ARITHMÉTIQUE DES SCHÉMAS EN GROUPES DE BRUHAT-TITS SUR UN ANNEAU DE DEDEKIND SEMI-LOCAL

ANIS ZIDANI

Résumé. L'objectif de cet article est de poser les bases de l'étude cohomologique des schémas en groupes de Bruhat-Tits sur un anneau de Dedekind semi-local. On obtient notamment une preuve simplifiée de la conjecture de Grothendieck-Serre dans ce cas de figure et également un résultat analogue pour les schémas en groupes de Bruhat-Tits d'un groupe semi-simple simplement connexe.

Mots clés : Groupes algébriques, Groupes réductifs, Théorie de Bruhat-Tits, Conjecture de Grothendieck-Serre, Torseurs, Modèles entiers, Anneaux de Dedekind semi-locaux, Approximation faible.

MSC : 20G10, 20G15, 14L10, 14L15.

Table des matières

Introduction

Le point de départ de cet article provient de la question posée par Eva Bayer-Fluckiger et Uriya A. First dans [BFF17] sur des objets qui généralisent les schémas en groupes de Bruhat-Tits sur des anneaux de Dedekind semi-locaux.

Considérons donc R, un anneau de Dedekind semi-local connexe de dimension 1 et K son corps de fractions. Par définition, un idéal maximal $\mathfrak{m}$ de R définit par localisation un anneau de valuation discrète $R_{\mathfrak{m}}$, de complété noté $\widehat{R}_{\mathfrak{m}}$. Notons également $\widehat{K}_{\mathfrak{m}}$, le corps de fractions de $\widehat{R}_{\mathfrak{m}}$.

Introduisons la définition suivante :

Définition 0.1. *Soit G un groupe algébrique réductif sur K et $\mathcal{G}$ un schéma en groupes lisse sur R tel que $G := \mathcal{G}_K$. On dit que $\mathcal{G}$ est un* ***schéma en groupes stabilisateur d'une facette*** *(resp.* ***schéma en groupes parahorique****) de G si pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de R, le schéma en groupes $\mathcal{G}_{\widehat{R}_{\mathfrak{m}}}$ est stabilisateur d'une facette dans l'immeuble de Bruhat-Tits $\mathscr{B}(G_{\widehat{K}_{\mathfrak{m}}})$, cf. [Zid, Définition 3.9.] (resp. est parahorique, cf. [Zid, Définition 6.2.]).*

Date: 10 février 2026.

Grâce à [Zid26, Proposition A.15.] et à [Zid26, Proposition A.16.], cette définition est compatible avec la définition que l'on avait donné dans le cas hensélien (i.e. avec [Zid, Définition 3.9.] et [Zid, Définition 6.2.]).

Notons que cette définition coïncide avec celle prise par Heinloth dans [Hei10], dans le cas semi-simple, et dans le cas où la base est une courbe projective lisse sur un corps.

Par ailleurs, dans le cas des tores, un schéma en groupes stabilisateur d'une facette peut correspondre au modèle de Néron du tore (sachant que l'immeuble d'un tore est réduit à un sommet). Notons d'ailleurs qu'il s'agit d'un exemple où le modèle considéré n'est pas nécessairement affine.

La question de Bayer-Fluckiger et First sur les torseurs rationnellement triviaux s'énonce donc ainsi :

Question 0.2 ([BFF17, Question 6.4])**.** *Soit $\mathcal{G}$, un schéma en groupes sur R tel que $G := \mathcal{G}_K$ est réductif. Est-ce que le morphisme de changement de base :*

$$H^1_{\text{ét}}(R, \mathcal{G}) \to H^1_{\text{ét}}(K, G)$$

est injectif lorsque $\mathcal{G}$ est :

(1) un schéma en groupes stabilisateur d'une facette de G ?

(2) un schéma en groupes parahorique de G ?

Dans l'article, les auteurs supposent également que les corps résiduels de R sont parfaits, mais précisent toutefois que cela est simplement une hypothèse simplificatrice.

Dans [BFFH19], les mêmes auteurs ont trouvé un contre-exemple dans le cas où le groupe G est non connexe et de composante neutre adjointe. Ce contre-exemple est plus précisément construit en [BFFH19, §4.]. Ceci les a conduit à formuler une conjecture plus faible dans le dernier paragraphe de [BFFH19, §5.] : est-ce que la question (1) de 0.2 est satisfaite lorsque la facette considérée est une chambre et G est résiduellement quasi-déployé sur chaque $\widehat{K}_{\mathfrak{m}}$? (cf. [Zid, Définition 3.4.]). Ceci était déjà connu de Bruhat et Tits dans le cas complet à corps résiduel parfait (cf. [BT87, 3.9. Lemme]). On répond positivement à cette conjecture dans cet article. C'est l'objet du théorème 3.9.

Comme signalé dans [Zid], il s'avère qu'un contre-exemple où G est connexe avait déjà été trouvé pour le cas (1) de la question 0.2 dans le cas d'un anneau de valuation discrète complet et d'un groupe adjoint quasi-déployé de type ${}^2A_3$ et déployé par une extension non ramifiée par Bruhat et Tits dans [BT84, 5.2.13.].

Dans l'article [Zid], on a alors généralisé ce contre-exemple et calculé tous les noyaux possibles dans le cas quasi-déployé et adjoint sur un corps valué hensélien (cf. [Zid, Théorème 6.15.]). On a également montré que le noyau du morphisme de la question 0.2 dans le cas (2) est trivial dans ce cas de figure. On se propose dans le présent article de généraliser ces résultats pour n'importe quel groupe G adjoint sur K et quasi-déployé sur chaque $\widehat{K}_{\mathfrak{m}}$ (cf. les théorèmes 3.13 et 3.12).

Malgré nos efforts, le cas (2) de la question 0.2 est toujours une question ouverte lorsque R est un anneau de valuation discrète hensélien. Lorsqu'il n'est pas forcément hensélien, des contre-exemples ont été construits dans [Zid26, Chapter 3].

Notons également que cette question 0.2 est une généralisation de la conjecture de Grothendieck-Serre dans le cas d'un anneau de valuation discrète. En effet, il s'agit du cas où le schéma en groupes parahorique est associé à un sommet hyperspécial (dans ce cas, le schéma en groupes est réductif, cf. [Zid, Lemme 5.2.]).

La première tentative de preuve de ce cas est due à Nisnevich dans sa thèse [Nis82]. L'idée est d'utiliser les techniques de recollements pour montrer que le problème se ramène au cas complet et à un problème de décomposition.

Dans notre cas de figure, en reprenant les notations de la question 0.2, un problème de décomposition reviendrait à se demander si l'égalité suivante est satisfaite :

$$\prod_{\mathfrak{m}} G(\widehat{K}_{\mathfrak{m}}) = G(K) \prod_{\mathfrak{m}} \mathcal{G}(\widehat{R}_{\mathfrak{m}}) := \left\{ (g_K g_{\mathfrak{m}})_{\mathfrak{m}} \mid (g_K, (g_{\mathfrak{m}})_{\mathfrak{m}}) \in G(K) \times \prod_{\mathfrak{m}} \mathcal{G}(\widehat{R}_{\mathfrak{m}}) \right\}.$$

Le problème de décomposition de Nisnevich est alors le cas où $\mathcal{G}$ est supposé réductif.

Notons d'ailleurs qu'obtenir cette décomposition signifie également que le *groupe de classes* (qui est a priori seulement un ensemble pointé) $c(\mathcal{G}) := \prod_{\mathfrak{m}} \mathcal{G}(\widehat{R}_{\mathfrak{m}}) \backslash \prod_{\mathfrak{m}} G(\widehat{K}_{\mathfrak{m}})/G(K)$ est trivial. Cet objet a aussi été étudié par Nisnevich dans sa thèse (cf. [Nis82, Chapter I]).

Ensuite, dans la note [Nis84], Nisnevich apporte des améliorations à sa tentative et indique un résultat de Bruhat et Tits non encore publié à l'époque qui donne le cas semi-simple complet.

Ce résultat (et sa preuve) va ensuite être publié dans [BT84, 5.2.14. Proposition.], bien qu'il ne soit pas formulé de manière cohomologique. On a montré dans [Zid] que c'est effectivement équivalent à l'énoncé du cas complet, et que le cas réductif peut être également obtenu en ajustant la preuve (cf. [Zid, Proposition 5.5.]).

Le cas des tores a été ensuite prouvé plus tard par Colliot-Thélène et Sansuc dans [CTS87, Theorem. 4.1.] mais dans un contexte bien plus général. Il s'avère que dans notre contexte on peut en fournir une preuve bien plus simple dans le cas complet : cela est l'objet de [Zid, Lemme 5.4.(2)].

Enfin, Guo dans [Guo22] clarifie la preuve de Nisnevich tout en optant cette fois pour une autre preuve du cas complet en passant par une technique de réduction au cas anisotrope. Il ajoute également le cas où l'anneau est de plus semi-local.

On propose également dans cet article d'obtenir une preuve simplifiée et nouvelle de ce résultat en obtenant une autre preuve du problème de décomposition, et en combinant cela au cas complet que l'on a déjà traité dans [Zid, Proposition 5.5.].

Notre objectif principal est donc de répondre de la manière la plus exhaustive possible à la question 0.2. Les corps résiduels de R ne sont donc pas supposés parfaits (sauf mention explicite du contraire).

Notre stratégie reprend essentiellement celle de Nisnevich. On utilise les techniques de recollements pour découper le problème en deux : résoudre le cas complet (ce qui a déjà été exploré dans [Zid]) et résoudre un problème de décomposition. Le fait de sortir du cas réductif nécessite toutefois d'utiliser de nouvelles méthodes (ou d'utiliser de manière plus astucieuse celles déjà connues).

Discutons désormais du problème de décomposition. La stratégie que l'on adopte dans ce papier utilise, pour tout $\mathfrak{m}$, le groupe $G(\widehat{K}_{\mathfrak{m}})^+$ engendré par les $\widehat{K}_{\mathfrak{m}}$-points des sous-groupes de racines de $G_{\widehat{K}_{\mathfrak{m}}}$. Elle repose sur le fait de montrer que $\prod_{\mathfrak{m}} G(\widehat{K}_{\mathfrak{m}})^+ \subset G(K) \prod_{\mathfrak{m}} \mathcal{G}(\widehat{R}_{\mathfrak{m}})$, ce qui simplifie grandement la problématique, car $\prod_{\mathfrak{m}} G(\widehat{K}_{\mathfrak{m}})^+$ est en pratique suffisamment gros pour conclure sur un certain nombre de cas.

Lorsque G est K-isotrope, il était déjà connu dans la littérature que l'on pouvait approcher $\prod_{\mathfrak{m}} G(\widehat{K}_{\mathfrak{m}})^+$ avec des éléments de $G(K)^+$ (cf. [Gil09, Lemme 5.6.]). Le cas où G est K-anisotrope et où il existe un $\mathfrak{m} \in \mathrm{Specm}(R)$ tel que G soit $\widehat{K}_{\mathfrak{m}}$-isotrope est nettement plus délicat et n'a pas été étudié dans la littérature.

L'idée novatrice dans cet article réside alors en l'utilisation du théorème de Prasad (cf. proposition 2.1) pour montrer que $\prod_{\mathfrak{m}} G(\widehat{K}_{\mathfrak{m}})^+ \subset G(K) \prod_{\mathfrak{m}} \mathcal{G}(\widehat{R}_{\mathfrak{m}})$, et ce, même si G est K-anisotrope : le problème de décomposition est ainsi simplifié dans tous les cas de figure.

Le plan de cet article est le suivant :

(1) La première partie est dédiée aux techniques de recollements. On y généralise ce qui a déjà été fait par Nisnevich et Guo pour inclure le cas de schémas en groupes plus généraux non nécessairement affines (en particulier ceux qui nous intéressent).
(2) La seconde partie est dédiée aux techniques d'approximation. On y développe des résultats qui simplifient considérablement l'étude du problème de décomposition.
(3) La troisième partie est dédiée à l'établissement de lemmes cruciaux et des principaux théorèmes de l'article.

On peut déjà annoncer tout de suite que dans le cas où les corps résiduels sont parfaits, et que le groupe G est semi-simple simplement connexe, la question 0.2 admet une réponse positive :

Théorème 0.3. *Supposons que les corps résiduels de R soient parfaits. Soit G un groupe semi-simple simplement connexe. Alors les schémas en groupes stabilisateur d'une facette et parahoriques pour G coïncident et lorsque $\mathcal{G}$ en est un, le morphisme de changement de base :*

$$H^1_{\text{ét}}(R, \mathcal{G}) \to H^1_{\text{ét}}(K, G)$$

est injectif.

Notons également que, bien que l'on ait une preuve essentiellement uniforme, ce qui limite nos résultats cet article (et plus généralement dans ce sujet), est le fait que la théorie de Bruhat-Tits a été peu examinée dans le cas d'un groupe sur un corps complet valué discrètement non quasi-déployé par une extension non ramifiée.

Remerciements.

L'auteur remercie Philippe Gille et Ralf Köhl, pour leurs soutiens, leurs accompagnements et leur relecture du présent article. Il remercie également Ofer Gabber pour avoir répondu à la question posée à la remarque 1.17.

L'auteur est également reconnaissant vis-à-vis de la Studienstiftung des deutschen Volkes pour avoir supporté financièrement ce projet. Il a été également soutenu par le projet “Group schemes, root systems, and related representations”, financé par l'Union Européenne - Next-GenerationEU à travers le "Romania's National Recovery and Resilience Plan" (PNRR) call no. PNRR-III-C9-2023-I8, Project CF159/31.07.2023, et coordonné par le Ministre de la Recherche, de l'Innovation et de la Numérisation (MCID) de Roumanie.

Notations et conventions

Pour tout corps k, la notation k^s désigne une clôture séparable de k.

Rappelons que tout schéma X localement de présentation finie séparé sur un schéma intègre S de corps de fonctions k est tel que $X(S) \to X(k)$ est injectif. Cette inclusion est implicite tout le long du document (cf. [GW10, Corollary 9.9.]).

Nous utilisons la définition de groupe réductif de Chevalley et Borel (cf. [Bor91]). En particulier, ils sont affines, lisses et connexes.

Le premier ensemble non abélien de cohomologie étale et fppf considéré dans cet article est défini par Milne dans [Mil80, III.§4.] par le procédé de Čech. De manière équivalente, ils sont donnés par les classes d'isomorphismes de torseurs faisceautiques, et sont donc a priori non nécessairement représentables par des schémas (cf. [Mil80, III. Proposition 4.6.]).

