J. Fac. Sci. Univ. Tokyo
Sect. IA, Math.
34 (1987), 671-698.

Groupes algébriques sur un corps local Chapitre III. Compléments et applications à la cohomologie galoisienne

A Nagayoshi Iwahori pour son soixantième anniversaire

Par F. Bruhat et J. Tits[1]

Dans un travail antérieur ([8] et [9], notés I et II dans la suite), nous avons exposé une théorie des groupes algébriques G définis sur un corps "local" K, i. e. un corps complet pour une valuation discrète à corps résiduel k parfait. (Les hypothèses de [8] et [9] sont d'ailleurs plus générales.) Cette théorie fait en quelque sorte apparaitre G comme "objet de dimension infinie" sur k et présente des analogies frappantes avec la théorie classique des groupes réductifs sur un corps L quelconque (cf. [1], [18]), le rôle joué par la clôture séparable de L étant pour nous joué par l'extension non ramifiée maximale (ou hensélisé strict) $\tilde{K}$ de K. Nous renvoyons à l'Introduction de I pour un développement de cette analogie.

Après un premier paragraphe consacré à la fixation de notations et à quelques rappels, nous introduisons les notions de groupe *résiduellement déployé* ou *résiduellement quasi-déployé* sur K. Ce sont les analogues des notions de groupe déployé ou quasi-déployé sur L. Cependant, alors qu'un groupe semi-simple est toujours une "forme" d'un et "un seul" groupe déployé sur L, la réponse à la question analogue dans notre théorie (G est-il $\tilde{K}$-isomorphe à un groupe résiduellement déployé sur K ? Si oui, y a-t-il unicité ?) n'est pas si simple, et fait l'objet de l'essentiel du paragraphe 2. On y voit apparaître des différences sensibles, un peu surprenantes a priori, entre le cas absolument presque simple et le cas général.

Au paragraphe 3, nous appliquons notre théorie à l'étude de la *cohomologie galoisienne* de G et de certains de ses sous-groupes. L'utilisation des *schémas en groupes* introduits en II permet de la ramener à celle d'un nombre fini de groupes algébriques définis sur k.

Les résultats sont particulièrement simples lorsque le corps résiduel k est de dimension cohomologique $\leqq 1$, cas qui fait l'objet du paragraphe 4. On démontre par exemple en quelques lignes que G est automatiquement résiduellement quasi-déployé et que $H^1(G) = \{0\}$ dès que G est simplement connexe (condition qui est pour nous l'analogue de la connexité du cas classique). On y détermine aussi explicitement tous les groupes anisotropes sur K. Nous retrouvons ainsi en les généralisant et par des démonstrations courtes et unifiées les résultats obtenus par M. Kneser lorsque K est un corps localement compact de caractéristique zéro ([15]), au moyen de vérifcations cas par cas, souvent difficiles.

Les résultats exposés ici ont été partiellement annoncés dans [5], [6], [7].

Qu'il nous soit permis de terminer cette Introduction en rappelant tout ce que notre théorie doit à N. Iwahori. C'est lui qui le premier, en collaboration avec O. Goldman, a fait apparaitre pour le groupe linéaire général l'importance des "sous-groupes d'Iwahori" ([12]), puis nous a ouvert la voie par un article fondamental, écrit en collaboration avec H. Matsumoto, sur les groupes de Chevalley ([14]). Il voudra bien trouver ici le témoignage de notre fidèle amitié.

[1]Réécrit en latex par Anis Zidani.
Pour toute erreur ou suggestion, veuillez me contacter à l'adresse : zidani@math.univ-lyon1.fr.

1. Notations et rappels.

1.1. Sauf au n° 1.3 K désigne un corps commutatif, *complet* pour une valuation discrète ω telle que $\omega(K^\times) = \mathbb{Z}$. On note π une uniformisante de K, $\mathcal{O}$ l'anneau des entiers, $\mathbf{p}$ son idéal maximal, $k = \mathcal{O}/\mathbf{p}$ le corps résiduel, que l'on suppose *parfait*. On note K_s une clôture séparable de K, $\tilde{K}$ la sous-extension étale maximale de K_s, $\tilde{\mathcal{O}}$ l'anneau des entiers de $\tilde{K}$, $\tilde{\mathbf{p}}$ son idéal maximal, $\tilde{k} = \tilde{\mathcal{O}}/\tilde{\mathbf{p}}$ son corps résiduel, qui est une clôture algébrique de k. On pose $\Gamma_s = \mathrm{Gal}(K_s/K)$ et $\tilde{\Gamma} = \mathrm{Gal}(\tilde{K}/K)$, que l'on identifie canoniquement à $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$. L'expression "extension de K" signifie "sous-extension de K_s".

