

Groupe de lecture: Introduction aux EDOs

Amina Mecherbet

15 septembre 2026

1 Organisation des séances

1.1 Théorème d'existence et d'unicité et notion de solution maximale

1.1.1 Cauchy Lipschitz theorem

On peut se référer à l'excellent poly [3, Chap I et II] pour les notions : Lemme de Gronwall, théorème de Cauchy Lipschitz, solution maximale, régularité par rapport aux paramètres de l'EDO.

Voir aussi, [2, Section 2.3] : propriétés qualitatives des solutions dans le cas scalaire : parité, imparité, comportement asymptotique des solutions entre deux équilibres avec exemples, comparaison de deux solutions de deux EDOs $y' = f(t, y)$ et $y' = g(t, y)$

1.2 Cas linéaire

1.2.1 Cas linéaire non autonome

Toujours se référer au poly [3, Chap III] pour la notion du flot, de la résolvante, formule de Duhamel jusqu'à section 4.2 exclue (dimension infinie).

1.2.2 Cas linéaire autonome

- [3, Section 4.1] pour exponentielle de matrice et espaces stables et instables.
- Voir [1, Chapitre 3] pour l'analyse en 2d : description de tous les cas (selon les vp) avec représentation du portrait de phase.
- Si on veut approfondir : [1, Chapitre 4] : Classification of Planar Systems
- Voir [1, Chapitre 6] pour lien entre exponentielle de matrice et les valeurs propres, en particulier [1, Section 6.4] pour la définition de l'expo d'une matrice et ses propriétés.
- Rem : [1, Section 6.5] concerne le cas non autonome (formule de Duhamel).

1.3 Stabilité : Fonctions de Lyapunov et linéarisation

Voir [3, Chapitre 5] pour les deux notions avec les preuves :

- Section 1.
 1. Théorème Lyapunov n°1 pour la décroissance le long de fonctions de Lyapunov et une généralisation dans le théorème Lyapunov n°2.
 2. Voir [2, Section 12.4] pour l'exemple des systèmes Hamiltoniens et Lotka-Volterra.

3. Théorème Lyapunov n°3 est le théorème de stabilité par linéarisation dans le cas de vp strict négatives. Il ne dit rien sur sa réciproque ni sur les autres cas..

— Section 2. Points fixes¹ hyperboliques : dont le théorème de Hartman Grobman (qui s'applique au cas hyperbolique avec vp strict positives).

Contre exemple cas non hyperbolique :

$$x' = \begin{pmatrix} x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{pmatrix}, \quad x' = \begin{pmatrix} x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ -x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{pmatrix}$$

Voir des exemples dans

— [1, Chap 8.3 page 173]

— [2, Chap 12.5] exemples d'étude de stabilité par linéarisation : exemples 12.5.2 à exemples 12.5.5.

— Section 3. Variétés invariantes

— Section 4. Introduction aux bifurcations

1.4 Théorème de redressement du flot et conséquences : ensemble ω limite et théorème de Poincaré Bendixon

Voir [3, Section 4] ou [1, Chap 10]

1.5 Théorie de Floquet

Voir [4, Chap 9] ou [3, Chap III. Section 5] **besoin [3, Chap III. Section 4.2]. ?**

1.6 Résolvante en dimension infinie

Revenir à [3, Chap III. Section 4.2].

1.7 Equations de transport ?

Références

- [1] M. W. Hirsch and S. Smale, *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*, Pure and Applied Mathematics, Vol. 60, Academic Press, New York, 1974.
- [2] S. Ahmad and A. Ambrosetti, *A Textbook on Ordinary Differential Equations*, UNITEXT, Vol. 73, Springer, Cham, 2014.
- [3] Poly de cours de M1 de S. Benzoni. <https://math.univ-lyon1.fr/~benzoni/>
- [4] Florent Berthelin. Équations différentielles. Edition Cassini. 2017

1. Point fixe = équilibre dans le vocabulaire [3]