Dans toute la suite on considère R un anneau de Dedekind semi-local connexe de dimension 1 et K son corps de fractions. Tout ce qui va suivre dans cet article se généralise trivialement au cas non connexe et au cas où une composante est de dimension 0.

L'ensemble $\mathrm{Specm}(R)$ désigne le spectre maximal de R, c'est-à-dire l'ensemble de ses idéaux maximaux. Observons que dans le cas de R, il s'agit également des idéaux premiers non nuls.

Pour tout $\mathfrak{m} \in \mathrm{Specm}(R)$, notons que $R_\mathfrak{m}$ est un anneau de valuation discrète et qu'il munit donc K d'une valuation discrète. Son corps résiduel est noté $\kappa_\mathfrak{m}$. On note $\widehat{K}_\mathfrak{m}$ et $\widehat{R}_\mathfrak{m}$ les complétés associés respectifs de K et $R_\mathfrak{m}$. Notons également $R^h_\mathfrak{m}$, l'hensélisé de $R_\mathfrak{m}$ et $K^h_\mathfrak{m}$ son corps de fractions (cf. [Stacks, Tag 0BSK]).

Étant donné $\mathfrak{m} \in \mathrm{Specm}(R)$, on considère un corps valué par $\mathfrak{m}$, noté $\widetilde{K}_\mathfrak{m}$, compris entre K et $\widehat{K}_\mathfrak{m}$. Le corps K est donc dense dans $\widetilde{K}_\mathfrak{m}$ pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique. Ce corps est également supposé hensélien. On a donc : $K \subset K^h_\mathfrak{m} \subset \widetilde{K}_\mathfrak{m} \subset \widehat{K}_\mathfrak{m}$. Son anneau d'entiers est noté $\widetilde{R}_\mathfrak{m}$. Son corps résiduel est également $\kappa_\mathfrak{m}$.

Il arrive parfois dans l'article d'alléger les hypothèses faites sur les $\widetilde{K}_\mathfrak{m}$. Ceci est alors mentionné explicitement.

Notons également :

— $\widetilde{K} := \prod_{\mathfrak{m}\in\mathrm{Specm}(R)} \widetilde{K}_\mathfrak{m}$, le produit des corps valués choisis,

— $\widetilde{R} := \prod_{\mathfrak{m}\in\mathrm{Specm}(R)} \widetilde{R}_\mathfrak{m}$, le produit de leurs anneaux d'entiers,

— $\kappa := \prod_{\mathfrak{m}\in\mathrm{Specm}(R)} \kappa_\mathfrak{m}$, le produit de leurs corps résiduels,

— $\widetilde{K}^{\mathrm{nr}} := \prod_{\mathfrak{m}\in\mathrm{Specm}(R)} \widetilde{K}^{\mathrm{nr}}_\mathfrak{m}$, le produit des extensions maximales non ramifiées,

— $\widetilde{R}^{\mathrm{nr}} := \prod_{\mathfrak{m}\in\mathrm{Specm}(R)} \widetilde{R}^{\mathrm{nr}}_\mathfrak{m}$, le produit des hensélisés stricts,

— $\kappa^s := \prod_{\mathfrak{m}\in\mathrm{Specm}(R)} \kappa^s_\mathfrak{m}$, le produit des clôtures séparables,

— et enfin $I := \prod_{\mathfrak{m}\in\mathrm{Specm}(R)} I_\mathfrak{m} := \prod_{\mathfrak{m}\in\mathrm{Specm}(R)} \mathrm{Gal}(\widetilde{K}^s_\mathfrak{m}/\widetilde{K}^{\mathrm{nr}}_\mathfrak{m})$, produit des sous-groupes d'inertie.

Observons que $R \subset \widetilde{R}$ et $K \subset \widetilde{K}$ au travers de l'inclusion diagonale. Cette inclusion est implicite tout le long du document.

Dans le cas où l'on a $\widetilde{R}_\mathfrak{m} = \widehat{R}_\mathfrak{m}$ pour tout $\mathfrak{m} \in \mathrm{Specm}(R)$, observons que $\widehat{R} := \widetilde{R}$ est aussi le complété de R par son radical de Jacobson (cf. [Mat86, Theorem 8.15.]). Dans ce cas, on utilise également la notation $\widehat{K} := \widetilde{K}$.

Prenons $\mathfrak{m} \in \mathrm{Specm}(R)$. Observons que $\widetilde{K}^{\mathrm{nr}}_\mathfrak{m} \subset \widehat{K}^{\mathrm{nr}}_\mathfrak{m} \subset \widehat{\widetilde{K}^{\mathrm{nr}}_\mathfrak{m}}$, de telle sorte que $\widetilde{K}^{\mathrm{nr}}_\mathfrak{m}$ est dense dans $\widehat{K}^{\mathrm{nr}}_\mathfrak{m}$. Cela implique qu'un élément de $\mathrm{Gal}(\widetilde{K}^{\mathrm{nr}}_\mathfrak{m}/\widetilde{K}_\mathfrak{m})$ se relève en un élément de $\mathrm{Gal}(\widehat{K}^{\mathrm{nr}}_\mathfrak{m}/\widehat{K}_\mathfrak{m})$. En fait, l'application induite $\mathrm{Gal}(\widetilde{K}^{\mathrm{nr}}_\mathfrak{m}/\widetilde{K}_\mathfrak{m}) \to \mathrm{Gal}(\widehat{K}^{\mathrm{nr}}_\mathfrak{m}/\widehat{K}_\mathfrak{m})$ est bijective, et ils sont tous deux isomorphes à $\mathrm{Gal}(\kappa^s_\mathfrak{m}/\kappa_\mathfrak{m})$.

Soulignons que l'extension maximale non ramifiée d'un corps complet n'est pas toujours complète. Par exemple, l'extension maximale non ramifiée de $\kappa((t))$ n'est pas $\kappa^s((t))$ si κ^s/κ est infini.

Étant donné un groupe réductif G sur $\widetilde{K}$ (ce qui est équivalent à se donner des groupes réductifs sur les corps $\widetilde{K}_{\mathfrak{m}}$), on note $\mathscr{B}(G) := \prod_{\mathfrak{m}\in\mathrm{Specm}(R)} \mathscr{B}(G_{\widetilde{K}_{\mathfrak{m}}})$, le produit des immeubles de Bruhat-Tits des $G_{\widetilde{K}_{\mathfrak{m}}}$ (ils existent d'après [Zid, Proposition 1.1.]). Le groupe $G(\widetilde{K}) = \prod_{\mathfrak{m}\in\mathrm{Specm}(R)} G(\widetilde{K}_{\mathfrak{m}})$ agit naturellement sur $\mathscr{B}(G) := \prod_{\mathfrak{m}\in\mathrm{Specm}(R)} \mathscr{B}(G_{\widetilde{K}_{\mathfrak{m}}})$. Une facette (resp. chambre, resp. appartement) dans $\mathscr{B}(G)$ est le produit de facettes (resp. chambres, resp. appartements) dans chacun des facteurs.

De la même manière, en considérant tout facteur par facteur, on généralise la notion de sous-groupes parahoriques, de sous-groupes stabilisateurs, de schémas en groupes de Bruhat-Tits, etc.

Notons aussi que $\Gamma^{\mathrm{nr}} := \prod_{\mathfrak{m}\in\mathrm{Specm}(R)} \Gamma^{\mathrm{nr}}_{\mathfrak{m}}$ agit naturellement sur $G(\widetilde{K}^{\mathrm{nr}}) := \prod_{\mathfrak{m}\in\mathrm{Specm}(R)} G(\widetilde{K}^{\mathrm{nr}}_{\mathfrak{m}})$.

1. Découpage du problème et techniques de recollements

On se donne comme objectif dans cette partie d'utiliser les techniques de recollements (ou *patching* en anglais) pour séparer le problème qui nous intéresse en deux questions intermédiaires.

Plus précisément, on reprend l'idée développée par Nisnevich ([Nis82], [Nis84]) et Guo ([Guo22]). Autrement dit, essayer de se ramener au cas où R est local et complet (ou toute autre situation plus élémentaire) et comprendre l'injectivité dans ce cas de figure. Ceci utilise donc les techniques de recollements.

On a par ailleurs fait le choix dans cette section de travailler avec les espaces algébriques au lieu des schémas affines. En effet, comme les techniques de recollements ne sont pas disponibles pour les schémas quelconques, travailler avec les espaces algébriques permet de contourner cette difficulté et d'obtenir tout de même des résultats utiles pour notre problème. Dans une première approche, le lecteur peut donc considérer seulement des schémas affines.

Dans cette partie, les corps valués $\widetilde{K}_{\mathfrak{m}}$ sont seulement supposés contenir K et avoir les mêmes corps résiduels que K sous les valuations $\mathfrak{m}$-adiques (c'est-à-dire les $\kappa_{\mathfrak{m}}$). Ils ne sont donc ni nécessairement henséliens, ni nécessairement dans $\widehat{K}_{\mathfrak{m}}$.

Soit $\mathcal{G}$ un schéma en groupes sur R séparé et localement de présentation finie. Notons également $G := \mathcal{G}_K$.

Question 1.1. *Considérons le diagramme commutatif suivant :*

$$\begin{array}{ccccc} H^1_*(R,\mathcal{G}) & \longrightarrow & H^1_*(\widetilde{R},\mathcal{G}) & = & \prod\limits_{\mathfrak{m}\in\mathrm{Specm}(R)} H^1_*(\widetilde{R}_{\mathfrak{m}},\mathcal{G}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ H^1_*(K,G) & \longrightarrow & H^1_*(\widetilde{K},\mathcal{G}) & = & \prod\limits_{\mathfrak{m}\in\mathrm{Specm}(R)} H^1_*(\widetilde{K}_{\mathfrak{m}},G) \end{array}$$

avec $* \in \{\mathrm{fppf}, \text{ét}\}$. *Quelle est l'obstruction de ce diagramme à être cartésien ?*

Faisons un rappel sur les techniques de recollements :

Rappel 1.2 (Techniques de recollements)**.** *Le foncteur suivant est une équivalence de catégories :*

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Catégorie des } R\text{-espaces}\\ \text{algébriques séparés et}\\ \text{loc. de présentation finie}\end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{c}\text{Catégorie des triplets } (X', \mathfrak{X}', \tau : X'_{\widetilde{K}} \to \mathfrak{X}'_{\widetilde{K}})\\ \text{où } X' \text{ (resp. } \mathfrak{X}'\text{) est un espace algébrique séparé}\\ \text{loc. de prés. finie sur } K \text{ (resp. } \widetilde{R}\text{) et } \tau \text{ un isomorphisme}\end{array}\right\}$$

$$\mathfrak{X} \mapsto \left(\mathfrak{X}_K, \mathfrak{X}_{\widetilde{R}}, (\mathfrak{X}_K)_{\widetilde{K}} \xrightarrow{\sim} (\mathfrak{X}_{\widetilde{R}})_{\widetilde{K}}\right).$$

Démonstration. Il s'agit d'une conséquence de [MB96, Corollaire 5.6.(1)], puisque $\mathrm{Spec}(\widetilde{R}) \to \mathrm{Spec}(R)$ est plat d'après [Liu06, Corollary 1.2.14.] et induit un isomorphisme au niveau des points fermés, puisque R et $\widetilde{R}$ ont les mêmes corps résiduels. □

Par fonctorialité, on vérifie qu'un tel foncteur se restreint et corestreint aux espaces algébriques en groupes. D'après [Ana73, 4.B. Théorème], les espaces algébriques en groupes considérés sont représentables par des schémas. On obtient donc :

Proposition 1.3. *Le foncteur suivant est une équivalence de catégories :*

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Catégorie des } R\text{-schémas}\\ \text{en groupes séparés et}\\ \text{loc. de présentation finie}\end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{c}\text{Catégorie des triplets } (G', \mathfrak{G}', \tau : G'_{\widetilde{K}} \to \mathfrak{G}'_{\widetilde{K}})\\ \text{où } G' \text{ (resp. } \mathfrak{G}'\text{) est un schéma en groupes séparé}\\ \text{loc. de prés. finie sur } K \text{ (resp. } \widetilde{R}\text{) et } \tau \text{ un isomorphisme}\end{array}\right\}$$

$$\mathfrak{G} \mapsto \left(\mathfrak{G}_K, \mathfrak{G}_{\widetilde{R}}, (\mathfrak{G}_K)_{\widetilde{K}} \xrightarrow{\sim} (\mathfrak{G}_{\widetilde{R}})_{\widetilde{K}}\right).$$

Que dire maintenant des torseurs ? On a besoin de quelques lemmes qui sont d'ailleurs valides sur une base quelconque S (qui est un schéma) ; $\mathcal{G}$ est donc supposé être un schéma en groupes sur S non nécessairement séparé, ni nécessairement localement de présentation finie.

Définition 1.4. *On dit que $\mathfrak{X}$, un faisceau fppf sur S, est un pseudo $\mathcal{G}$-torseur sur S si $\mathfrak{X}$ est muni d'une action libre et transitive de $\mathcal{G}$. Autrement dit, une action telle que $\mathcal{G} \times_S \mathfrak{X} \to \mathfrak{X} \times_S \mathfrak{X}$, $(g, x) \mapsto (g.x, x)$ est un isomorphisme.*

On note $H^1_{\mathrm{Pseudo}}(S, \mathcal{G})$ (resp. $H^1_{\mathrm{SLPF}}(S, \mathcal{G})$) l'ensemble des classes d'isomorphismes de pseudo $\mathcal{G}$-torseurs sur S représentables par des espaces algébriques (resp. de pseudo $\mathcal{G}$-torseurs sur S représentables par des espaces algébriques séparés et localement de présentation finie).

Par ailleurs, on définit un $\mathcal{G}$-torseur sur S pour la topologie fppf (resp. étale) comme étant un faisceau muni d'une action de $\mathcal{G}$, localement isomorphe à $\mathcal{G}$ muni de son action par translation (à gauche ou à droite selon la convention que l'on prend).

On note $[\mathfrak{X}]$ la classe d'isomorphisme de $\mathfrak{X}$. Notons qu'il n'y a pas (ni ici, ni dans la suite) d'ambiguïté sur la catégorie ambiante dans notre situation.

Remarque 1.5. Un pseudo $\mathcal{G}$-torseur sur S est isomorphe au pseudo torseur trivial ($\mathcal{G}$ muni de son action par translation) si et seulement s'il admet une section sur S (cf. [Stacks, Tag 03AI]).

