principe d'incertitude de Heisenberg

Dans le contexte d'étude des ondes, la transformée de Fourier est l'outil permettant de représenter un paquet d'ondes soit à travers leur intensité dans l'espace temps (selon la variable x) ou à travers leurs fréquences dans l'espace spectral (selon la variable ξ). Le passage de l'un à l'autre se calcule par une transformée de Fourier. Il s'avère que, mathématiquement, plus une de ces représentations est précise, plus l'autre — par transformée de Fourier — est imprécise. Pour $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ telle que f, xf et $\xi\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ on définit les quantités suivantes

$$\sigma_f^2 = \int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx \text{ (dissipation de l'énergie de } f \text{ dans l'espace temps)}$$

$$\sigma_{\hat{f}}^2 = \int_{\mathbb{R}} \xi^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \text{ (dissipation de l'énergie en fréquence)}$$

$$E_f = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \text{ énergie de } f$$

Proposition 2.23. *Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ telle que f, xf et $\xi\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$, alors*

$$\sigma_f \cdot \sigma_{\hat{f}} \geq \frac{E_f}{4\pi}$$

autrement dit on ne peut pas localiser un signal à la fois en espace et en fréquence

Démonstration. Par IPP on a

$$dx = \int f(x)x \cdot \nabla f(x) dx = \frac{1}{2} \int x \cdot \nabla |f|^2 = -\frac{d}{2} \int |f|^2$$

donc

$$\|f\|_2^2 \leq 2d^{-1} \|xf\|_2 \|\nabla f\|_2$$

$$\text{or } \|\nabla f\|_2 = (2\pi)^{-d} \|\xi|\mathcal{F}(f)\|_2^2. \quad \square$$

Ceci se traduit par la propriété suivante : la durée d'un signal et l'étalement de son spectre (ses fréquences) sont liés par une relation analogue à celle du principe d'incertitude.

On peut définir la transformée de Fourier pour les fonctions L^p pour $p \in [1, 2]$ par interpolation

Théorème 2.24 (Hausdorff-Young). *Soit $p \in [1, 2]$ et $q = p'$. Alors on peut définir $\mathcal{F}$ par densité de $L^1 \cap L^p$ dans L^p et on a $\mathcal{F} : L^p \rightarrow L^q$ continue et $\|\mathcal{F}\|_{p \rightarrow q} \leq (2\pi)^{-d/q}$*

Démonstration. Par Riesz Thorin⁹ puisque $\|\mathcal{F}\|_{1 \rightarrow \infty} \leq 1$ et $\|\mathcal{F}\|_{2 \rightarrow 2} = (2\pi)^{-d/2}$. $\square$

3 Un aperçu de la théorie des distributions tempérées

Il est difficile d'introduire l'analyse de Fourier sans mentionner la contribution majeure de Laurent Schwartz, [5], qui a introduit en 1947 la théorie des distributions. Celle-ci constitue aujourd'hui un outil fondamental de l'analyse moderne et fournit notamment un cadre naturel pour l'étude des équations aux dérivées partielles, dont la théorie s'est développée de manière considérable au cours de la seconde moitié du XX^e siècle.

Nous proposons dans la suite de fournir un aperçu très bref de cette théorie en parlant des distributions tempérées, la notion de distribution sera vue plus en détails dans la suite du cursus.

9. Si $T : L^{p_0} \rightarrow L^{q_0}$ et $T : L^{p_1} \rightarrow L^{q_1}$ continue alors $T : L^p \rightarrow L^q$ est continue pour $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$ et $\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$ et $\|T\|_{p \rightarrow q} \leq \|T\|_{p_0 \rightarrow q_0}^{1-\theta} \|T\|_{p_1 \rightarrow q_1}^{\theta}$.

On munit l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ de la famille de normes

$$\|f\|_k = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \sum_{|\alpha| \leq k} (1 + |x|^2)^k |\partial^\alpha f(x)|, \quad k \in \mathbb{N}$$

A partir de cette famille on peut définir une distance

$$d_{\mathcal{S}}(f, g) := \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^k} \min(1, \|f - g\|_k)$$

On peut vérifier que cela définit une distance et que

$$d_{\mathcal{S}}(f_n, f) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Leftrightarrow \|f_n - f\|_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

de plus $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^d), d_{\mathcal{S}})$ est un espace métrique complet.