1.2. On désigne par G un groupe algébrique (dans ce travail, tous les groupes algébriques sont supposés *linéaires*) défini sur K. On note G^0 sa composante neutre, qu'on suppose *réductive*, $\mathscr{D}G^0$ le groupe dérivé de G^0, $j : G' \to G$ un K-revêtement universel de $\mathscr{D}G^0$ et $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Ad}\, G$ la représentation adjointe (cf. [2] 2.25 et 26). On se permet, lorsqu'aucune confusion n'est à craindre, de désigner par la même lettre un groupe algébrique défini sur $\tilde{K}$ et le groupe de ses points rationnels sur $\tilde{K}$.

On note S un tore K-déployé maximal de $G, \tilde{S}$ un tore $\tilde{K}$-déployé maximal contenant S et *défini sur* K (on sait qu'un tel tore existe (II 5.1.12)), T le centralisateur de $\tilde{S}$ dans G^0 (rappelons que G^0 est quasi-déployé sur $\tilde{K}$, puisque $\tilde{K}$ est de dimension cohomologique $\leqq 1$, et que T est un tore maximal de G), N le normalisateur de $\tilde{S}$ dans G. On pose $S_{ss} = S \cap \mathscr{D}G^0$ et $\tilde{S}_{ss} = \tilde{S} \cap \mathscr{D}G^0$ et l'on note Φ (resp. $\tilde{\Phi}$) le système de racines de G suivant S (resp. $\tilde{S}$).

1.3. Dans ce numéro exclusivement, K est un corps commutatif *quelconque*, $\tilde{K}$ une extension galoisienne de K, K_s une clôture séparable de K. On note H un groupe semi-simple connexe défini sur K_s (donc déployé sur K_s). Nous allons fixer quelques notations, rappeler quelques résultats classiques et en tirer des conséquences faciles dont nous laissons la démonstration au lecteur.

(a) Au groupe H est associé son *graphe de Dynkin* $D = \mathrm{Dyn}\, H$, canoniquement isomorphe au graphe de Dynkin du système de racines de H par rapport à un tore maximal. A un graphe de Dynkin D est associé un groupe commutatif fini $C(D)$, quotient du groupe des poids par le groupe des poids radiciels. Si C est un sous-groupe de $C(D)$, on note $\mathrm{Aut}(D, C)$ le sous-groupe de $\mathrm{Aut}\, D$ stabilisant C. Au groupe H correspond un sous-groupe $C(H)$ de $C(\mathrm{Dyn}\, H)$, image du groupe des poids des représentations linéaires de H, appelé le *cocentre* de H. On a $C(H) = \{1\}$ (resp. $C(H) = C(D)$) si et seulement si H est adjoint (resp. simplement connexe). Si H est défini sur K, la loi d'opération du groupe de Galois $\Gamma = \mathrm{Gal}(K_s/K)$ sur H fournit un homomorphisme $\rho_{H,K} : \Gamma \to \mathrm{Aut}(D, C(H))$.

(b) A tout triple formé d'un graphe de Dynkin D, d'un homomorphisme ρ de Γ dans $\mathrm{Aut}\, D$ et d'un sous-groupe C de $C(D)$ stable par l'image de ρ, correspond un groupe semi-simple connexe H *quasi-déployé* sur K, et un seul à K-isomorphisme près, tel que le triple $(\mathrm{Dyn}\, H, \rho_{H,K}, C(H))$ soit isomorphe à (D, ρ, C). Le *type* de H, ou de la classe de K-isomorphisme de H, est le couple $(D, \mathrm{Im}\, \rho)$, ou plutôt la classe d'isomorphisme de ce couple. Le groupe H est *déployé* sur K si et seulement si $\mathrm{Im}\, \rho = \{1\}$. La plus petite extension E de K telle que H soit déployé sur E (que nous appellerons K-extension déployante de H) est le corps des invariants du noyau de ρ. On peut donc considérer $\rho_{H,K}$ comme un homomorphisme injectif de $\mathrm{Gal}(E/K)$ dans $\mathrm{Aut}\, D$.