Lemme 1.6. *Tout torseur pour la topologie fppf/étale est représentable par un espace algébrique qui est un pseudo-torseur. On a donc les inclusions naturelles* $H^1_{\text{ét}}(S,\mathcal{G}) \subset H^1_{\text{fppf}}(S,\mathcal{G}) \subset H^1_{\text{Pseudo}}(S,\mathcal{G})$. *Plus précisément :*

1. *Si* $\mathcal{G}$ *est plat et localement de présentation finie (resp. et aussi séparé), l'ensemble pointé* $H^1_{\text{fppf}}(S,\mathcal{G})$ *est égal à l'ensemble pointé des classes d'isomorphismes d'espaces algébriques pseudo* $\mathcal{G}$*-torseurs sur* S *fidèlement plats et localement de présentation finie (resp. et aussi séparé).*
2. *Si* $\mathcal{G}$ *est lisse (resp. et aussi séparé), l'ensemble pointé* $H^1_{\text{ét}}(S,\mathcal{G})$ *est égal à l'ensemble pointé des classes d'isomorphismes d'espaces algébriques pseudo* $\mathcal{G}$*-torseurs sur* S *lisses et surjectifs (resp. et aussi séparé).*

Démonstration. Notons que les torseurs pour la topologie fppf/étale sont représentables par des espaces algébriques car la descente fppf/étale est toujours effective pour eux (cf. [Stacks, Tag 0ADV]).

Montrer que $\mathcal{G} \times_S \mathfrak{X} \to \mathfrak{X} \times_S \mathfrak{X}$ est un isomorphisme peut se faire après localisation fppf/étale. Comme les torseurs fppf/étales sont triviaux fppf/étale localement, on a donc le résultat.

Comme être plat, localement de présentation finie, lisse ou encore séparé est local pour la topologie fppf ou étale, si $\mathcal{G}$ l'est, alors les torseurs fppf ou étales le sont. Notons d'ailleurs que $\mathcal{G}$ est toujours surjectif sur S puisque le morphisme $\mathcal{G} \to S$ admet une section.

Réciproquement, soit $\mathfrak{X}$ un pseudo $\mathcal{G}$-torseur sur S. Notons que $\mathfrak{X} \times_S \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ est un $\mathcal{G}_{\mathfrak{X}}$-torseur trivial puisqu'il possède une section.

Considérons maintenant un morphisme étale surjectif $U \to \mathfrak{X}$ où U est représentable par un schéma. On en déduit que $(\mathfrak{X} \times_S \mathfrak{X}) \times_{\mathfrak{X}} U = \mathfrak{X} \times_S U \to U$ est également un $\mathcal{G}_U$-torseur trivial sur U.

Donc $U \to S$ est un recouvrement trivialisant $\mathfrak{X}$. Si $\mathfrak{X}$ est fidèlement plat et localement de présentation finie, U l'est également aussi par composition. Donc $\mathfrak{X}$ est trivialisé par un recouvrement fppf. De même, si $\mathfrak{X}$ est lisse et surjectif, U aussi et donc $\mathfrak{X}$ est trivialisé par un recouvrement lisse. Puisque tout recouvrement lisse peut être raffiné en un recouvrement étale (cf. [Stacks, Tag 055V]), on a le résultat. □

On en déduit donc le résultat suivant :

Corollaire 1.7. *Si* $\mathcal{G}$ *est lisse, alors* $H^1_{\text{ét}}(S,\mathcal{G}) = H^1_{\text{fppf}}(S,\mathcal{G})$.

Démonstration. Un torseur fppf $\mathfrak{X}$ est fppf localement isomorphe à $\mathcal{G}$. Par descente fppf, $\mathfrak{X}$ est également lisse et surjectif. D'après le lemme précédent, $[\mathfrak{X}] \in H^1_{\text{ét}}(S,\mathcal{G})$. □

Revenons maintenant au cas où $S = \operatorname{Spec}(R)$ et $\mathcal{G}$ séparé et localement de présentation finie. On peut enfin énoncer les techniques de recollements pour les torseurs :

Proposition 1.8. *Le foncteur suivant est une équivalence de catégories :*

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Catégorie des } R\text{-esp. alg.}\\ \text{pseudo } \mathcal{G}\text{-torseur sép.}\\ \text{et loc. de prés. finie}\end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{c}\text{Catégorie des triplets } (X',\mathfrak{X}',\tau : X'_{\widetilde{K}} \to \mathfrak{X}'_{\widetilde{K}})\\ \text{où } X' \text{ (resp. } \mathfrak{X}'\text{) est un esp. alg. pseudo torseur sur } G \text{ (resp. } \mathcal{G}_{\widetilde{R}}\text{)}\\ \text{sép. loc. de prés. finie sur } K \text{ (resp. } \widetilde{R}\text{) et } \tau \text{ un isomorphisme}\end{array}\right\}$$

$$\mathfrak{X} \mapsto \left(\mathfrak{X}_K, \mathfrak{X}_{\widetilde{R}}, (\mathfrak{X}_K)_{\widetilde{K}} \xrightarrow{\sim} (\mathfrak{X}_{\widetilde{R}})_{\widetilde{K}}\right).$$

Si de plus $\mathcal{G}$ *est plat (resp. lisse), alors l'équivalence de catégories précédente en induit également une au niveau des torseurs fppf (resp. torseurs étales).*

Démonstration. Le premier résultat est évident par définition des pseudo torseurs et par fonctorialité des techniques de recollements (rappel 1.2) : on peut restreindre et corestreindre sans difficulté.

Pour le second résultat, lorsque $\mathcal{G}$ est plat (resp. lisse) on peut également restreindre et corestreindre aux pseudo torseurs qui sont de plus fidèlement plats (resp. lisses et surjectifs). En effet, comme $\mathrm{Spec}(\widetilde{R}) \to \mathrm{Spec}(R)$ est fidèlement plat et quasi-compact, si un pseudo torseur est tel que $\mathfrak{X}_{\widetilde{R}}$ est fidèlement plat (resp. lisse et surjectif), alors $\mathfrak{X}$ l'est également par descente fpqc.

On a donc le résultat d'après le lemme 1.6. □

Utilisons donc les techniques de recollements pour reformuler notre problème. Nous donnons alors une variante de [Nis84, Théorème 2.1.], ou encore de [Guo22, Proposition 10.] :

Théorème 1.9. *Prenons* $* \in \{\mathrm{SLPF}, \mathrm{fppf}, \mathrm{\acute{e}t}\}$ *(supposant de plus que* $\mathcal{G}$ *est plat (resp. lisse) si* $* = \mathrm{fppf}$ *(resp.* ét*)). Désignons par* $\tau_g : G_{\widetilde{K}} \cong G_{\widetilde{K}}$ *l'isomorphisme de torseurs obtenu en translatant (à gauche) par un élément* $g \in G(\widetilde{K})$*. L'application* $g \mapsto (G, \mathcal{G}_{\widetilde{R}}, \tau_g)$ *induit par recollement la bijection d'ensembles pointés suivant :*

$$\mathcal{G}(\widetilde{R})\backslash G(\widetilde{K})/G(K) \cong \mathrm{Ker}\left(H^1_*(R,\mathcal{G}) \to H^1_*(K,G) \times_{H^1_*(\widetilde{K},G)} H^1_*(\widetilde{R},\mathcal{G})\right).$$

Par conséquent, on a la suite exacte naturelle :

$$1 \longrightarrow \mathcal{G}(\widetilde{R})\backslash G(\widetilde{K})/G(K) \longrightarrow H^1_*(R,\mathcal{G}) \longrightarrow H^1_*(K,G) \times_{H^1_*(\widetilde{K},G)} H^1_*(\widetilde{R},\mathcal{G}) \longrightarrow 1.$$

Démonstration. On a un morphisme naturel $H^1_*(R,\mathcal{G}) \to H^1_*(K,G) \times_{H^1_*(\widetilde{K},G)} H^1_*(\widetilde{R},\mathcal{G})$ donné par $[\mathfrak{X}] \to ([\mathfrak{X}_{\widetilde{R}}], [\mathfrak{X}_{\widetilde{K}}])$. Ce morphisme est en fait surjectif. En effet, prenons $([X], [\mathfrak{X}'])$ dans le produit fibré. Par définition, X et $\mathfrak{X}'$ ont même classe dans $H^1_*(\widetilde{K}, G)$. Cela signifie qu'il existe un isomorphisme de torseurs $\tau : X_{\widetilde{K}} \to \mathfrak{X}'_{\widetilde{K}}$. On peut donc utiliser les techniques de recollements (proposition 1.8) pour obtenir un R-torseur $\mathfrak{X}$ sur $\mathcal{G}$ qui recolle X et $\mathfrak{X}'$ et donc tel que $[\mathfrak{X}]$ s'envoie sur $([X], [\mathfrak{X}'])$ comme souhaité. D'où la surjectivité.

Que peut-on dire du noyau de ce morphisme ? On recherche donc les R-torseurs sur $\mathcal{G}$ qui sont triviaux sur $\widetilde{R}$ et $\widetilde{K}$, à isomorphisme près. D'après les techniques de recollements, cela revient à comprendre les triplets de la forme $(G, \mathcal{G}_{\widetilde{R}}, \tau : G_{\widetilde{K}} \xrightarrow{\sim} (\mathcal{G}_{\widetilde{R}})_{\widetilde{K}} = G_{\widetilde{K}})$ à isomorphisme près. L'isomorphisme τ est d'ailleurs déterminé par l'image de l'élément neutre qui est un élément de $G(\widetilde{K})$. Réciproquement, tout élément $g \in G(\widetilde{K})$ détermine un isomorphisme τ_g en translatant par cet élément. Les triplets que l'on cherche sont donc exactement déterminés par un élément de $G(\widetilde{K})$.

Comprenons maintenant les triplets isomorphes. Un triplet $(G, \mathcal{G}_{\widetilde{R}}, \tau_{\widehat{g}})$ est isomorphe à un triplet $(G, \mathcal{G}_{\widetilde{R}}, \tau_{\widehat{g}'})$ si et seulement s'il existe $g \in G(K)$ et $p \in \mathcal{G}(\widetilde{R})$ tel que le carré suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
G_{\widetilde{K}} \arrow[r, "\tau_{\widehat{g}}"] \arrow[d, "\tau_g"'] & (\mathcal{G}_{\widetilde{R}})_{\widetilde{K}} \arrow[d, "\tau_p"] \\
G_{\widetilde{K}} \arrow[r, "\tau_{\widehat{g}'}"'] & (\mathcal{G}_{\widetilde{R}})_{\widetilde{K}}
\end{tikzcd}$$

En d'autres termes, $\tau_{\widehat{g}'} = \tau_p \circ \tau_{\widehat{g}} \circ \tau_g^{-1}$.

En évaluant en l'élément neutre, on a alors $\widehat{g}' = p\,\widehat{g}\,g^{-1}$, supposant que l'on manipule des torseurs à gauche. Les classes d'isomorphismes sont donc données par $\mathcal{G}(\widetilde{R})\backslash G(\widetilde{K})/G(K)$. □

Remarque 1.10. Remarquons que $\mathcal{G}(\widetilde{R})\backslash G(\widetilde{K})/G(K)$ est en bijection d'ensembles pointés avec $G(K)\backslash G(\widetilde{K})/\mathcal{G}(\widetilde{R})$ grâce à $g \mapsto g^{-1}$. On obtient en fait l'un ou l'autre ensemble par les calculs précédents en fonction de si l'on souhaite travailler avec des torseurs à gauche ou à droite. Ce choix n'a aucune importance.

Remarque 1.11. Il est intéressant de noter que, lorsque $\mathcal{G}$ est affine, G est lisse, et $\widetilde{K} = \widehat{K}$, le double quotient $\mathcal{G}(\widehat{R})\backslash G(\widehat{K})/G(K)$ est isomorphe à $H^1_{\mathrm{Nis}}(R, \mathcal{G})$ d'après [Nis82, 2.8. Theorem]. Si $\mathcal{G}$ est de plus plat, alors d'après [Nis82, 1.3. Proposition], on a $\mathcal{G}(R^h)\backslash G(K^h)/G(K) = \mathcal{G}(\widehat{R})\backslash G(\widehat{K})/G(K)$.

Notons que dire que le diagramme de la question 1.1 est cartésien est équivalent à dire que l'on a une bijection d'ensembles pointés $H^1(R, \mathcal{G}) \overset{\sim}{\to} H^1(\widetilde{R}, \mathcal{G}) \times_{H^1(\widetilde{K}, G)} H^1(K, G)$. En particulier, $\operatorname{Ker}\left(H^1(R, \mathcal{G}) \to H^1(\widetilde{R}, \mathcal{G}) \times_{H^1(\widetilde{K}, G)} H^1(K, G)\right)$, donc $\mathcal{G}(\widetilde{R})\backslash G(\widetilde{K})/G(K)$, doit être trivial.

Rappelons cependant que l'on manipule des ensembles pointés et non des groupes a priori. Par conséquent, le noyau ne suffit pas à comprendre les fibres du morphisme.

Toutefois, les techniques dites de torsion (ou *twist* en anglais) permettent de comprendre ses fibres. Supposons désormais à partir de maintenant que $\mathcal{G}$ est plat. Il peut alors être identifié avec le faisceau fppf qu'il représente. Par ailleurs, dans toute la suite, on prend $* \in \{\mathrm{fppf}, \text{ét}\}$ (en supposant que $\mathcal{G}$ est de plus lisse si $* = \text{ét}$). Faisons quelques rappels :

Prenons un torseur $\mathfrak{X}$ avec donc $[\mathfrak{X}] \in H^1_*(R, \mathcal{G})$, et considérons le groupe tordu de $\mathcal{G}$ par $\mathfrak{X}$ par automorphismes intérieurs, noté $\mathcal{G}^{\mathfrak{X}}$ (cf. [Gil15, 2.1.]). C'est une forme fppf (ou étale) sur R de $\mathcal{G}$ telle que sa classe dans $H^1_*(R, \mathrm{Aut}(\mathcal{G})))$ est donnée par l'image de $[\mathfrak{X}]$ par l'application naturelle $H^1_*(R, \mathcal{G}) \to H^1_*(R, \mathrm{Aut}(\mathcal{G})))$ (cf. [Gir71, Chapitre III, Corollaire 2.5.4.]). En conséquence, deux torseurs isomorphes induisent des tordus isomorphes.

Il est aussi tel qu'il existe une bijection canonique $\varphi_{\mathfrak{X}}$ de $H^1_*(R, \mathcal{G}^{\mathfrak{X}})$ dans $H^1_*(R, \mathcal{G})$ qui envoie la classe du torseur trivial vers $[\mathfrak{X}]$ (cf. [Gir71, Chapitre III, 2.6.]). Notons par ailleurs que tordre $\mathcal{G}^{\mathfrak{X}}$ par un torseur $\mathfrak{Y}$ avec donc $[\mathfrak{Y}] \in H^1_*(R, \mathcal{G}^{\mathfrak{X}})$ donne à isomorphisme près le même groupe que si l'on tordait $\mathcal{G}$ par un torseur dans la classe $\varphi_{\mathfrak{X}}([\mathfrak{Y}]) \in H^1_*(R, \mathcal{G})$.