Définition 3.1 (Distributions tempérées). On appelle distribution tempérée une forme linéaire continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. L'espace des distributions tempérées est noté $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et pour tout $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ on note $\langle u, \varphi \rangle$ le scalaire $u(\varphi)$. Dans ce contexte là, φ est souvent appelée fonction test.

On a la caractérisation suivante

Proposition 3.2. Une forme linéaire T sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est une distribution tempérée ssi il existe une constante $C > 0$ et $k \geq 0$ tels que

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \sup_{x \in \mathbb{R}^d, |\alpha| \leq k} (1 + |x|^2)^k |\partial^\alpha \varphi(x)|$$

Exemple 3.3. • Toute fonction f mesurable telle qu'il existe $q \in \mathbb{R}$ pour lequel $\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| (1 + |x|^2)^{-q} dx < +\infty$ définit une distribution tempérée à travers la forme linéaire suivante

$$T_f : \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f \varphi$$

c'est une application continue puisque en prenant $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geq \max(0, q)$ on trouve

$$|\langle T_f, \varphi \rangle| \leq \left(\sup_{x \in \mathbb{R}^d} (1 + |x|^2)^k |\varphi(x)| \right) \left(\int_{\mathbb{R}^d} (1 + |x|^2)^{-q} |f(x)| dx \right)$$

ainsi cela est vrai pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $p \in [1, +\infty]$ ou encore pour l'ensemble des fonctions continues à croissance au plus polynomiale par exemple.

De plus, l'application $T : f \mapsto T_f$ est injective sur chacun de ces espaces :

$$T_f = 0 \text{ ssi } f = 0 \text{ pp}$$

On peut donc identifier l'espace L^p à un sous-espace de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration. Par exemple si $f \in L^p$, $p > 1$: si pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ on ait $\int f \varphi = 0$ alors par densité de $C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans $L^{p'}(\mathbb{R}^d)$ on trouve que $\int f \varphi = 0$ pour tout $\varphi \in L^{p'}$ et donc $f = 0$ pp. $\square$

Remarque : Par abus de notation, on confond f avec la forme linéaire T_f et on écrit $\langle f, \varphi \rangle$ pour $\langle T_f, \varphi \rangle$.

- La masse de Dirac δ_0 est la forme linéaire suivante

$$\langle \delta_0, \varphi \rangle := \varphi(0)$$

elle définit également une distribution tempérée. On laisse en exercice au lecteur de montrer que δ_0 n'est associée à une fonction i.e. il n'existe aucune fonction f telle que $\delta_0 = T_f$.

La notion de distribution (tempérée) permet d'identifier une fonction f à T_f càd à la donnée des $\left(\int_{\mathbb{R}^d} f \varphi \right)_{\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)}$. Lorsque $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable, on a naturellement la relation suivante

$$\int_{\mathbb{R}} f' \varphi = - \int_{\mathbb{R}} f \varphi'$$

cependant, le terme de droite permet toujours de définir une distribution (tempérée) et on l'appelle dérivée de f au sens des distributions

Définition 3.4 (Dérivée d'une distribution tempérée). Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, on définit la distribution dérivée $\partial^\alpha T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ pour $\alpha \in \mathbb{N}^d$ comme suit

$$\langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle$$

Cette définition est choisie de manière à coïncider avec la dérivée usuelle lorsque c'est possible. Il est facile d'établir le résultat suivant

Proposition 3.5 (Distributions tempérées et dérivation). Soit $f \in C^k(\mathbb{R}^d)$ tel que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\alpha| \leq k$ on ait $\partial^\alpha f$ définissent des distributions (par exemple si elles sont dans des espaces L^p , pas forcément de même indice) alors on a

$$\partial^\alpha T_f = T_{\partial^\alpha f}$$

autrement dit, la dérivée au sens des distributions d'une fonction f coïncide avec sa dérivée usuelle lorsque cette dernière existe.

Exemple 3.6. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}^+$ et sur $\mathbb{R}^-$ et telle que f et f' permettent de définir des distributions tempérées. Montrer que

$$T'_f = T_{f'} + (f_+(0) - f_-(0))\delta_0$$

on note souvent $\llbracket f \rrbracket = f_+(0) - f_-(0)$ et on l'appelle le saut de f à travers le point de discontinuité 0.