(c) Supposons H défini sur K. Il existe un groupe H^q quasi-déployé sur K, et un seul à K-isomorphisme près, tel que H soit une forme *intérieure* de H^q (ou ce qui revient au même, que H^q soit une forme intérieure de H), c'est-à-dire soit obtenu par torsion de H^q par un cocycle $z \in Z^1(\Gamma, (\mathrm{Ad}\, H^q)(K_s))$ (pour la notion de torsion, voir [17] et aussi le n°3.3 ci-dessous). Remarquons que $\mathrm{Aut}\, H^q$ est produit semi-direct (en tant que Γ-groupe) du sous-groupe formé des automorphismes conservant un épinglage de Steinberg (cf. II 4.1.3) par Ad H^q. Par suite, l'application canonique de $H^0(\mathrm{Aut}\, H^q)$ dans $H^0(\mathrm{Aut}\, H^q / \mathrm{Ad}\, H^q)$ est surjective et le noyau de l'application canonique de $H^1(\mathrm{Ad}\, H^q)$ dans $H^1(\mathrm{Aut}\, H^q)$ est nul. Autrement dit, H et H^q sont K-isomorphes si et seulement si le cocycle z ci-dessus est un cobord.

Si de plus H est *quasi-déployé* sur $\tilde{K}$, alors H et H^q sont deux groupes quasi-déployés sur $\tilde{K}$ formes intérieures l'un de l'autre. Il résulte alors de l'alinéa précédent qu'ils sont $\tilde{K}$-isomorphes et que la restriction de z à $\mathrm{Gal}(K_s/\tilde{K})$ est un cobord, qu'on peut supposer nul, quitte à le remplacer par un cocycle cohomologue. Par suite, *H est $\tilde{K}$-isomorphe au groupe ${}_z(H^q)$ obtenu par torsion par un cocycle $z \in Z^1(\mathrm{Gal}(\tilde{K}/K), (\mathrm{Ad}\, H^q(\tilde{K}))$.*

(d) Supposons H *quasi-déployé* sur $\tilde{K}$. Soit $\tilde{E}$ sa $\tilde{K}$-extension déployante minimale et soit C son cocentre. Soit Q l'ensemble des classes de K-isomorphisme de groupes H^q quasi-déployés sur K et $\tilde{K}$-isomorphes à H. Soit $\mathcal{L}'$ l'ensemble des homomorphismes de $\mathrm{Gal}(K_s/K)$ dans $\mathrm{Aut}(D, C)$ prolongeant $\rho_{H,K}$ et soit $\overline{\mathcal{L}'}$ le quotient de $\mathcal{L}'$ par l'action de $\mathrm{Aut}(D, C)$ par automorphismes intérieurs. A $\rho \in \mathcal{L}'$ faisons correspondre la classe de K-isomorphismes de groupes quasi-déployés sur K correspondant au triple (D, ρ, C). Il résulte immédiatement de (b) que l'on obtient ainsi une *bijection*, dite canonique, de $\overline{\mathcal{L}'}$ sur Q.

Soit $\rho \in \mathcal{L}'$, et soit E le corps des invariants de $\mathrm{Ker}\,\rho$. La donnée de ρ équivaut à celle de E et de l'homomorphisme $\rho : \mathrm{Gal}(E/K) = \mathrm{Gal}(K_s/K)/\,\mathrm{Ker}\,\rho \to \mathrm{Aut}(D, C)$. D'autre part, $\mathrm{Gal}(K_s/\tilde{E}) = \mathrm{Ker}\,\rho_{H,\tilde{K}} = \mathrm{Ker}\,\rho \cap \mathrm{Gal}(K_s/\tilde{K})$ est un sous-groupe distingué de $\mathrm{Gal}(K_s/K)$, $\tilde{E}$ est une extension galoisienne de K égale à $E\tilde{K}$ et $\mathrm{Gal}(\tilde{E}/\tilde{K})$ s'identifie canoniquement à $\mathrm{Gal}(E/E \cap \tilde{K})$ par restriction, d'où la définition de $\rho_{H,K} : \mathrm{Gal}(E/E \cap \tilde{K}) \to \mathrm{Aut}(D, C)$. On en déduit aussitôt que $\mathcal{L}'$ s'identifie canoniquement à l'ensemble $\mathcal{L}$ des couples (E, ρ) satisfaisant aux deux conditions suivantes ;

(i) *E est une extension galoisienne de K telle que $\tilde{E} = E\tilde{K}$* (ce qui permet d'identifier $\mathrm{Gal}(\tilde{E}/\tilde{K})$ et $\mathrm{Gal}(E/E \cap \tilde{K})$) :

(ii) *ρ est un homomorphisme* injectif *de* $\mathrm{Gal}(E/K)$ *dans* $\mathrm{Aut}(D, C)$ *prolongeant* $\rho_{H,\bar{R}}$: $\mathrm{Gal}(E/E \cap \tilde{K}) \to \mathrm{Aut}(D, C)$.