Enfin, observons que grâce à [Ana73, 4.A. Théorème], un tordu fppf/étale d'un schéma en groupes sur R, plat, séparé et localement de présentation finie (qui, par descente, est un R-espace algébrique en groupes plat, séparé et localement de présentation finie) est en fait représentable par un R-schéma en groupes. Dans la suite, on peut alors réutiliser pour les tordus de $\mathcal{G}$ ce que l'on a déjà fait.

De ceci, on en déduit les lemmes suivants :

Lemme 1.12. *Soit* $[\mathfrak{X}] \in H^1_*(R, \mathcal{G})$. *On a :*

$$\operatorname{Ker}\left(H^1_*(R, \mathcal{G}^{\mathfrak{X}}) \to H^1_*(K, \mathcal{G}^{\mathfrak{X}})\right) \cong g^{-1}(g([\mathfrak{X}])),$$

où g *désigne* $H^1_*(R, \mathcal{G}) \to H^1_*(K, G)$.

Démonstration. On a le diagramme commutatif suivant à flèches verticales bijectives :

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \operatorname{Ker}\left(H^1_*(R, \mathcal{G}^{\mathfrak{X}}) \to H^1_*(K, \mathcal{G}^{\mathfrak{X}})\right) \arrow[r] \arrow[d] & H^1_*(R, \mathcal{G}^{\mathfrak{X}}) \arrow[r] \arrow[d, "1 \mapsto [\mathfrak{X}]"] & H^1_*(K, \mathcal{G}^{\mathfrak{X}}) \arrow[r] \arrow[d, "1 \mapsto [\mathfrak{X}_K]"] & 1 \\
1 \arrow[r] & g^{-1}(g([\mathfrak{X}])) \arrow[r] & H^1_*(R, \mathcal{G}) \arrow[r, "f"] & H^1_*(K, G) \arrow[r] & 1.
\end{tikzcd}$$

La première ligne est exacte. La seconde ligne l'est également en choisissant $[\mathfrak{X}]$ et $[\mathfrak{X}_K]$ comme éléments neutres. D'où le résultat. $\square$

Lemme 1.13. *Soit* $[\mathfrak{X}] \in H^1_*(R, \mathcal{G})$. *On a :*

$$(\mathcal{G}^{\mathfrak{X}})(\widetilde{R})\backslash(\mathcal{G}^{\mathfrak{X}})(\widetilde{K})/(\mathcal{G}^{\mathfrak{X}})(K) \cong f^{-1}(f([\mathfrak{X}])),$$

où f *désigne* $H^1_*(R, \mathcal{G}) \to H^1_*(\widetilde{R}, \mathcal{G}) \times_{H^1_*(\widetilde{K}, G)} H^1_*(K, G)$.

Démonstration. On a le diagramme commutatif suivant à flèches verticales bijectives :

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & (\mathcal{G}^{\mathfrak{X}})(\widetilde{R})\backslash(\mathcal{G}^{\mathfrak{X}})(\widetilde{K})/(\mathcal{G}^{\mathfrak{X}})(K) \arrow[r] \arrow[d] & H^1_*(R, \mathcal{G}^{\mathfrak{X}}) \arrow[r] \arrow[d, "1 \mapsto [\mathfrak{X}]"] & H^1_*(\widetilde{R}, \mathcal{G}^{\mathfrak{X}}) \times_{H^1_*(\widetilde{K}, \mathcal{G}^{\mathfrak{X}})} H^1_*(K, \mathcal{G}^{\mathfrak{X}}) \arrow[r] \arrow[d, "(1,1) \mapsto ([\mathfrak{X}_{\widetilde{R}}], [\mathfrak{X}_K])"] & 1 \\
1 \arrow[r] & f^{-1}(f([\mathfrak{X}])) \arrow[r] & H^1_*(R, \mathcal{G}) \arrow[r, "f"] & H^1_*(\widetilde{R}, \mathcal{G}) \times_{H^1_*(\widetilde{K}, G)} H^1_*(K, G) \arrow[r] & 1.
\end{tikzcd}$$

La première ligne est exacte. La seconde ligne l'est également en choisissant $[\mathfrak{X}]$ et $([\mathfrak{X}_{\widetilde{R}}], [\mathfrak{X}_K])$ comme éléments neutres. D'où le résultat. □

Cela nous permet notamment d'avoir des résultats sur les noyaux des flèches du diagramme de la question 1.1 :

Proposition 1.14. *Notons* $\mathfrak{C}$, *l'ensemble des* $\mathcal{G}^{\mathfrak{X}}$ *pour* $[\mathfrak{X}]$ *parcourant l'ensemble* $\mathrm{Ker}\left(H^1_*(R, \mathcal{G}) \to H^1_*(K, G)\right)$ *(en choisissant qu'un seul représentant pour chaque classe d'isomorphisme). On a :*

$$\begin{array}{c} \forall \mathcal{G}' \in \mathfrak{C}, \\ \mathcal{G}'(\widetilde{R})\backslash\mathcal{G}'(\widetilde{K})/\mathcal{G}'(K) \\ \text{est trivial.} \end{array} \iff \begin{array}{c} \text{les noyaux de } H^1_*(R, \mathcal{G}) \to H^1_*(K, G) \\ \text{et } H^1_*(\widetilde{R}, \mathcal{G}) \to H^1_*(\widetilde{K}, G) \\ \text{sont en bijection naturelle.} \end{array}$$

Démonstration. Soit $[\mathfrak{X}'] \in \mathrm{Ker}\left(H^1_*(\widetilde{R}, \mathcal{G}) \to H^1_*(\widetilde{K}, \mathcal{G})\right)$. D'après le théorème précédent, le couple $(1, [\mathfrak{X}'])$ dans $H^1_*(K, G) \times_{H^1_*(\widetilde{K}, G)} H^1_*(\widetilde{R}, \mathcal{G})$ provient d'une classe $[\mathfrak{X}] \in H^1_*(\widetilde{R}, \mathcal{G})$. Par définition, son image dans $H^1_*(K, G)$ est triviale. D'où la surjectivité.

Soit un élément $[\mathfrak{X}] \in \mathrm{Ker}\left(H^1_*(R, \mathcal{G}) \to H^1_*(K, \mathcal{G})\right)$. D'après le lemme 1.13, on a l'isomorphisme $(\mathcal{G}^{\mathfrak{X}})(\widetilde{R})\backslash(\mathcal{G}^{\mathfrak{X}})(\widetilde{K})/(\mathcal{G}^{\mathfrak{X}})(K) \cong f^{-1}(f([\mathfrak{X}]))$. En conséquence, le double quotient est trivial si et seulement si $f^{-1}(f([\mathfrak{X}]))$ est trivial ; c'est-à-dire si et seulement si $[\mathfrak{X}]$ est l'unique élément de $H^1_*(R, \mathcal{G})$ qui s'envoie sur $([\mathfrak{X}_{\widetilde{R}}], 1)$ par f, ou encore, si et seulement si c'est l'unique élément de $\mathrm{Ker}\left(H^1_*(R, \mathcal{G}) \to H^1_*(K, \mathcal{G})\right)$ valant $[\mathfrak{X}_{\widetilde{R}}]$ dans $H^1_*(\widetilde{R}, \mathcal{G})$. Ceci prouve l'équivalence. □

On en déduit finalement :

Théorème 1.15. *Notons* $\mathfrak{C}$, *l'ensemble des* $\mathcal{G}^{\mathfrak{X}}$ *pour* $[\mathfrak{X}]$ *parcourant l'ensemble* $H^1_*(R, \mathcal{G})$ *(en choisissant qu'un seul représentant pour chaque classe d'isomorphisme). On a :*

$$\begin{array}{c} \forall \mathcal{G}' \in \mathfrak{C}, \\ \mathcal{G}'(\widetilde{R})\backslash\mathcal{G}'(\widetilde{K})/\mathcal{G}'(K) \\ \text{est trivial.} \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \forall \mathcal{G}' \in \mathfrak{C}, \text{les noyaux de} \\ H^1_*(R, \mathcal{G}') \to H^1_*(K, \mathcal{G}') \\ \text{et } H^1_*(\widetilde{R}, \mathcal{G}') \to H^1_*(\widetilde{K}, \mathcal{G}') \\ \text{sont en bijection naturelle.} \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \text{les fibres de} \\ H^1_*(R, \mathcal{G}) \to H^1_*(K, G) \\ \text{et } H^1_*(\widetilde{R}, \mathcal{G}) \to H^1_*(\widetilde{K}, G) \\ \text{sont en bijection naturelle.} \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \text{le diagramme de} \\ \text{la question 1.1} \\ \text{est cartésien.} \end{array}$$

Démonstration. La première équivalence est une conséquence immédiate de la proposition 1.14. La deuxième équivalence provient du lemme 1.12. Enfin, la dernière équivalence est un résultat classique sur les diagrammes cartésiens. □

En résumé, pour répondre positivement à la question d'injectivité 0.2 pour une certaine classe de groupes de Bruhat-Tits, grâce au théorème 1.15, la stratégie est d'établir les trois faits suivants :

(1) La classe des groupes de Bruhat-Tits que l'on étudie est stable par torsion intérieure (ces groupes sont toujours lisses et séparés) ;

(2) Le double quotient est trivial pour tout élément de cette classe ;

(3) La trivialité du noyau est réalisée sur $\widehat{R}$ pour tout élément de cette classe.

Bien entendu, on peut envisager une stratégie analogue si on est seulement intéressé par la trivialité du noyau grâce à la proposition 1.14.

Remarque 1.16. Comme annoncé en début de section, le lecteur peut éviter la notion d'espace algébrique en se limitant aux schémas affines (par exemple si le groupe étudié est semi-simple). Les preuves peuvent alors être simplifiées. En effet, on utilise d'une part que toute descente fpqc est effective pour les schémas affines, et d'autre part les techniques de recollements au niveau des schémas affines (cf. [MB96, Theorème 1.1]).

Remarque 1.17. Le point de vue des schémas ind-quasi-affines ([Stacks, Tag 0AP5]) ne couvre pas non plus tous les cas qui nous intéressent bien qu'ils vérifient également la descente fpqc ([Stacks, Tag 0APK]) et les techniques de recollements (cf. plus bas). En effet, le modèle de Néron $\mathcal{G}_m$ du tore $\mathbb{G}_m$ (exemple simple d'un schéma en groupes de Bruhat-Tits non affine) n'est pas ind-quasi-affine comme nous allons l'établir ci-dessous (preuve communiquée par Gabber).

Prenons R local d'uniformisante π pour simplifier. Il suffit de voir que l'union, que l'on note U, de $\pi^a\mathbb{G}_{m,R}$, $\pi^b\mathbb{G}_{m,R}$ et $\pi^c\mathbb{G}_{m,R}$ dans $\mathcal{G}_m$ pour un choix a, b, c d'entiers tous différents, n'est pas quasi-affine. En effet, U est quasi-compact, donc le caractère ind-quasi-affine devrait impliquer que U est quasi-affine par définition. Cela signifierait que $U \to \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_U(R))$ est une immersion ouverte (cf. (4) de [Stacks, Tag 01SM]) et donc que $\pi^b\mathbb{G}_{m,R} \to U \to \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_U(R))$ l'est également.

Par exemple, dans le cas où $(a, b, c) = (0, 1, 2)$, l'anneau des fonctions globales de U vaut $R[X, \pi^2 X^{-1}]$. En effet, le corps des fonctions de $\mathcal{G}_m$ est exactement $K(X, X^{-1})$. Les fonctions définies sur $\mathbb{G}_{m,R}$ sont alors $R[X, X^{-1}]$. Pour être défini également sur $\pi\mathbb{G}_{m,R}$ et $\pi^2\mathbb{G}_{m,R}$, il faut préserver $\pi R^\times$ et $\pi^2 R^\times$. On réalise alors que les fonctions en question sont exactement $R[X, \pi^2 X^{-1}]$.

Pour ce qui est de $\pi\mathbb{G}_{m,R}$, on réalise qu'il s'agit de $R[\pi^{-1}X, \pi X^{-1}]$. Le morphisme $\pi\mathbb{G}_{m,R} \to \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_U(R))$ est alors donné au niveau des algèbres par l'inclusion $R[X, \pi^2/X] \subset R[\pi^{-1}X, \pi X^{-1}]$.

De manière un peu plus formelle, cela donne le morphisme suivant :

$$R[Y_1, Y_2]/(Y_1Y_2 - \pi^2) \xrightarrow{\varphi} R[Z_1, Z_2]/(Z_1Z_2 - 1)$$
$$Y_1, Y_2 \mapsto \pi Z_1, \pi Z_2$$

Au niveau des fibres spéciales, on a donc :

$$\kappa[Y_1, Y_2]/(Y_1Y_2) \xrightarrow{\varphi} \kappa[Z_1, Z_2]/(Z_1Z_2 - 1)$$
$$Y_1, Y_2 \mapsto 0, 0$$

Autrement dit, on a la factorisation : $(\pi\mathbb{G}_{m,R})_\kappa \to \mathrm{Spec}(\kappa) \to \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_U(R))_\kappa$.

Le morphisme $\pi\mathbb{G}_{m,R} \to \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_U(R))$ ne peut donc pas être une immersion ouverte, puisque cela n'est pas le cas sur κ.

Proposition 1.18 (Techniques de recollements sur les schémas ind-quasi-affines)**.** *Notons* INDQAFF*, la catégorie fibrée des espaces algébriques ind-quasi-affines et reprenons le contexte de [MB96, 0.9] et l'hypothèse de platitude en [MB96, 1.0]. Le foncteur* $\Phi_{\mathrm{INDQAFF}/S}$ *est une équivalence de catégories.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de [MB96, Corollaire 5.4.4.] puisque les ind-quasi-affines sont séparés, vérifient la descente fpqc ([Stacks, Tag 0APK]) et que c'est une propriété locale sur la base pour la topologie fpqc ([Stacks, Tag 0AP8]). □

2. Techniques d'approximation

Dans cette partie, K désigne un corps infini (non nécessairement le corps de fractions d'un anneau de Dedekind semi-local). Soit G un groupe algébrique réductif sur K.