Dans le même esprit, on peut définir le produit d'une distribution tempérée par une fonction, sous certaines hypothèses :

Proposition 3.7 (Distributions tempérées et produit). Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que $f\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ alors on note fT par

$$\langle fT, \varphi \rangle := \langle T, f\varphi \rangle$$

qui définit une distribution tempérée.

Avec le même raisonnement, on rappelle la formule de dualité

$$\int_{\mathbb{R}^d} f \hat{\varphi} = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f} \varphi$$

ceci permet de définir

Définition 3.8 (Transformée de Fourier sur l'espace des distributions tempérées). pour tout $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ on définit $\hat{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ comme suit

$$\langle \hat{T}, \varphi \rangle := \langle T, \hat{\varphi} \rangle$$

L'intérêt est que cette définition permet d'assurer les propriétés classiques de la transformée de Fourier

Proposition 3.9.

- i) L'application $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ est un isomorphisme.
- ii) La réciproque est donnée pour tout $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ par

$$\langle \mathcal{F}^{-1}T, \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}^{-1}\varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$$

et on a

$$T = \frac{1}{(2\pi)^d} (\mathcal{F} \circ \mathcal{F}T)(-\cdot)$$

où $\langle T(-\cdot), \varphi \rangle = \langle T, \varphi(-\cdot) \rangle$ avec $\varphi(-\cdot)$ est la fonction $x \mapsto \varphi(-x)$.

- iii) $\mathcal{F}(T_f) = T_{\mathcal{F}f}$ lorsque les deux termes ont un sens, par exemple si $f \in L^1$ ou $f \in L^2$.
- iv) pour tout $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $f \in \mathbb{R}^d$, $\mathcal{F}(\mathcal{T}_h u) = e^{i\xi h} \mathcal{F}u$.
- v) pour tout $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et tout $j = 1, \dots, d$, $\partial_{\xi_j} \mathcal{F}u = -i\mathcal{F}(x_j u)$

Démonstration. On rappelle que $\varphi = \frac{1}{(2\pi)^d} \hat{\varphi}(-x)$ pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ d'où

$$\langle T, \varphi \rangle = \frac{1}{(2\pi)^d} \langle T, \hat{\varphi}(-\cdot) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^d} \langle T, \widehat{\widehat{\varphi(-\cdot)}} \rangle = \frac{1}{(2\pi)^d} \langle \hat{T}(-\cdot), \varphi \rangle$$

Le reste se prouve assez facilement. □

Exemple 3.10. • Étudions la transformée de Fourier de 1 vue comme une distribution tempérée. On a pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$\langle \mathcal{F}(1), \varphi \rangle = \langle 1, \hat{\varphi} \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\varphi}(\xi) d\xi = (2\pi)^d \varphi(0)$$

qui est obtenue via la formule d'inversion de Fourier. Ainsi $\hat{1} = (2\pi)^d \delta_0$ et inversement

$$\langle \hat{\delta}_0, \varphi \rangle = \langle \delta_0, \hat{\varphi} \rangle = \langle 1, \varphi \rangle$$

donc $\hat{\delta}_0 = 1$.

- Plus généralement

$$\widehat{x \mapsto e^{ixn}} = 2\pi \delta_n \text{ dans } \mathcal{S}'(\mathbb{R})$$

et inversement

$$\hat{\delta}_n = [x \mapsto e^{-ixn}] \text{ dans } \mathcal{S}'(\mathbb{R})$$

On peut définir la convolution d'une distribution tempérée avec une fonction à décroissance rapide.

Proposition 3.11 (Distribution tempérées et convolution, cadre $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \star \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$). Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. On définit $T \star \varphi$ comme la fonction suivante

$$T \star \varphi(x) = \langle T, \varphi(x - \cdot) \rangle$$

on vérifie que cela définit une fonction de classe $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ et on a

$$\partial^\alpha (T \star \varphi)(x) = \langle T, \partial^\alpha \varphi(x - \cdot) \rangle = \langle \partial^\alpha T, \varphi(x - \cdot) \rangle$$