En composant la bijection $\mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ ainsi définie avec l'application canonique de $\mathcal{L}'$ sur Q, on obtient une *surjection*, dite canonique et notée λ, de $\mathcal{L}$ sur Q, puis, par passage au quotient, une *bijection* λ sur Q du quotient $\overline{\mathcal{L}}$ de $\mathcal{L}$ par la relation d'équivalence "$E_1 = E_2$ et il existe $\alpha \in \mathrm{Aut}(D, C)$ tel que $\rho_2 = \mathrm{int}\,\alpha \circ \rho_1$".

Remarques. 1) Si H est défini sur K, on peut prendre $\rho = \rho_{H,K}$ et Q est non vide. Par suite, une condition nécessaire pour que H soit $\tilde{K}$-isomorphe à un groupe défini sur K est que $\tilde{E}$ soit une extension *galoisienne* de K (ce qui est entraîné par (i)).

2) Si $E \cap \tilde{K} = K$, la condition (ii) signifie simplement que $\rho = \rho_{H,\tilde{K}}$!

1.4. Immeubles. Au groupe G sont associés deux immeubles, qui restent inchangés si l'on remplace G par G' ou par $\mathrm{Ad}\, G$ (pour la définition d'un immeuble, voir I; rappelons simplement que c'est un complexe polysimplicial muni d'une métrique et d'une famille de sous-complexes appelés *appartements*; pour les résultats ci-dessous, voir II, notamment 4.2 et 5.1 : le groupe G y est supposé connexe, mais on passe immédiatement au cas général grâce à II 4.2.12), à savoir :

– l'immeuble $\tilde{\mathcal{I}}$ de G sur $\tilde{K}$, sur lequel opèrent par automorphismes les groupes $G'(\tilde{K})$, $G(\tilde{K})$ et $\mathrm{Ad}\, G(\tilde{K})$ de manière compatible avec les homomorphismes j et Ad. Au tore $\tilde{S}$ est associé un appartement $\tilde{A}$ qui est un espace affine euclidien dont l'espace des translations $\tilde{V}$ s'identifie au dual de $X^*(\tilde{S}_{ss}) \otimes \mathbb{R}$. Par transport de structure, le groupe de Galois $\tilde{\Gamma}$ opère par automorphismes sur $\tilde{\mathcal{I}}$, de manière compatible avec son action sur $X^*(\tilde{S}_{ss})$.

– l'immeuble $\mathcal{I}$ de G sur K, qui s'identifie à l'ensemble des points fixes de $\tilde{\Gamma}$ dans $\tilde{g}$ et sur lequel opèrent les groupes $G'(K), G(K)$ et $\mathrm{Ad}\, G(K)$. L'intersection $A = \tilde{A} \cap \mathcal{I}$ en est un appartement, c'est un espace affine sous le dual V de $X^*(S_{ss}) \otimes \mathbb{R}$ et les facettes de $\mathcal{I}$ sont les intersections avec $\mathcal{I}$ des facettes de $\tilde{\mathcal{I}}$ invariantes par $\tilde{\Gamma}$.

Toute chambre de $\tilde{\mathcal{I}}$ (resp. $\mathcal{I}$) est contenue dans un appartement et $G'(\tilde{K})$ (resp. $G'(K)$) opère transitivement sur l'ensemble des chambres, sur l'ensemble des appartements et même sur l'ensemble des couples formés d'une chambre et d'un appartement la contenant.

1.5. Graphe résiduel. La structure de complexe polysimplicial de $\tilde{A}$ (resp. A) est celle associée au groupe de Weyl affine $\tilde{W}$ (resp. W) d'un système de racines réduit dans $\tilde{V}$ (resp. V) ayant même groupe de Weyl que $\tilde{\Phi}$ (resp. Φ). Plus précisément, elle est donnée par un *échelonnage* (au sens de I 1.4 ou "affine root system" au sens de [19]) de $\tilde{\Phi}$ (resp. Φ), dont le graphe de Dynkin est appelé le *graphe résiduel* (resp. le *K-graphe résiduel*) de G et est noté Δ (resp. Δ_K). Le groupe $\tilde{W}$ (resp. W) est irréductible si et seulement Δ (resp. Δ_K) est connexe et si et seulement si $\mathscr{D}G^0$ est $\tilde{K}$-presque simple (resp. K-presque simple). Les facettes de $\tilde{\mathcal{I}}$ (resp. $\mathcal{I}$) sont alors des simplexes et si C est une chambre de $\tilde{\mathcal{I}}$ (resp. $\mathcal{I}$), les sommets de C correspondent aux sommets de Δ, ou plutôt aux complémentaires de sommets. D'une manière générale, les facettes F de C correspondent bijectivement aux parties X de l'ensemble des sommets de Δ (resp. Δ_K) ne contenant aucune composante connexe : on dit que X est le *type* de F (I 1.3.5). Toute facette F de $\tilde{\mathcal{I}}$ (resp. $\mathcal{I}$) est transformée par $G'(\tilde{K})$ (resp. $G'(K)$) d'une facette de C et d'une seule, d'où la définition du type d'une facette quelconque.