On considère Σ un ensemble non vide (éventuellement infini) de valuations discrètes non triviales de K deux à deux non équivalentes. Posons $K_\Sigma := \prod_{v\in\Sigma} K_v$, où les K_v sont des corps henséliens pour la valuation v contenant K. On suppose par ailleurs que K est dense dans chacun des K_v. Posons alors $G(K_\Sigma) := \prod_{v\in\Sigma} G(K_v)$. Pour tout $v \in \Sigma$, on voit également $G(K_v)$ dans $G(K_\Sigma)$ en l'identifiant avec $G(K_v) \times \prod_{w\in\Sigma\setminus\{v\}}\{1\}$.

Notons d'ailleurs que les $G(K_v)$ sont munis de la topologie adique (cf. [GGMB14, 3.1]).

Rappelons que la notation $G(K)^+$ désigne le sous-groupe de $G(K)$ engendré par les K-points des groupes de racines de G (réduit à $\{1\}$ s'il y en a pas), ou encore par les K-points des sous-groupes unipotents déployés de G, et que $RG(K)$ désigne l'ensemble des éléments R-équivalents à l'élément neutre dans $G(K)$ (cf. [CTS87, §3]). Notons alors $G(K_\Sigma)^+ := \prod_{v\in\Sigma} G(K_v)^+$ et $RG(K_\Sigma) := \prod_{v\in\Sigma} RG(K_v)$.

L'objectif de cette partie est de montrer que $G(K_\Sigma)^+ \subset \overline{G(K)}$. La motivation sous-jacente étant que $G(K_\Sigma)^+$ est un objet à la fois très maniable et suffisamment gros dans $G(K_\Sigma)$ pour nous aider à montrer la trivialité du double quotient de la partie précédente. On a même mieux. Désignons par $\overline{RG(K)}$ l'adhérence de $RG(K)$ dans $G(K_\Sigma)$. On va montrer que $G(K_\Sigma)^+ \subset \overline{RG(K)}$.

Pour tout $v \in \Sigma$, considérons donc les sous-groupes K_v-presque simples $G_{v,i}$ de $D(G)_{K_v}$, pour i dans un ensemble fini I_v (cf. [Mil17, Theorem 21.51.]).

La proposition suivante de Prasad va jouer un rôle crucial :

Proposition 2.1 ([KP23, Proposition 2.2.14])**.** *Soit L un corps valué discrètement hensélien et H un L-groupe L-presque simple. Tout sous-groupe ouvert non borné de $H(L)$ contient le sous-groupe $H(L)^+$.*

On va donc montrer que l'on est bien dans le cadre de validité de cette proposition. Pour cela, on a besoin de montrer quelques lemmes.

Commençons par le lemme suivant bien connu dont on rappelle la preuve.

Lemme 2.2. *Soit H un groupe réductif sur un corps infini L et T un tore maximal de H. Il existe $h_1, .., h_n \in H(L)$ tel que* $\mathrm{Lie}(H) = \sum_{i=1}^n {}^{h_i}\mathrm{Lie}(T)$.

Démonstration. Dans la suite, on utilise le gras pour désigner le schéma vectoriel sous-jacent à un espace vectoriel. Considérons l'application :

$$\begin{aligned} H \times \mathbf{Lie}(T) &\xrightarrow{\varphi} \mathbf{Lie}(H) \\ (h, t) &\mapsto \mathrm{ad}(h)(t) \end{aligned}$$

Elle est dominante d'après l'implication $(i) \implies (iv)$ de [SGA3, Exp. XIII, Théorème 5.1.] puisque les sous-groupes de Cartan dans un groupe réductif sont exactement les tores maximaux.

En conséquence, la H-enveloppe de $\mathbf{Lie}(T)$, - c'est à dire le plus petit sous-schéma vectoriel de $\mathbf{Lie}(H)$ contenant $\mathbf{Lie}(T)$ sur lequel H agit -, est exactement $\mathbf{Lie}(H)$.

Notons $E := \sum_{h\in H(L)} {}^h\mathrm{Lie}(T)$. C'est la $H(L)$-enveloppe de $\mathrm{Lie}(T)$. Montrons alors que $\mathbf{E}$ est H-stable. Par définition, $\mathbf{E}$ est $H(L)$-stable. Comme la H-stabilité est une condition fermée et que $H(L)$ est dense dans H (puisque H est unirationnel), on a la H-stabilité de $\mathbf{E}$ comme voulu.

Par conséquent, $\mathbf{E} = \mathbf{Lie}(H)$, et donc $E = \mathrm{Lie}(H)$. Comme $\mathrm{Lie}(H)$ est de dimension finie, la somme définissant E_0 contient un nombre fini de termes. Ceci prouve le résultat. □

Montrons maintenant que $G_{v,i}(K_v) \cap \overline{RG(K)}$ est ouvert pour tous les $G_{v,i}$.

Lemme 2.3. *Soit $v \in \Sigma$. Le sous-groupe $\overline{RG(K)} \cap G(K_v)$ est ouvert dans $G(K_v)$ (et donc $\overline{RG(K)}$ est ouvert dans $G(K_\Sigma)$ quand Σ est fini).*
En particulier, pour tout $i \in I_v$, $G_{v,i}(K_v) \cap \overline{RG(K)}$ est un sous-groupe ouvert de $G_{v,i}(K_v)$.

Démonstration. On utilise la technique de Raghunathan (qui provient de [Rag94, 1.2]). Considérons un K-tore maximal T de G. D'après le lemme 2.2, il existe $g_1, ..g_n$ tel que $\mathrm{Lie}(G) = \sum_{i=1}^n {}^{g_i}\mathrm{Lie}(T)$. Prenons une suite exacte de tores $1 \to S \to E \xrightarrow{\pi} T \to 1$ où E est quasi-trivial (par ex. une résolution flasque de T, cf. [CTS87, Proposition 1.3.(1.3.3)]).

On peut donc considérer le morphisme (seulement de schémas !) :

$$\begin{aligned} f : E^n &\longrightarrow G \\ (x_i) &\longmapsto {}^{g_1}\pi(x_1) \cdot \ldots \cdot {}^{g_n}\pi(x_n) \end{aligned}$$

On a alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Lie}(E^n) \arrow[r, "\mathrm{Lie}(f)"] \arrow[dr, two heads, "\mathrm{Lie}(\pi^n)"'] & \mathrm{Lie}(G) \\ & \mathrm{Lie}(T^n) \arrow[u, two heads, "(x_i)\mapsto\sum_{i=1}^n {}^{g_i}x_i"'] \end{tikzcd}$$

où l'on sait d'une part que $\mathrm{Lie}(E) \to \mathrm{Lie}(T)$ est surjectif puisque π est lisse car S l'est ; et d'autre part $\mathrm{Lie}(T^n) \to \mathrm{Lie}(G)$ est surjectif puisque $\mathrm{Lie}(G) = \bigoplus_{i=1}^n {}^{g_i}\mathrm{Lie}(T)$. On en déduit alors que $\mathrm{Lie}(f)$ l'est. Cela montre que f est lisse au voisinage de l'élément neutre.

D'après [GGMB14, 3.1.2 Lemme], pour tout $v \in \Sigma$, il existe un ouvert $\Omega_v \subset G(K_v)$ tel que $f^{-1}(\Omega_v) \to \Omega_v$ admette une section. Donc $\Omega_v \subset f(E(K_v)^n)$.

Comme E est quasi-trivial, il est K-rationnel (cf. [Mil17, Proposition 12.64.]). Par conséquent, d'après [CTG04, Proposition 2.1.], $E(K)$ est dense dans $\prod_{v\in\Sigma} E(K_v)$. On en déduit que $f(E(K)^n)$ est également dense dans $\prod_{v\in\Sigma} f(E(K_v)^n)$. Donc comme $f(E(K)^n) \subset RG(K)$, le groupe $\overline{RG(K)}$ contient $\prod_{v\in\Sigma} f(E(K_v)^n)$ et en particulier $\prod_{v\in\Sigma} \Omega_v$.

Comme $\overline{RG(K)} \cap G(K_v)$ contient l'ouvert non vide Ω_v, c'est un sous-groupe ouvert de $G(K_v)$. □

On se propose ensuite de montrer que $G_{v,i}(K_v) \cap \overline{RG(K)}$ est non borné pour un éventuel $G_{v,i}$ isotrope sur K_v. Pour cela, on va s'aider d'un lemme sur les tores :

Lemme 2.4. *Soit T un K-tore. On a $RT(K_\Sigma) \subset \overline{RT(K)}$.*

Démonstration. Prenons une résolution flasque $1 \to S \to E \to T \to 1$ de T. On sait que $E(K)$ est dense dans $E(K_\Sigma)$ par quasi-trivialité. Comme l'image de $E(K)$ dans $T(K)$ (resp. de $E(K_\Sigma)$ dans $T(K_\Sigma)$) est $RT(K)$ (resp. $RT(K_\Sigma)$), on a $RT(K_\Sigma) \subset \overline{RT(K)}$ (car $E(K_\Sigma) \to T(K_\Sigma)$ est continu pour la topologie adique d'après [GGMB14, 3.1.(ii)]). □

Corollaire 2.5. *$G_{v,i}$ est K_v-isotrope si et seulement si $\overline{RG(K)} \cap G_{v,i}(K_v)$ est non borné.*

Démonstration. Le sens réciproque est évident d'après [KP23, Theorem 2.2.9]. Regardons le sens direct.

Prenons $T_i \subset G_{v,i}$ un tore isotrope de $G_{v,i}$. Il est inclus dans un tore maximal T de $D(G)_{K_v}$. Comme $D(G)$ est défini sur K, par approximation faible des tores (cf. par ex. la preuve de [Guo22, Lemma 2.]), il existe $g \in D(G)(K_v)$ tel que $T' := gTg^{-1}$ soit défini sur K. Notons $T'_i := gT_ig^{-1}$. Comme $G_{v,i}$ est distingué dans $D(G)_{K_v}$, T'_i est un tore de $G_{v,i}$ qui est d'ailleurs isotrope puisque T_i l'est. Prenons un $\mathbb{G}_m$ inclus dans T'_i. Comme $\mathbb{G}_m$ est déployé, il est R-trivial. Par conséquent, on a la suite d'inclusions d'après le lemme 2.4 :

$$K_v^\times = \mathbb{G}_m(K_v) \subset RT'_i(K_v) \subset RT'_i(K_\Sigma) \subset RT'(K_\Sigma) \subset \overline{RT'(K)}.$$

Comme $T'(K_\Sigma)$ est fermé dans $G(K_\Sigma)$, la notation $\overline{RT'(K)}$ désigne le même objet, que l'on se place dans $T'(K_\Sigma)$ ou bien dans $G(K_\Sigma)$. Comme on a évidemment $RT'(K) \subset RG(K)$, on a $\overline{RT'(K)} \subset \overline{RG(K)}$. Mais donc, $K_v^\times$ appartient à $\overline{RG(K)} \cap G_{v,i}(K_v)$, on en déduit que ce dernier est non borné comme voulu ! □

On a donc enfin prouvé les lemmes nécessaires à notre théorème :

Théorème 2.6. *Soit G un K-groupe réductif. On a :*

$$G(K_\Sigma)^+ = D(G)(K_\Sigma)^+ \subset \overline{RD(G)(K)} \subset \overline{RG(K)} \subset \overline{G(K)} \subset G(K_\Sigma).$$

Démonstration. Prenons $v \in \Sigma$. On a que $G_{v,i}(K_v) \cap \overline{RG(K)}$ est sous-groupe ouvert (d'après le lemme 2.3) non borné (d'après le corollaire 2.5) de $G_{v,i}(K_v)$ pour tout $G_{v,i}$ isotrope. Ceci implique alors que $G_{v,i}(K_v)^+ \subset \overline{RG(K)}$ d'après la proposition 2.1.

Observons ensuite que, d'après [Mil17, Theorem 21.51.], le morphisme naturel $\prod_{i \in I_v} G_{v,i} \to D(G)_{K_v}$ est une isogénie. D'après [BT73, Corollaire 6.3.], il envoie surjectivement $\prod_{i \in I_v} G_{v,i}(K_v)^+$ sur $D(G)(K_v)^+$. Autrement dit, les $G_{v,i}(K_v)^+$ engendrent $D(G)(K_v)^+$. Par ailleurs, notons que $D(G)(K_\Sigma)^+$ et $G(K_\Sigma)^+$ sont les mêmes groupes dans $G(K_\Sigma)$ grâce à [BT73, Corollaire 6.3.] appliqué à $D(G) \to G$.

On conclut donc des deux paragraphes précédents que $G(K_\Sigma)^+ \subset \overline{RG(K)}$. En appliquant ce que l'on vient de faire pour $G = D(G)$, on trouve $D(G)(K_\Sigma)^+ \subset \overline{RD(G)(K)}$. Il suffit alors d'utiliser que $RD(G)(K) \subset RG(K) \subset G(K)$ et que les inclusions passent à l'adhérence pour en déduire le théorème. □

Remarque 2.7. De toute évidence, $RG(K)$ et donc $\overline{RG(K)}$ est inclus dans $\prod_{v \in \Sigma} RG(K_v)$ (un produit quelconque de fermés est fermé). Par conséquent, si G est semi-simple simplement connexe, le théorème précédent dit que, si pour tout $v \in \Sigma$, G_{K_v} est strictement isotrope, alors $\prod_{v \in \Sigma} RG(K_v) = G(K_\Sigma)^+ = \overline{RG(K)}$ (d'après [Gil09, Théorème 7.2.]). Dans le cas où on a un $G_{v,i}$ anisotrope, on ne sait pas si $RG_{v,i}(K_v) \subset \overline{RG(K)}$; cela impliquerait l'égalité $\prod_{v \in \Sigma} RG(K_v) = \overline{RG(K)}$ en toute généralité (puisque dans ce cas, $G_{K_v} = \prod_{i \in I_v} G_{v,i}$, cf. [Mil17, Theorem 24.3.]).

Il y a toutefois un cas où l'on peut conclure que l'égalité est effectivement réalisée :

Pour un groupe de type ${}^1A_n$, c'est-à-dire de la forme $G := \mathrm{SL}_1(D)$, où D est une algèbre à division de dimension finie sur K, on a bien $RG(K_v) \subset \overline{RG(K)}$. En effet, $RG(K) = [D^\times, D^\times]$ d'après [Vos77]. De même, en posant $D_v := D \otimes_K K_v$, $RG(K_v) = [D_v^\times, D_v^\times]$. Par conséquent, le fait que $[D_v^\times, D_v^\times] \subset \overline{[D^\times, D^\times]}$ (puisque $D^\times$ vérifie l'approximation faible) donne le résultat.