Démonstration. En prenant e_i dans la base canonique de $\mathbb{R}^d$ pour $i = 1, \dots, d$ on a pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et $h \in \mathbb{R}^*$

$$\frac{\langle T, \varphi(x + he_i - \cdot) \rangle - \langle T, \varphi(x - \cdot) \rangle}{h} = \left\langle T, \frac{\varphi(x + he_i - \cdot) - \varphi(x - \cdot)}{h} \right\rangle \rightarrow \langle T, \partial_{x_i} \varphi(x - \cdot) \rangle$$

par continuité de l'application T . On peut reproduire l'argument pour les dérivées supérieures et on a donc $\partial^\alpha (T \star \varphi) = T \star (\partial^\alpha \varphi)$. De plus, comme $\partial_{x_i}(x \mapsto \varphi(x - y)) = -\partial_{y_i}(y \mapsto \varphi(x - \cdot))$ on en déduit

$$\partial_{x_i} \langle T, \varphi(x - \cdot) \rangle = \langle T, \partial_{x_i}(\varphi(x - \cdot)) \rangle = -\langle T, \partial_{y_i} \varphi(x - \cdot) \rangle = \langle \partial_{y_i} T, \varphi(x - \cdot) \rangle$$

□

3.1 Lien entre transformée de Fourier et série de Fourier

Les distributions tempérées permettent d'établir un lien entre les deux notions vues auparavant. En effet soit $f \in L^1(\mathbb{T})$ et notons c_n ses coefficients de Fourier. Alors

$$T := 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \delta_n$$

définit une distribution tempérée puisque pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ on a

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq 2\pi \|c\|_\infty \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\varphi(n)| \leq C \|c\|_\infty \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{1+n^2} < +\infty$$

avec $\|c\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|$ qui est fini puisque $c_n \rightarrow 0$. Or

$$\mathcal{F}(x \mapsto e^{ixn}) = 2\pi \delta_n$$

Ainsi donc si on est dans un cadre où $f(x) = \sum_n e^{ixn} c_n$ alors $\hat{f} = 2\pi \sum_n c_n \delta_n$ donc la suite $(c_n)_n = (\hat{f}(n))_n$ définit à la fois la série de Fourier de f mais aussi la transformée de Fourier de $\hat{f}$ au sens des distributions tempérées.

4 Application à l'équation de la chaleur : cadre L^1

On se place dans $\mathbb{R}^d$ et on s'intéresse à l'équation suivante

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u &= 0, & \text{sur } (0, +\infty) \times \mathbb{R}^d \\ u(0) &= u_0, & \text{sur } \mathbb{R}^d \end{cases}$$

d'inconnue $(t, x) \mapsto u(t, x) \in \mathbb{R}$ et où $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et Δ est défini comme suit

$$\Delta u(x) = \sum_{i=1}^d \partial_{x_i}^2 u$$

Afin de donner un sens à l'EDP, nous cherchons des solutions telles que $u \in C^1((0, +\infty) \times \mathbb{R}^d)$ et telles que $u(t, \cdot) \in C^2(\mathbb{R}^d)$. Nous préciserons la régularité exacte plus tard.

L'idée est d'utiliser la transformée de Fourier. Si u est une solution de l'équation telle que $u(t, \cdot)$ et $\partial_{x_i}^2 u(t, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}^d)$ alors en notant $\hat{u}(t, \xi) := \widehat{u(t, \cdot)}(\xi)$ on a les relations

$$\widehat{\partial_t u(t, \cdot)} = \partial_t \hat{u}(t, \cdot), \quad \mathcal{F}[x \mapsto \partial_{x_i}^2 u(t, x)](\xi) = (i\xi_i)^2 \hat{u}(t, \xi)$$

L'idée est de trouver des conditions nécessaires sur u permettant de trouver une formule explicite. Ainsi donc, en appliquant la transformée de Fourier à l'équation on trouve l'EDO

$$\frac{d}{dt}\hat{u}(t, \xi) + |\xi|^2 \hat{u}(t, \xi) = 0$$

et donc on a ¹⁰

$$\hat{u}(t, \xi) = \hat{u}(0)e^{-t|\xi|^2}$$

Ceci permet de trouver un candidat grâce à la formule d'inversion de Fourier

$$u(t, \cdot) = u_0 \star \mathcal{F}^{-1}(\xi \mapsto e^{-t|\xi|^2}) = u_0 \star \left(x \mapsto \left(\frac{1}{4\pi t} \right)^{d/2} e^{-|x|^2/(4t)} \right)$$