On trouvera dans I 1.4 (compte tenu de II E 1, qui répare l'omission du graphe $B_2 - BC_2$:) la liste des K-graphes résiduels connexes possibles ; on notera que seules peuvent intervenir (et interviennent effectivement) comme classes du graphe résiduel "absolu" Δ celles qui n'ont pas de sommets multipliables (II 4.2.23) c'est-à-dire les graphes de Dynkin complétés des systèmes de racines réduits irréductibles et les graphes obtenus à partir de ces derniers en changeant le sens d'une ou deux flèches.

Le groupe des automorphismes de l'immeuble $\tilde{\mathcal{I}}$ opère sur Δ. On en déduit des homomorphismes $\xi, \xi', \xi^0_{\mathrm{Ad}}, \gamma$ de $G(\tilde{K}), G'(\tilde{K}), (\mathrm{Ad}\, G)^0(\tilde{K}), \tilde{\Gamma}$ dans $\mathrm{Aut}\,\Delta$, compatibles avec j, Ad et les actions de $\tilde{\Gamma}$. L'homomorphisme ξ' est trivial. On pose $\mathrm{Int}\,\Delta = \mathrm{Im}\,\xi^0_{\mathrm{Ad}}$: on vérifie aisément que, si $\Delta_1, \cdots, \Delta_r$ sont les composantes connexes de Δ, on a $\mathrm{Int}\,\Delta = \mathrm{Int}\,\Delta_1 \times \cdots \times \mathrm{Int}\,\Delta_r$ et que, si Δ est irréductible, alors $\mathrm{Int}\,\Delta = \mathrm{Aut}\,\Delta$ sauf si Δ est le graphe de Dynkin complété d'un système de racines de type A_n pour $n \geqq 2, D_n$ pour $n \geqq 4$ ou E_6, cas où $\mathrm{Int}\,\Delta$ est le sous-groupe d'ordre respectivement $n+1$, 4 et 3 noté Γ_c dans [4], p. 176 et C dans [18]. En particulier, $\mathrm{Int}\,\Delta$ ne dépend que de Δ, ce qui justifie la notation. Observons que $\mathrm{Int}\,\Delta$ est toujours commutatif.

1.6. Schémas. Le mot schéma signifie schéma *affine.* Il s'agira toujours de schémas en groupes lisses sur l'anneau $\mathcal{O}$ ou $\tilde{\mathcal{O}}$. La fibre générique (resp. la fibre fermée, notée $\overline{\mathbf{H}}$) d'un tel schéma $\mathbf{H}$ sera considérée comme un groupe algébrique défini sur K ou $\tilde{K}$ (resp. k ou $\tilde{k}$) (cf. II 1.2).

On note $\mathbf{S}$ (resp. $\tilde{\mathbf{S}}, \mathbf{T}$) le $\mathcal{O}$-schéma en groupes lisse canonique de fibre générique S (resp. $\tilde{S}, T$) (II 4.4).

Soit F une facette de $\tilde{\mathscr{I}}$. Il lui est associé un $\tilde{\mathcal{O}}$-schéma en groupes lisse de fibre générique G^0, dont le groupe des points à valeurs dans $\tilde{\mathcal{O}}$ s'identifie au stabilisateur de F dans $G^0(\tilde{K})$ (II 4.6.18), condition qui le caractérise à isomorphisme unique près. En imitant la démonstration de II 4.6.18 (où G était supposé connexe), on construit aisément un $\tilde{\mathcal{O}}$-schéma en groupes lisse dont le groupe des points entiers est le stabilisateur $\mathrm{Stab}\, F$ de F dans $G(\tilde{K})$ et dont la fibre générique est le groupe algébrique $\mathrm{Stab}\, F \cdot G^0$ (la démonstration est d'ailleurs beaucoup plus simple qu'en II 4.6.18 : on fait la somme directe de copies du schéma précédent, indexée par un système de représentants de $\mathrm{Stab}\, F/(\mathrm{Stab}\, F \cap G^0)$, au lieu d'avoir des "recollements", et les questions de séparation et d'affinité, délicates dans II 4.6.18, sont triviales). Ce schéma est noté $\mathbf{G}_F$ (au lieu de $\mathbf{G}^+_F$, notation de II), et sa composante neutre est notée $\mathbf{G}^0_F$.