On a également la proposition suivante en complément :

Proposition 2.8. *Soit T un K-tore de G. On a $RT(K_\Sigma) \subset \overline{RG(K)}$. En particulier, si T est R-trivial (par ex. si T est déployé), alors on a $T(K_\Sigma) \subset \overline{RG(K)}$.*

Par ailleurs, pour T un K_Σ-tore inclus dans G_{K_Σ} (c'est à dire la donnée de tores dans chaque G_{K_v}), il existe $g \in G(K_\Sigma)$ tel que l'on ait $gRT(K_\Sigma)g^{-1} \subset \overline{RG(K)}$. En particulier, si T est R-trivial, alors on a $gT(K_\Sigma)g^{-1} \subset \overline{RG(K)}$.

Démonstration. Soit T un K-tore de G. On sait déjà d'après le lemme 2.4 que $RT(K_\Sigma) \subset \overline{T(K)}$. Comme $T(K_\Sigma)$ est fermé dans $G(K_\Sigma)$, la notation $\overline{RT(K)}$ désigne le même objet, que l'on se place dans $T(K_\Sigma)$ ou bien dans $G(K_\Sigma)$. Comme on a évidemment $RT(K) \subset RG(K)$, on a $\overline{RT(K)} \subset \overline{RG(K)}$. D'où $RT(K_\Sigma) \subset \overline{RG(K)}$.

Prenons désormais T un K_Σ-tore de G_{K_Σ}. On écrit $T = \prod_{v\in\Sigma} T_v$ tel que pour tout $v \in \Sigma$, T_v est un K_v-tore. Prenons $v \in \Sigma$. Par approximation faible des tores (cf. par ex. la preuve de [Guo22, Lemma 2.]), il existe $g_v \in G(K_v)$ tel que $T'_v := g_v T_v g_v^{-1}$ soit défini sur K.

Observons alors, d'après le début de la preuve, les inclusions suivantes :

$$g_v RT_v(K_v) g_v^{-1} = RT'_v(K_v) \subset RT'_v(K_\Sigma) \subset \overline{RG(K)}.$$

D'où $gRT(K_\Sigma)g^{-1} \subset \overline{RG(K)}$ en posant $g = (g_v)_{v\in\Sigma}$. □

Remarque 2.9. On ignore en général si $\overline{RG(K)}$ (ou $\overline{G(K)}$) est un sous-groupe distingué de $G(K_\Sigma)$.

Terminons cette partie avec le lemme général suivant.

Lemme 2.10. *Soit H un groupe topologique, E une partie de H et U un sous-groupe ouvert de H.*

(1) L'ensemble $EU := \{eu \mid (e,u) \in E \times U\}$ est ouvert et fermé dans H.

(2) On a $EU = \overline{E}U$, où $\overline{E}$ est l'adhérence de E dans H.

Démonstration. D'après [Bou42, Chapitre III, §2, 5., Proposition 14.], H/U vu en tant qu'espace topologique homogène est discret. Notons $p : H \to H/U$ la projection. En particulier, $p(E)$ est ouvert et fermé dans H/U. Par conséquent, $EU = p^{-1}(p(E))$ est ouvert et fermé dans H par continuité de p.

Le second point provient du précédent. En effet, on a alors : $EU \subset \overline{E}U \subset \overline{EU} = EU$. □

Comme cela est vu en partie 3, ce lemme nous permet de faire le pont entre $\overline{G(K)}$ et le double quotient obtenu par les méthodes de recollements.

3. Résultats principaux

Reprenons maintenant notre contexte général, c'est-à-dire R semi-local de Dedekind, K son corps de fractions, $\widetilde{R}$ et $\widetilde{K}$, etc. Par ailleurs, toutes les définitions de [Zid] se généralisent à $\widetilde{K} = \prod_{\mathfrak{m}\in\mathrm{Specm}(R)} \widetilde{K}_{\mathfrak{m}}$ en considérant tout facteur par facteur.

Rappelons notamment qu'un sous-groupe H de $G(\widetilde{K})$ est dit global s'il est ouvert et qu'il contient $G(\widetilde{K})^+$. Un tel groupe est dit également conforme si son action sur $\mathscr{B}(G_{\widetilde{K}})$ préserve les types (cf. [Zid, Définition 2.1.]).

Commençons par récolter des informations relatives au double quotient.

Lemme 3.1. *Soit $\mathcal{G}$ un schéma en groupes localement de présentation finie et séparé sur $\widetilde{R}$. Supposons que $G := \mathcal{G}_{\widetilde{K}}$ soit réductif. Prenons H un sous-groupe global de $G(\widetilde{K})$, un appartement $\mathcal{A}$ de $\mathscr{B}(G_{\widetilde{K}})$ et $\mathcal{C}$, une chambre dans $\mathcal{A}$. Supposons que $H_{(\mathcal{A},\mathcal{C})} \subset \mathcal{G}(\widetilde{R})$.*

(1) On a $H \subset G(\widetilde{K})^+ \, \mathcal{G}(\widetilde{R})$.

(2) Si de plus $\mathcal{G}$ est défini sur R, et donc G sur K, pour $g \in G(\widetilde{K})$, on a également $G(K)\, g\, \mathcal{G}(\widetilde{R}) = \overline{G(K)}\, g\, \mathcal{G}(\widetilde{R})$, $g\, G(\widetilde{K})^+ \, \mathcal{G}(\widetilde{R}) \subset G(K)\, g\, \mathcal{G}(\widetilde{R})$, et $gH \subset G(K)\, g\, \mathcal{G}(\widetilde{R})$.

Démonstration.

(1) Notons que $G(\widetilde{K})^+ \, \mathcal{G}(\widetilde{R})$ est un sous-groupe de $G(\widetilde{K})$ puisque $G(\widetilde{K})^+$ est distingué dans $G(\widetilde{K})$ (cf. [BT73, 6.1.]). On a donc $H = G(\widetilde{K})^+ \, H_{(\mathcal{A},\mathcal{C})} \subset G(\widetilde{K})^+ \, \mathcal{G}(\widetilde{R})$ d'après [Zid, Lemme 2.8.].

(2) D'après le lemme 2.10, on a $G(K)\, g\, \mathcal{G}(\widetilde{R}) = \overline{G(K) g}\, \mathcal{G}(\widetilde{R}) = \overline{G(K)}\, g\, \mathcal{G}(\widetilde{R})$. En effet, il suffit de voir que $\mathcal{G}(\widetilde{R})$ est un sous-groupe ouvert de $G(\widetilde{K})$. C'est bien le cas car les $\mathcal{G}(\widetilde{R}_{\mathfrak{m}})$ sont ouverts dans les $G(\widetilde{K}_{\mathfrak{m}})$ d'après [GMB23, 3.5.1 Lemme.].

Ceci étant, on peut utiliser le théorème 2.6 qui nous dit que $G(\widetilde{K})^+ \subset \overline{G(K)}$. En particulier,

$$g\, G(\widetilde{K})^+ \, \mathcal{G}(\widetilde{R}) = G(\widetilde{K})^+ \, g\, \mathcal{G}(\widetilde{R}) \subset \overline{G(K)}\, g\, \mathcal{G}(\widetilde{R}) = G(K)\, g\, \mathcal{G}(\widetilde{R}).$$

D'où le résultat d'après la première partie du lemme.

□

On en déduit donc :

Proposition 3.2. *Reprenons le contexte du lemme précédent ($\mathcal{G}$ supposé défini sur R). Lorsque cela a du sens (par exemple quand $G(K)\mathcal{G}(\widetilde{R})$ est un sous-groupe de $G(\widetilde{K})$), on note $c'(\mathcal{G}) := G(\widetilde{K})/G(K)\, \mathcal{G}(\widetilde{R})$. Supposons que $D(Z(\widetilde{K})) \subset H$, où Z est un sous-groupe de Levi de $G_{\widetilde{K}}$.*

*(1) H et $G(K)\, H$ sont des sous-groupes distingués de $G(\widetilde{K})$ de quotient abélien.
On note $c_H(G) := G(\widetilde{K})/G(K)\, H$ le quotient de $G(\widetilde{K})$ par $G(K)\, H$.*

(2) Si $H_{(\mathcal{A},\mathcal{C})} \subset \mathcal{G}(\widetilde{R})$ (resp. $H = G(\widetilde{K})^+ \, \mathcal{G}(\widetilde{R})$), alors $G(K)\, \mathcal{G}(\widetilde{R})$ est un sous-groupe distingué de $G(\widetilde{K})$ contenant $G(K)\, H$ (resp. est égal à $G(K)\, H$) et de quotient abélien. D'où une flèche surjective (resp. bijective) $c_H(G) \to c'(\mathcal{G})$. De plus, on a une bijection canonique :

$$c(\mathcal{G}) := G(K)\backslash G(\widetilde{K})/\mathcal{G}(\widetilde{R}) \xrightarrow{\sim} G(\widetilde{K})/G(K)\, \mathcal{G}(\widetilde{R}) =: c'(\mathcal{G}).$$

En particulier, $c(\mathcal{G})$ a une structure de groupe abélien.

Démonstration.

(1) D'après [Zid, Lemme 1.5.], on a $D(G(\widetilde{K})) = G(\widetilde{K})^+ \, D(Z(\widetilde{K}))$. Par conséquent :
$$D(G(\widetilde{K})) = G(\widetilde{K})^+ \, D(Z(\widetilde{K})) \subset H \subset G(K)\, H.$$
Comme l'image de H et de $G(K)H$ dans $G(\widetilde{K})^{\mathrm{ab}}$ sont des groupes distingués (car abéliens), il en est de même pour H et $G(K)\, H$, et leurs quotients par $G(\widetilde{K})$ sont bien sûr abéliens.

(2) D'après le lemme 3.1, on a $H \subset G(\widetilde{K})^+ \, \mathcal{G}(\widetilde{R})$. On observe alors :
$$D(G(\widetilde{K})) \subset H \subset G(\widetilde{K})^+ \, \mathcal{G}(\widetilde{R}) \subset \overline{G(K)}\, \mathcal{G}(\widetilde{R}) = G(K)\, \mathcal{G}(\widetilde{R}).$$
On conclut alors comme précédemment.

Pour le dernier point, il suffit d'observer que, étant donné $g \in G(\widetilde{K})$, on a :
$$\overline{G(K)} \left(g\, G(\widetilde{K})^+ \; \mathcal{G}(\widetilde{R}) \right) = \overline{G(K)} \left(G(\widetilde{K})^+ \, g\, \mathcal{G}(\widetilde{R}) \right) = \overline{G(K)}\, G(\widetilde{K})^+ \, g\, \mathcal{G}(\widetilde{R}) = \overline{G(K)}\, g\, \mathcal{G}(\widetilde{R}).$$

D'où finalement :
$$G(K)\, g\, \mathcal{G}(\widetilde{R}) = \overline{G(K)}\, g\, \mathcal{G}(\widetilde{R}) = \overline{G(K)}\, g \left(\mathcal{G}(\widetilde{R}) \;\; G(\widetilde{K})^+ \right) = \left(\mathcal{G}(\widetilde{R}) \; G(\widetilde{K})^+ \right) \overline{G(K)}\, g = \mathcal{G}(\widetilde{R}) \overline{G(K)}\, g = \mathcal{G}(\widetilde{R})\, G(K)\, g$$
puisque $G(\widetilde{K})^+ \mathcal{G}(\widetilde{R})$ est un sous-groupe distingué de $G(\widetilde{K})$ (car contient $D(G(\widetilde{K}))$) et $G(K)\, g\, \mathcal{G}(\widetilde{R}) = \overline{G(K)}\, g\, \mathcal{G}(\widetilde{R})$ d'après le lemme 3.1.

□

Lemme 3.3. *Soient G un K-groupe réductif, S un $\widetilde{K}$-tore déployé de G et $Z := Z_{G_{\widetilde{K}}}(S)$ (Z désigne donc cette fois un sous-groupe de Levi de $G_{\widetilde{K}}$ non nécessairement minimal). Notons $p : Z(\widetilde{K}) \to (Z/S)(\widetilde{K})$ la projection canonique. Prenons également H un sous-groupe global de $G(\widetilde{K})$ tel que $D(Z(\widetilde{K})) \subset H$.*

(1) Le sous-groupe $H \cap Z(\widetilde{K})$ est global dans $Z(\widetilde{K})$.
De plus, p est ouvert et $p(H \cap Z(\widetilde{K}))$ est global dans $(Z/S)(\widetilde{K})$.

(2) On a :
$$(Z/S)(\widetilde{K})/p(H \cap Z(\widetilde{K})) \xleftarrow{\sim} Z(\widetilde{K})/S(\widetilde{K})\, (H \cap Z(\widetilde{K})) \twoheadrightarrow c_H(G).$$

(3) Si de plus S est défini sur K, alors Z également, et on a :
$$\begin{aligned} c_{p(H \cap Z(\widetilde{K}))}(Z/S) &= (Z/S)(\widetilde{K})/(p(H \cap Z(\widetilde{K}))\, (Z/S)(K)) \\ &\xleftarrow{\sim} Z(\widetilde{K})/((H \cap Z(\widetilde{K}))\, Z(K)\, S(\widetilde{K})) = c_{H \cap Z(\widetilde{K})}(Z) \twoheadrightarrow c_H(G). \end{aligned}$$

Démonstration.

(1) Comme $Z(\widetilde{K})$ et $(Z/S)(\widetilde{K})$ n'ont pas de sous-groupes de racines (car n'ont pas de cocaractères non centraux), on a $Z(\widetilde{K})^+$ et $(Z/S)(\widetilde{K})^+$ qui sont triviaux. Par conséquent, un sous-groupe de $Z(\widetilde{K})$ (ou $(Z/S)(\widetilde{K})$) est global si et seulement s'il est ouvert.

Le sous-groupe $H \cap Z(\widetilde{K})$ est bien sûr ouvert dans $Z(\widetilde{K})$ puisque ce dernier est muni de la topologie induite par celle de $G(\widetilde{K})$ et H est ouvert dans $G(\widetilde{K})$.

Par ailleurs, p est ouvert d'après [GGMB14, 3.1.2 Lemme] puisque $Z \to Z/S$ est lisse (car son noyau S est lisse). Par conséquent, $p(H \cap Z(\widetilde{K}))$ est ouvert dans $(Z/S)(\widetilde{K})$.

(2) Le théorème 90 de Hilbert montre que $(Z/S)(\widetilde{K}) = Z(\widetilde{K})/S(\widetilde{K})$. L'isomorphisme est donc une conséquence du troisième théorème d'isomorphisme ([Bou70, §4, 6., Théorème 4.b)]).