Ainsi donc en posant pour $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}^d$

$$G(t, x) = \left(\frac{1}{4\pi t} \right)^{d/2} e^{-|x|^2/(4t)}$$

On remarque que $u_0 \star G$ est bien définie puisque $u_0 \in L^1$ et elle est de classe $C^\infty([0, \infty[\times \mathbb{R}^d)$ grâce aux propriétés de dérivation sous le signe intégrale (convergence dominée) puisque toutes les dérivées de G (en temps ou en espace) sont des fonctions à décroissance rapide ¹¹. En particulier, un calcul direct montre que pour tout $(t, x) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}^d$ on a

$$\partial_t G - \Delta G = 0$$

et on peut en déduire que la fonction $u = u_0 \star G$ satisfait également l'équation. Il reste à donner un sens à la condition initiale puisque la convolution $u_0 \star G$ n'est pas définie en $t = 0$. On remarque cependant que $(G(t, \cdot))_{t>0}$ est une approximation de l'unité puisque

$$G(t, \cdot) \geq 0, \quad \int_{\mathbb{R}^d} G(t, x) dx = 1, \quad \forall t > 0$$

et pour tout $\eta > 0$

$$\int_{|x|>\eta} G(t, x) dx = \left(\frac{1}{\pi} \right)^{d/2} \int_{|z|>\eta/\sqrt{4t}} e^{-|z|^2} dz \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} 0$$

ce qui montre que $\|u(t) - u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} 0$. Autrement dit, $u \in C([0, +\infty[, L^1(\mathbb{R}^d))$, la continuité en un point en temps $t > 0$ étant plus facile à établir. On peut montrer de plus que l'on a unicité de la solution parmi les fonctions satisfaisant la même régularité grâce à l'unicité de la transformée de Fourier inverse établit plus tôt. On vient de montrer le résultat suivant

Théorème 2. *Soit $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^d)$ alors il existe une unique fonction $u \in C([0, +\infty[, L^1(\mathbb{R}^d)) \cap C^\infty(]0, +\infty[\times \mathbb{R}^d)$ telle que pour tout α , $\partial^\alpha u(t) \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et satisfaisant*

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u &= 0, & \text{sur } (0, +\infty) \times \mathbb{R}^d \\ u(0) &= u_0, & \text{sur } \mathbb{R}^d \end{cases}$$

où la première ligne est satisfaite pour tout $(t, x) \in]0, \infty[\times \mathbb{R}^d$ tandis que la deuxième ligne est satisfaite au sens $\|u(t) - u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} 0$.

10. la condition initiale est obtenue par continuité de l'application $t \mapsto \hat{u}(t, \cdot)$ puisque $|\hat{u}(t, \xi) - \hat{u}(t', \xi)| \leq \|u(t, \cdot) - u(t', \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$

11. On peut montrer que n'importe quelle dérivée de G en temps ou en espace s'écrit comme $P(\frac{1}{t}, x)e^{-|x|^2/(4t)}$ où P est un polynôme à $d + 1$ variables.

- Remarque 4.1.**
- La noyau G est appelé noyau de la chaleur et comme évoqué plus haut, on dit qu'il a un effet régularisant i.e. dès que $t > 0$, on voit que la solution devient infiniment dérivable même si à l'instant $t = 0$ elle est seulement $L^1(\mathbb{R}^d)$.
 - Il est possible d'établir le théorème précédent pour $u_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et dans ce cas, l'équation est à comprendre au sens des distributions tempérées. La formule de la solution est la même càd comme convolution de u_0 avec le noyau de la chaleur qui est un élément de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ ce qui permet de définir la convolution au sens $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \star \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ mais ce n'est pas le sujet de ce cours.

Références

- [1] R. E. Edwards. Fourier series. A modern introduction. Vol. 1, volume 64 of Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, second edition, 1979.
- [2] C. Gasquet and P. Witomski. Fourier analysis and applications : filtering, numerical computation, wavelets. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg ISBN :978-0-387-98485-8. 1998.
- [3] David Gérard-Vart, Cours d'Analyse, Master 1. 2020. https://dgerardv.github.io/files/Cours_Analyse_M1.pdf
- [4] J-P. Kahane and P.G. Lemarie-Rieusset. Séries de Fourier et ondelettes. Nouvelle Bibliothèque Mathématique, num. 3. Collection : ISBN/ISSN/EAN : 978-2-84225-001-0. Paris : Cassini, 1998.
- [5] L. Schwartz, Théorie des distributions et transformation de Fourier, Annales de l'université de Grenoble, vol. 23, 1947 -1948, p. 7-24