1.7. Sous-groupes parahoriques. On appelle sous-groupe parahorique de G associé à la facette F de $\tilde{\mathcal{I}}$ et l'on note P_F l'image canonique du groupe $\mathbf{G}^0_F(\tilde{\mathcal{O}})$ des points entiers de $\mathbf{G}^0_F$ dans $G^0(\tilde{K})$ (II 5.2.6). Les sous-groupes d'Iwahori de G sont par définition les sous-groupes parahoriques minimaux, c'est-à-dire ceux associés aux chambres de $\tilde{\mathcal{I}}$. La correspondance $F \to P_F$ est bijective (II 5.1.39) et $\mathrm{Stab}\, F = \mathrm{Norm}\, P_F$. C'est pourquoi, si P est un sous-groupe parahorique de G, associé à la facette F, on note aussi $\mathbf{P}$ (resp. $\mathbf{N}(P)$) le schéma $\mathbf{G}^0_F$ (resp. $\mathbf{G}_F$).

L'application qui à un $\tilde{k}$-sous-groupe parabolique p de $\overline{\mathbf{P}}$ fait correspondre l'image réciproque dans $P = \mathbf{P}(\widetilde{O})$ de $p(\tilde{k})$ est une bijection croissante sur l'ensemble des sous-groupe parahoriques de G contenus dans P, qui envoie l'ensemble des $\tilde{k}$-sous-groupes de Borel de $\overline{\mathbf{P}}$ sur l'ensemble des sous-groupes d'Iwahori contenus dans P.

Si la facette F est invariante par $\tilde{\Gamma}$, c'est-à-dire correspond à une facette de $\mathcal{I}$, tous les schémas précédents proviennent par changement de base de $\mathcal{O}$-schémas en groupes lisses, notés de la même manière. Les sous-groupes parahoriques correspondant aux facettes invariantes sont ceux invariants par $\tilde{\Gamma}$. On les appelle sous-groupes K-parahoriques de G (ou K-sous-groupes parahoriques). Si P est un tel sous-groupe, les sous-groupes K-parahoriques de G contenus dans P correspondent bijectivement comme plus haut aux k-sous-groupes paraboliques de $\overline{\mathbf{P}}$ (rappelons que k est supposé parfait). Les sous-groupes K-parahoriques minimaux correspondent aux chambres de $\mathcal{I}$. Ce sont les sous-groupes K-parahoriques P tels que le groupe algébrique $\overline{\mathbf{P}}$ soit "presque anisotrope" sur k, c'est-à-dire n'admette pas de k-sous-groupe parabolique propre. Comme $G'(K)$ opère transitivement sur l'ensemble des chambres de $\mathcal{I}$, deux sous-groupes K-parahoriques minimaux sont conjugués par un élément de $G'(K)$, et a fortiori par un élément de $G^0(K)$.

1.8. Composante résiduellement neutre. On appelle composante résiduellement neutre de G et l'on note G^{00} le sous-groupe de $G(\tilde{K})$ engendré par la réunion des sous-groupes parahoriques. On a $G^{00} = \mathbf{T}^0(\widetilde{\mathcal{O}}).j(G'(\tilde{K})) \subset G^0(\tilde{K})$ (II 5.2.11), où $\mathbf{T}^0$ désigne la composante neutre de $\mathbf{T}$. Soit C une chambre de A, B le sous-groupe d'Iwahori correspondant et posons $N^{00} = G^{00} \cap N(\tilde{K})$: le triple (G^{00}, B, N^{00}) est un système de Tits de groupe de Weyl $\tilde{W}$ (II 5.2.12). Par suite, tout sous-groupe parahorique est son propre normalisateur dans G^{00}. De la conjugaison par $G'(K)$ des sous-groupes K-parahoriques minimaux, on déduit aisément que le groupe $G^{00} \cap G(K)$, noté G^{00}_K, est le sous-groupe engendré par les points rationnels sur K des sous-groupes K-parahoriques de G. Le triple $(G^{00}_K, B_K, N^{00}_K)$ où B_K (resp. N^{00}_K) est le stabilisateur dans G^{00}_K d'une chambre de A (resp. de A) est un système de Tits de groupe de Weyl W (II 5.2.12).

Posons $G^{01} = \operatorname{Ker}\xi \cap G^0(\tilde{K})$ (1.5). Vu la transitivité de $G'(\tilde{K})$ sur les couples formés d'une chambre de $\tilde{\mathcal{I}}$ et d'un appartement la contenant, G^{01} est produit de G^{00} par le noyau de l'homomorphisme $N(\tilde{K}) \cap G^0(\tilde{K}) \to \operatorname{Aut} \tilde{A}$. Si G^0 est *semi-simple*, ce noyau est le groupe $H = \mathbf{T}(\widetilde{O})$ (II 4.6.3). Il en résulte que le groupe quotient G^{01}/G^{00} est alors isomorphe au "groupe des composantes connexes" $\mathbf{T}(\widetilde{O})/\mathbf{T}^0(\widetilde{\mathcal{O}})$ du schéma $\mathbf{T}$. En particulier, on a $G^{01} = G^{00}$ dès que G^0 est simplement connexe ou adjoint (II 4.4.18 IX).