Par ailleurs, d'après la proposition 2.8, on a $S(\widetilde{K}) \subset \overline{G(K)}\, H = G(K)\, H$. Donc $(H \cap Z(\widetilde{K})\, S(\widetilde{K}) \subset G(K)\, H$. La surjectivité $Z(\widetilde{K}) \twoheadrightarrow c_H(G)$ vient du fait que $G(\widetilde{K}) = G(\widetilde{K})^+\, Z(\widetilde{K})$ et que $G(\widetilde{K})^+ \subset H$. Il suffit donc de quotienter par $(H \cap Z(\widetilde{K}))\, S(\widetilde{K})$ pour obtenir la flèche surjective voulue.

(3) Enfin, le théorème 90 de Hilbert et le troisième théorème d'isomorphisme donne encore l'isomorphisme. Il suffit ensuite de voir que

$$S(\widetilde{K}) \subset (H \cap Z(\widetilde{K}))\, \overline{Z(K)} = (H \cap Z(\widetilde{K}))\, Z(K)$$

d'après le lemme 2.10 et la proposition 2.8 pour obtenir l'égalité $Z(\widetilde{K})/((H \cap Z(\widetilde{K}))\, Z(K)\, S(\widetilde{K})) = c_{H\cap Z(\widetilde{K})}(Z)$. Enfin, la flèche surjective se construit comme précédemment en observant que $(H \cap Z(\widetilde{K}))\, Z(K) \subset H\, G(K)$.

□

Faisons ensuite le pont entre la cohomologie galoisienne et la cohomologie étale par le lemme simple suivant :

Lemme 3.4. *Soit $\mathcal{G}$ un schéma en groupes lisse sur $\widetilde{R}$. Notons $G := \mathcal{G}_{\widetilde{K}}$. Rappelons que $\Gamma^{\mathrm{nr}} := \prod_{\mathfrak{m}\in \mathrm{Specm}(R)} \Gamma^{\mathrm{nr}}_{\mathfrak{m}}$ agit naturellement sur $G(\widetilde{K}) = \prod_{\mathfrak{m}\in \mathrm{Specm}(R)} G(\widetilde{K}_{\mathfrak{m}})$. On a :*

$$\mathrm{Ker}\left(H^1_{\text{ét}}(\widetilde{R}, \mathcal{G}) \to H^1_{\text{ét}}(\widetilde{K}, G)\right) = \mathrm{Ker}\left(H^1(\Gamma^{\mathrm{nr}}, \mathcal{G}(\widetilde{R}^{\mathrm{nr}})) \to H^1(\Gamma^{\mathrm{nr}}, G(\widetilde{K}^{\mathrm{nr}}))\right).$$

Démonstration. De toute évidence, l'égalité peut se montrer facteur par facteur. Autrement dit, on peut se ramener au cas où $\widetilde{R}$ est un anneau de valuation discrète hensélien. Observons que $H^1(\Gamma, G(\widetilde{K}^s)) = H^1_{\text{ét}}(\widetilde{K}, G)$ d'après [MA64, VIII, Corollaire 2.3.] (où Γ désigne le groupe de Galois absolu de $\widetilde{K}$). Par ailleurs, $H^1(\Gamma^{\mathrm{nr}}, \mathcal{G}(\widetilde{R}^{\mathrm{nr}}))$ vaut $H^1_{\text{ét}}(\widetilde{R}, \mathcal{G})$. Cela est une conséquence de [Gil15, 2.9.2.(2)] et du fait que $H^1_{\text{ét}}(\widetilde{R}^{\mathrm{nr}}, \mathcal{G}) = 1$ puisque $H^1_{\text{ét}}(\widetilde{R}^{\mathrm{nr}}, \mathcal{G}) \cong H^1_{\text{ét}}(\kappa^s, \mathcal{G})$ d'après [SGA3, XXIV, Proposition 8.1.].

Observons ensuite que l'application naturelle $H^1(\Gamma^{\mathrm{nr}}, \mathcal{G}(\widetilde{R}^{\mathrm{nr}})) \to H^1(\Gamma, G(\widetilde{K}^s))$ se factorise par $H^1(\Gamma^{\mathrm{nr}}, G(\widetilde{K}^{\mathrm{nr}}))$. D'après la suite exacte inflation-restriction ([Ser94, I.§5.8.a)]), on a l'injection $H^1(\Gamma^{\mathrm{nr}}, G(\widetilde{K}^{\mathrm{nr}})) \to H^1(\Gamma, G(\widetilde{K}^{\mathrm{s}}))$. Ceci permet de conclure. □

Dans la preuve précédente, on a également montré que $H^1(\Gamma^{\mathrm{nr}}, \mathcal{G}(\widetilde{R}^{\mathrm{nr}})) = H^1_{\text{ét}}(\widetilde{R}, \mathcal{G})$. En fait, tout $\widetilde{R}$-torseur sur $\mathcal{G}$ provient d'un unique cocycle dans $Z^1(\Gamma^{\mathrm{nr}}, \mathcal{G}(\widetilde{R}^{\mathrm{nr}}))$ (cf. [Gil15, Lemme 2.2.1.] et [Gil15, 2.9. Calculs galoisiens.]). Comme dans la fin de la section [Zid, 4.], on définit alors le tordu ${}^z\mathcal{G}$ de $\mathcal{G}$ par un cocycle $z \in Z^1(\Gamma^{\mathrm{nr}}, \mathcal{G}(\widetilde{R}^{\mathrm{nr}}))$ comme étant le tordu au travers du torseur que z définit.

Démontrons maintenant les principaux théorèmes de cet article. Afin de rester fidèle à la définition 0.1, nous utilisons ici les complétés (i.e. $\widehat{K}$ au lieu de $\widetilde{K}$). On a tout d'abord le théorème suivant :

Théorème 3.5. *Soit G un groupe réductif sur K tel que $G(\widehat{K}^{\mathrm{nr}})$ est conforme. L'application suivante est injective :*

$$H^1_{\text{ét}}(R, \mathcal{G}) \to H^1_{\text{ét}}(K, G)$$

où $\mathcal{G}$ est un R-schéma en groupes stabilisateur d'une facette de G.

Démonstration. D'après le théorème 1.15, il suffit de montrer que la classe des groupes de Bruhat-Tits étudiée est stable par torsion intérieure, que le double quotient est trivial pour tout élément de cette classe, et que la trivialité du noyau de l'application est réalisée sur $\widehat{R}$.

Regardons la stabilité. Pour $\mathfrak{X}$, un $\mathcal{G}$-torseur sur R, le tordu $\mathcal{G}^{\mathfrak{X}}$ est un schéma en groupes de fibre générique $G^{\mathfrak{X}_K}$. Ce dernier groupe est d'ailleurs isomorphe sur $\widehat{K}^{\mathrm{nr}}$ à $G_{\widehat{K}^{\mathrm{nr}}}$. En particulier, $(G^{\mathfrak{X}_K})(\widehat{K}^{\mathrm{nr}}) \cong G(\widehat{K}^{\mathrm{nr}})$ est conforme. Considérons maintenant $\mathfrak{X}_{\widehat{R}}$. Il provient d'un unique cocycle $z \in Z^1(\Gamma^{\mathrm{nr}}, \mathcal{G}(\widehat{R}^{\mathrm{nr}}))$. D'après [Zid, Proposition 4.14.(3)], le tordu ${}^z\mathcal{G}_{\widehat{R}}$ est un schéma en groupes stabilisateur d'une facette de $(\mathcal{G}^{\mathfrak{X}})_{\widehat{K}}$. Par définition, $\mathcal{G}$ l'est donc. Ceci conclut la stabilité.

Le double quotient est trivial. En effet, prenons $\mathcal{C}$, une chambre de $\mathscr{B}(G_{\widehat{K}})$ contenant la facette de l'énoncé du théorème. Comme $G(\widehat{K}^{\mathrm{nr}})$ est conforme, $G(\widehat{K})$ est donc $\widehat{K}$-conforme. Par conséquent, $G(\widehat{K})_{\mathcal{C}}$ fixe $\mathcal{C}$ et donc la facette. Donc $G(\widehat{K})_{\mathcal{C}} \subset \mathcal{G}(\widehat{R})$. D'après le lemme 3.1, $G(\widehat{K}) \subset G(K)\mathcal{G}(\widehat{R})$.

Enfin, montrons que la trivialité du noyau est réalisée sur $\widehat{R}$. D'après le lemme 3.4, l'énoncé sous forme de cohomologie étale est équivalent à un énoncé sous forme de cohomologie galoisienne sur Γ^{nr}. Le résultat découle alors de [Zid, Corollaire 4.7.] puisque $G(\widehat{K}^{\mathrm{nr}})$ est conforme. □

Du théorème 3.5, on en déduit :

Corollaire 3.6. *Soit G un groupe semi-simple simplement connexe quasi-déployé sur $\widehat{K}^{\mathrm{nr}}$ (c'est-à-dire, tel que, pour tout $\mathfrak{m} \in \mathrm{Specm}(R)$, $G_{\widehat{K}_{\mathfrak{m}}^{\mathrm{nr}}}$ est quasi-déployé). L'application suivante est injective :*

$$H^1_{\text{ét}}(R, \mathcal{G}) \to H^1_{\text{ét}}(K, G)$$

où $\mathcal{G}$ est un schéma en groupes stabilisateur d'une facette de G (ou encore parahorique de G, les deux coïncident).

Démonstration. D'après le théorème 3.5, il suffit de voir que $G(\widehat{K}^{\mathrm{nr}})$ est conforme. C'est une conséquence de [BT84, 5.2.10.(i)]. Le résultat [BT84, 5.2.9.] assure également que $\mathcal{G}$ est à fibres connexes. □

Cela permet d'en déduire le théorème 0.3 :

Démonstration du théorème 0.3. D'après le corollaire précédent, il suffit de montrer que tout groupe semi-simple simplement connexe sur un corps valué hensélien à corps résiduel parfait est quasi-déployé sur l'extension maximale non ramifiée. C'est en effet le cas d'après [BT84, 5.1.1.]. □

Remarque 3.7. Il est raisonnable de se demander si le corollaire s'étend à des groupes semi-simples simplement connexes non quasi-déployés sur $\widehat{K}^{\mathrm{nr}}$. Cela est une question délicate qui nécessite une étude séparée qui va être réalisée dans un article ultérieur.

Ce résultat donne en particulier le cas semi-simple simplement connexe du théorème de Nisnevich-Guo. Avec un peu plus d'efforts, on peut également prouver le cas réductif :

Théorème 3.8. *Soit G un groupe réductif sur R. L'application suivante est injective :*

$$H^1_{\text{ét}}(R, G) \to H^1_{\text{ét}}(K, G).$$

Démonstration. Comme précédemment, grâce au théorème 1.15, il suffit de montrer que la classe des groupes réductifs sur R est stable par torsion intérieure, que le double quotient est trivial pour tout élément de cette classe, et que la trivialité du noyau de l'application est réalisée sur $\widehat{R}$.

La stabilité vient du fait qu'être réductif est local pour la topologie étale (cf. [SGA3, Exp. XIX, Définition 2.7.]).

Montrons maintenant que le double-quotient est trivial. Comme G est réductif sur R, on peut prendre un R-tore déployé maximal $\mathcal{S}$ (de fibre générique S) et $\mathcal{Z}$ (de fibre générique Z) le sous-groupe de Levi minimal associé (et Z est un sous-groupe de Levi minimal de G_K pour S). Le quotient $\mathcal{Z}/\mathcal{S}$ est alors un modèle réductif de Z/S et

$$(\mathcal{Z}/\mathcal{S})(\widehat{R}) = (\mathcal{Z}/\mathcal{S})(\widehat{K}) = (Z/S)(\widehat{K})$$

d'après [Zid, Lemme 5.2.], de telle sorte que Hilbert 90 donne que $\mathcal{Z}(\widehat{R})\, S(\widehat{K}) = Z(\widehat{K})$. Or, [Zid, Lemme 5.2.] donne que $\mathcal{Z}(\widehat{R}) = Z(\widehat{K})^1$. Donc :

$$D(Z(\widehat{K})) \subset D(Z)(\widehat{K}) \subset Z(\widehat{K})^1 = \mathcal{Z}(\widehat{R}) \subset G(\widehat{R}) \subset G(\widehat{K})^+\, G(\widehat{R}).$$

D'après le point (2) du lemme 3.3 et la décomposition obtenue, on a donc $G(K)\left(G(\widehat{K})^+\, G(\widehat{R})\right)$. Mais le lemme 3.1 donne que $G(\widehat{K})^+\, G(\widehat{R}) \subset G(K)\, G(\widehat{R})$. D'où finalement $G(\widehat{K}) = G(K)\, G(\widehat{R})$ comme voulu.

Enfin, montrons le cas hensélien. D'après [Zid, Lemme 5.2.], on peut revenir à l'étude de points hyperspéciaux. D'après le lemme 3.4, comme précédemment, on se ramène à un énoncé sous forme de cohomologie galoisienne sur Γ^{nr}. Le résultat est alors une conséquence de [Zid, Proposition 5.5.]. □

Le cas particulier où la facette est une chambre donne également un résultat positif :

Théorème 3.9. *Soit G un groupe réductif sur K. Soit $\mathcal{G}$, un R-schéma en groupes stabilisateur d'une chambre de G. Considérons l'application suivante :*

$$H^1_{\text{ét}}(R, \mathcal{G}) \to H^1_{\text{ét}}(K, G).$$

(1) *L'application est de noyau trivial.*

(2) *Si de plus $G_{\widehat{K}}$ est résiduellement quasi-déployé, alors l'application est injective.*

Démonstration.

(1) D'après la proposition 1.14, il faut montrer que tordre $\mathcal{G}$ par un élément d'une classe dans $\mathrm{Ker}\left(H^1_{\text{ét}}(R, \mathcal{G}) \to H^1_{\text{ét}}(K, G)\right)$ donne toujours un schéma en groupes stabilisateur d'une chambre, puis que la trivialité du double quotient et du noyau sur $\widehat{R}$ est réalisée pour ces groupes.

La trivialité du noyau sur $\widehat{R}$ se ramène encore à de la cohomologie galoisienne sur Γ^{nr} d'après le lemme 3.4. On conclut alors en utilisant [Zid, Corollaire 4.8.].

De ceci, on en déduit également la stabilité, car être un schéma en groupes stabilisateur d'une chambre se vérifie sur $\widehat{R}$. Or, par trivialité sur noyau sur $\widehat{R}$, tout tordu de $\mathcal{G}$ par un élément de $\mathrm{Ker}\left(H^1_{\text{ét}}(R, \mathcal{G}) \to H^1_{\text{ét}}(K, G)\right)$ est isomorphe sur $\widehat{R}$ à $\mathcal{G}_{\widehat{R}}$.