2. Groupes résiduellement déployés ou quasi-déployés.

2.1. On dit que G est *résiduellement déployé* sur K si le rang sur K de $\mathscr{D}G^0$ est le même que son rang sur $\tilde{K}$, autrement dit si $S_{ss} = \tilde{S}_{ss}$, ou si $\tilde{\Gamma}$ opère trivialement sur $X^*(\tilde{S}_{ss})$, ou encore sur $\tilde{A}$. On a alors $A = \tilde{A}$ (mais non $\mathcal{I} = \tilde{\mathcal{I}}$!). Ceci entraîne que G est quasi-déployé sur K puisqu'il l'est sur $\tilde{K}$. Plus précisément :

PROPOSITION. *Pour que G soit résiduellement déployé sur K, il faut et il suffit que G soit quasi-déployé sur K et que les orbites de* $\Gamma_s = \mathrm{Gal}(K_s/K)$ *dans le graphe de Dynkin D de G soient les mêmes que celles de* $\mathrm{Gal}(K_s/\tilde{K})$.

C'est immédiat, puisque le rang sur K de $\mathscr{D}G^0$ est égal au nombre d'orbites de Γ_s.

Remarquons que si G est quasi-déployé sur K et si la K-extension déployante de G est *totalement ramifiée*, alors G est résiduellement déployé sur K. La réciproque n'est pas toujours vraie (contrairement à ce qui est dit dans [19], p. 37) ; elle l'est cependant si G est absolument simple et n'est pas de type ${}^3D_4$ sur $\tilde{K}$ et ${}^6D_4$ sur K.

2.2. On dit que G est *résiduellement quasi-déployé* sur K s'il possède un sous-groupe d'Iwahori stable par $\tilde{\Gamma}$, ou encore s'il existe une chambre C de $\tilde{\mathcal{I}}$ stable par $\tilde{\Gamma}$. L'intersection $C \cap \mathcal{I}$ est alors une chambre de $\mathcal{I}$ et, par conjugaison par un élément de $G^0(K)$, on peut supposer $C \subset \tilde{A}$. *Si G est quasi-déployé sur K, alors G est résiduellement quasi-déployé sur K* (la réciproque est inexacte, cf. §4). En effet, soit $(\alpha_1, \cdots, \alpha_r)$ un système de racines simples de G suivant $\tilde{S}$ stable par $\tilde{\Gamma}$ et soit $a \in A$; l'ensemble D des $x \in \tilde{A}$ tels que $\alpha_1(x-a) = \cdots = \alpha_r(x-a)$ est une droite de $\tilde{A}$, fixée par $\tilde{\Gamma}$, et n'est contenu dans aucun des hyperplans affines murs des racines affines de $\tilde{A}$. Par suite, D rencontre une chambre de $\tilde{A}$, qui est stable par $\tilde{\Gamma}$.

Supposons G résiduellement quasi-déployé sur K; alors, G *est résiduellement déployé sur* K *si et seulement si* $\tilde{\Gamma}$ *opère trivialement sur le graphe résiduel* Δ *de* G (1.5) : cette dernière condition revient en effet à dire que $\tilde{\Gamma}$ laisse fixes les sommets d'une chambre $C \subset \tilde{\Gamma}$ invariante par $\tilde{\Gamma}$, ou encore que $\tilde{\Gamma}$ opère trivialement sur $\tilde{A}$.

2.3. Soit L un corps et soit L_s une clôture séparable de L. Les deux assertions suivantes sont bien connues (cf. 1.3) :

(D) Tout groupe semi-simple connexe H défini sur L_s est L_s-isomorphe à un groupe H^d défini et déployé sur L, unique à L-isomorphisme près.

(QD) Tout groupe semi-simple connexe H défini sur L est une forme intérieure (cf. 1.3 (c)) d'un groupe H^q défini et quasi-déployé sur L, unique à L-isomorphisme près.

L'analogie entre le "cas classique" des groupes semi-simples sur un corps quelconque et le "cas local" conduit naturellement à poser les deux questions :

(RD) Tout groupe semi-simple connexe H défini sur $\tilde{K}$ est-il $\tilde{K}$-isomorphe à un groupe H^d défini et résiduellement déployé sur K ? Si oui, ce dernier est-il unique à K-isomorphisme près ?