Enfin, le double quotient $\mathcal{G}(\widehat{R})\backslash G(\widehat{K})/G(K)$ est trivial d'après le lemme 3.1. En effet, comme $G(\widehat{K})_{(\mathcal{A},\mathcal{C})} \subset G(\widehat{K})_{\mathcal{C}} = \mathcal{G}(\widehat{R})$ le point (2) donne $G(\widehat{K}) \subset G(K)\mathcal{G}(\widehat{R})$.

(2) Toujours grâce au théorème 1.15, il suffit de montrer que la classe des groupes sur R que l'on considère est stable par torsion intérieure, que le double quotient est trivial pour tout élément de cette classe, et que la trivialité du noyau de l'application est réalisée sur $\widehat{R}$.

Considérons $\mathcal{C}$, la $\widehat{K}$-chambre associée à $\mathcal{G}$ et la Γ^{nr}-chambre $\widetilde{\mathcal{C}}$ correspondante. Prenons $\mathfrak{X}$, un $\mathcal{G}$-torseur sur R et un cocycle $z \in Z^1(\Gamma^{\mathrm{nr}}, G(\widehat{K}^{\mathrm{nr}})_{\widetilde{\mathcal{C}}})$ correspondant à $\mathfrak{X}_{\widehat{R}}$. Le point crucial à observer est que $\widetilde{\mathcal{C}}$ est Γ^{nr}-invariant dans le tordu ${}^z\mathscr{B}(G_{\widehat{K}^{\mathrm{nr}}})$ d'après [Zid, Proposition 4.13.(1)]. Puisque $G_{\widehat{K}}$ est résiduellement quasi-déployé, $\widetilde{\mathcal{C}}$ est une $\widehat{K}^{\mathrm{nr}}$-chambre. Cela signifie donc que ${}^zG_{\widehat{K}}$ est également résiduellement quasi-déployé, que ${}^z\mathcal{C}$ est une $\widehat{K}$-chambre de $\mathscr{B}({}^zG_{\widehat{K}})$, et que ${}^z\mathcal{G}_{\widehat{R}}$ est un schéma en groupes stabilisateur de ${}^z\mathcal{C}$ d'après [Zid, Proposition 4.14.]. Il en est donc de même pour $\mathcal{G}^{\mathfrak{X}}$.

La trivialité du double quotient et l'injectivité dans le cas de $\widehat{R}$ se fait alors comme précédemment.

□

Terminons enfin cet article en calculant de manière exacte le noyau :

$$\mathrm{Ker}\left(H^1_{\text{ét}}(R,\mathcal{G}) \to H^1_{\text{ét}}(K,G)\right)$$

pour les K-groupes G semi-simples adjoints et quasi-déployés sur $\widehat{K}$, et où $\mathcal{G}$ est un schéma en groupes stabilisateur d'une facette de G ou un schéma en groupes parahorique de G.

Commençons donc par montrer que le double quotient $\mathcal{G}(\widehat{R})\backslash G(\widehat{K})/G(K)$ est trivial :

Lemme 3.10. *Soit G un groupe semi-simple adjoint sur K et quasi-déployé sur $\widetilde{K}$. On a $G(\widetilde{K}) = \overline{RG(K)}$. En particulier, $G(\widetilde{K}) = G(K)\,\mathcal{G}(\widetilde{R})$ pour n'importe quel schéma en groupes $\mathcal{G}$ localement de présentation finie et séparé sur R tel que $\mathcal{G}_K = G$.*

Démonstration. D'après le théorème 2.6 et la proposition 2.8, on a d'une part $G(\widetilde{K})^+ \subset \overline{RG(K)}$, et d'autre part l'existence d'un $g \in G(\widetilde{K})$ tel que $g\,T(\widetilde{K})\,g^{-1} \subset \overline{RG(K)}$, où T est le centralisateur d'un $\widetilde{K}$-tore déployé maximal de $G_{\widetilde{K}}$. En effet, puisque G est adjoint et quasi-déployé sur $\widetilde{K}$, le centralisateur T est un tore induit, et donc R-trivial (cf. [BT84, 4.4.16. Proposition.]). On conclut alors que

$$G(\widetilde{K}) = g\,G(\widetilde{K})^+\,T(\widetilde{K})\,g^{-1} = G(\widetilde{K})^+\,g\,T(\widetilde{K})\,g^{-1} \subset \overline{RG(K)}$$

grâce à [BT73, 6.11.(i) Proposition.].

Utilisons ensuite le point (2) du lemme 3.1 pour en déduire

$$G(\widetilde{K}) = \overline{G(K)}\,\mathcal{G}(\widetilde{R}) = G(K)\,\mathcal{G}(\widetilde{R}).$$

□

Ceci nous permet donc de se ramener immédiatement au cas hensélien, et donc à de la cohomologie galoisienne :

Corollaire 3.11. *Reprenons les notations du lemme précédent et supposons de plus que $\mathcal{G}$ est lisse. On a alors :*

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}\left(H^1_{\text{ét}}(R,\mathcal{G}) \to H^1_{\text{ét}}(K,G)\right) &= \mathrm{Ker}\left(H^1_{\text{ét}}(\widetilde{R},\mathcal{G}) \to H^1_{\text{ét}}(\widetilde{K},G)\right)\\ &= \mathrm{Ker}\left(H^1(\Gamma^{\mathrm{nr}},\mathcal{G}(\widetilde{R}^{\mathrm{nr}})) \to H^1(\Gamma^{\mathrm{nr}},G(\widetilde{K}^{\mathrm{nr}}))\right).\end{aligned}$$

Démonstration. Utilisons la proposition 1.14. Il suffit de montrer que le double quotient associé à un tordu de $\mathcal{G}$ par un élément d'une classe dans $\operatorname{Ker}\left(H^1_{\text{ét}}(R,\mathcal{G}) \to H^1_{\text{ét}}(K,G)\right)$ est trivial. Cela est en fait évident d'après le lemme précédent car un tel tordu a une fibre générique isomorphe à G, par trivialité de l'élément dans $H^1_{\text{ét}}(K,G)$.

La seconde égalité est ensuite une conséquence immédiate du lemme 3.4. □

On peut désormais réutiliser les résultats [Zid, Théorème 6.8.] et [Zid, Théorème 6.15.] pour obtenir :

Théorème 3.12. *Soit G un groupe semi-simple adjoint sur K et quasi-déployé sur $\widehat{K}$. On a :*

$$\operatorname{Ker}\left(H^1_{\text{ét}}(R,\mathcal{G}) \to H^1_{\text{ét}}(K,G)\right) = 1$$

où $\mathcal{G}$ est un schéma en groupes parahorique de G.

Théorème 3.13. *Soit G un groupe semi-simple adjoint sur K et quasi-déployé sur $\widehat{K}$. Soit également $\mathcal{G}$, un schéma en groupes stabilisateur d'une facette de G. Le noyau :*

$$\operatorname{Ker}\left(H^1_{\text{ét}}(R,\mathcal{G}) \to H^1_{\text{ét}}(K,G)\right)$$

est de cardinal $2^{\sum_{\mathfrak{m}\in\operatorname{Specm}(R)} k_{\mathfrak{m}}}$ où, pour tout $\mathfrak{m} \in \operatorname{Specm}(R)$, l'entier $k_{\mathfrak{m}}$ est majoré par le nombre de facteurs restriction de Weil d'un groupe absolument presque simple de type ${}^2D_n$ (pour $n \geq 4$) ou ${}^2A_{4n+3}$ (pour $n \geq 0$) déployé par une extension non ramifiée dans $G_{\widehat{K}_{\mathfrak{m}}}$.

Remarque 3.14. Bien entendu, il est possible de calculer explicitement ce noyau en se ramenant à $\widehat{K}$ grâce au corollaire 3.11 puis en se réduisant au cas absolument presque simple grâce à la compatibilité du noyau au produit et à la restriction de Weil (cf. [Zid, Lemme 6.9.]) et en utilisant la table [Zid, Table 2.].

Références

[Ana73] Sivaramakrishna Anantharaman. Schémas en groupes, espaces homogènes et espaces algébriques sur une base de dimension 1. In *Sur les groupes algébriques*, volume Tome 101 of *Supplément au Bull. Soc. Math. France*, pages 5–79. Soc. Math. France, Paris, 1973.

[BFF17] Eva Bayer-Fluckiger and Uriya A. First. Rationally isomorphic hermitian forms and torsors of some non-reductive groups. *Adv. Math.*, 312 :150–184, 2017.

[BFFH19] E. Bayer-Fluckiger, U. A. First, and M. Huruguen. Orders that are étale-locally isomorphic. *Algebra i Analiz*, 31(4) :1–15, 2019.

[Bor91] Armand Borel. *Linear algebraic groups*, volume 126 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1991.

[Bou42] Nicolas Bourbaki. *Éléments de mathématique. Part I. Les structures fondamentales de l'analyse. Livre III. Topologie générale. Chapitres III et IV*, volume No. 916 of *Actualités Scientifiques et Industrielles [Current Scientific and Industrial Topics]*. Hermann & Cie, Paris, 1942.

[Bou70] Nicolas Bourbaki. *Éléments de mathématique. Algèbre. Chapitres 1 à 3*. Hermann, Paris, 1970.

[BT73] Armand Borel and Jacques Tits. Homomorphismes "abstraits" de groupes algébriques simples. *Ann. of Math. (2)*, 97 :499–571, 1973.

[BT84] François Bruhat and Jacques Tits. Groupes réductifs sur un corps local. II. Schémas en groupes. Existence d'une donnée radicielle valuée. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (60) :197–376, 1984.

[BT87] François Bruhat and Jacques Tits. Groupes algébriques sur un corps local. Chapitre III. Compléments et applications à la cohomologie galoisienne. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, 34(3) :671–698, 1987.

[CTG04] Jean-Louis Colliot-Thélène and Philippe Gille. Remarques sur l'approximation faible sur un corps de fonctions d'une variable. In *Arithmetic of higher-dimensional algebraic varieties (Palo Alto, CA, 2002)*, volume 226 of *Progr. Math.*, pages 121–134. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2004.

[CTS87] Jean-Louis Colliot-Thélène and Jean-Jacques Sansuc. Principal homogeneous spaces under flasque tori : applications. *J. Algebra*, 106(1) :148–205, 1987.

[DG64] Michel Demazure and Alexander Grothendieck. Sga3 : Schémas en groupes. Réédition par P. Gille et P. Polo disponible sur https://webusers.imj-prg.fr/~patrick.polo/SGA3/, 1962–1964.

[GGMB14] Ofer Gabber, Philippe Gille, and Laurent Moret-Bailly. Fibrés principaux sur les corps valués henséliens. *Algebr. Geom.*, 1(5) :573–612, 2014.

[Gil09] Philippe Gille. Le problème de Kneser-Tits. Number 326, pages Exp. No. 983, vii, 39–81. 2009. Séminaire Bourbaki. Vol. 2007/2008.

[Gil15] Philippe Gille. Sur la classification des schémas en groupes semi-simples. In *Autour des schémas en groupes. Vol. III*, volume 47 of *Panor. Synthèses*, pages 39–110. Soc. Math. France, Paris, 2015.

[Gir71] Jean Giraud. *Cohomologie non abélienne*, volume Band 179 of *Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971.

[GMB23] Philippe Gille and Laurent Moret-Bailly. Fibrés principaux et adèles. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)*, 24(4) :2403–2429, 2023.

[Guo22] Ning Guo. The Grothendieck-Serre conjecture over semilocal Dedekind rings. *Transform. Groups*, 27(3) :897–917, 2022.

[GW10] Ulrich Görtz and Torsten Wedhorn. *Algebraic geometry I*. Advanced Lectures in Mathematics. Vieweg + Teubner, Wiesbaden, 2010. Schemes with examples and exercises.

[Hei10] Jochen Heinloth. Uniformization of $\mathcal{G}$-bundles. *Math. Ann.*, 347(3) :499–528, 2010.

[KP23] Tasho Kaletha and Gopal Prasad. *Bruhat-Tits theory—a new approach*, volume 44 of *New Mathematical Monographs*. Cambridge University Press, Cambridge, 2023.

[Liu06] Qing Liu. *Algebraic geometry and arithmetic curves. Transl. by Reinie Erné*, volume 6 of *Oxf. Grad. Texts Math.* Oxford : Oxford University Press, 2006.

[MA64] A. Grothendieck et J.-L. Verdier M. Artin. Sga4 : Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Réédition disponible sur http://fabrice.orgogozo.perso.math.cnrs.fr/SGA4/details/index.html, 1963–1964.

[Mat86] Hideyuki Matsumura. *Commutative ring theory*, volume 8 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1986. Translated from the Japanese by M. Reid.

[MB96] Laurent Moret-Bailly. Un problème de descente. *Bull. Soc. Math. France*, 124(4) :559–585, 1996.

[Mil80] James S. Milne. *Étale cohomology*, volume No. 33 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1980.

[Mil17] James S. Milne. *Algebraic groups. The theory of group schemes of finite type over a field*, volume 170 of *Camb. Stud. Adv. Math.* Cambridge : Cambridge University Press, 2017.

[Nis82] Yevsey A. Nisnevich. *Etale Cohomology and Arithmetic of Semisimple Groups*. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1982. Thesis (Ph.D.)–Harvard University.

[Nis84] Yevsey A. Nisnevich. Espaces homogènes principaux rationnellement triviaux et arithmétique des schémas en groupes réductifs sur les anneaux de Dedekind. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 299(1) :5–8, 1984.

[Rag94] Madabusi S. Raghunathan. Principal bundles admitting a rational section. *Invent. Math.*, 116(1-3) :409–423, 1994.

[Ser94] Jean-Pierre Serre. *Cohomologie galoisienne*, volume 5 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, fifth edition, 1994.

[Sta18] The Stacks Project Authors. *Stacks Project*. https://stacks.math.columbia.edu, 2018.

[Vos77] Viktorovich E. Voskresenskii. The reduced Whitehead group of a simple algebra. *Uspehi Mat. Nauk*, 32(6(198)) :247–248, 1977.

[Zid] Anis Zidani. *Questions d'injectivité cohomologique sur les sous-groupes de Bruhat-Tits*. À paraître.

[Zid26] Anis Zidani. *Arithmetic of Bruhat-Tits Group Schemes over a Semi-Local Dedekind Ring*. PhD thesis, Kiel, 2026.

Anis Zidani, Christian-Albrechts-Universität zu Kiel, Mathematisches Seminar, Heinrich-Hecht-Platz 6, 24118 Kiel, Deutschland, and Institute of Mathematics "Simion Stoilow" of the Romanian Academy, 21 Calea Grivitei Street, 010702 Bucharest, Romania