(RQD) Tout groupe semi-simple connexe H défini sur K est-il une "forme intérieure" (i.e. obtenue par torsion par un cocycle $z \in Z^1(\tilde{\Gamma}, (\mathrm{Ad}\, H^q)(\tilde{K})))$ d'un groupe H^q défini et résiduellement quasi-déployé sur K ? Si oui, ya-t-il unicité à K-isomorphisme près ?

La réponse à (RQD) est immédiate : *Oui* pour l'existence, car il suffit de prendre le groupe H^q donné par (QD). Il est en effet résiduellement quasi-déployé et l'on passe de H^q à H par torsion par un cocycle à valeurs dans $(\mathrm{Ad}\, H^q)(\tilde{K})$ d'après 1.3 (c). *Non* pour l'unicité : par exemple, soit D un corps gauche de centre K, de degré $d > 1$, d'indice de ramification égal à d ; on montre alors aisément que $\mathrm{SL}_1(D)$ et SL_d sont des groupes résiduellement quasi-déployés formes intérieures l'un de l'autre (cf. §4 et [10]). Une question plus "naturelle" serait d'ailleurs obtenue en remplaçant dans (RQD) le groupe $(\mathrm{Ad}\, H^q)(\tilde{K})$ par sa composante résiduellement neutre : nous espérons revenir ultérieurement là-dessus. Disons simplement qu'ici encore, l'unicité n'est pas exacte en général (i.e. dès que $\dim k > 1$) : un contre-exemple est fourni par les deux groupes $\mathrm{SL}_1(D_\pm)$, où $D_\pm$ est le corps des quaternions sur $K = \mathbb{R}((t))$ correspondant au couple $(-1, \pm t)$.

La réponse à (RD) est plus délicate et plus nuancée : elle fait l'objet du reste de ce paragraphe.

2.4. Classification. *Dans la suite de ce paragraphe, on note* H *un groupe semi-simple connexe défini sur* $\tilde{K}$. On désigne par D son graphe de Dynkin, C son cocentre, $\tilde{E}$ sa $\tilde{K}$-extension déployante, $\mathcal{Q}$ (resp. $\mathcal{R}$) l'ensemble (éventuellement vide) des classes de K-isomorphismes de groupes $\tilde{K}$-isomorphes à H et quasi-déployés (resp. résiduellement déployés) sur K, de sorte que $\mathcal{R} \subset \mathcal{Q}$.

Reprenons les notations de 1.3 (d) et considérons l'application canonique λ de $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{Q}$.

PROPOSITION. *L'image réciproque de* $\mathcal{R}$ *dans* $\mathcal{L}$ *par* λ *est l'ensemble* $\mathcal{L}^d$ *des couples* $(E, \rho) \in \mathcal{L}$ *(i.e. satisfaisant aux conditions* (i) *et* (ii) *de* 1.3 (d)*) tels que les orbites de* $\mathrm{Im}\, \rho$ *et de* $\mathrm{Im}\, \rho_{H,\tilde{K}}$ *dans* D *soient les mêmes.*

Cela résulte de 2.1.

COROLLAIRE 1. *Soit* E *une extension galoisienne totalement ramifiée de* K *telle que* $\tilde{E} = E\tilde{K}$. *Il existe un élément et un seul dans* $\mathcal{R}$ *dont la* K*-extension déployante soit* E.

On a en effet $E \cap \tilde{K} = K$ et $\mathcal{L}$ contient un et un seul élément de la forme (E, ρ), à savoir $(E, \rho_{H,\tilde{K}})$, qui satisfait évidemment à la condition de la proposition.

COROLLAIRE 2. *Supposons que* $\mathrm{Im}\, \rho_{H,\tilde{K}}$ *soit son propre normalisateur dans* $\mathrm{Aut}(D)$. *Alors,* $\mathcal{R}$ *est en correspondance bijective avec l'ensemble des extensions galoisiennes totalement ramifiées* E *de* K *telles que* $\tilde{E} = E\tilde{K}$.

Soit $(E,\rho) \in \mathcal{L}$. Comme ρ est injectif et que $\mathrm{Gal}(E/E\cap\tilde{K})$ est distingué dans $\mathrm{Gal}(E/K)$, on a nécessairement $E\cap\tilde{K} = K$.

2.5. Le cas déployé. Il est trivial :

PROPOSITION. *Supposons que H est déployé sur $\tilde{K}$ Il existe un groupe H^d et un seul à K-isomorphisme près qui soit résiduellement déployé sur K et $\tilde{K}$-isomorphe à H. C'est le groupe semi-simple connexe déployé sur K ayant même graphe de Dynkin et même cocentre que H.*

C'est évident : les conditions imposées à H^d entraînent qu'il est déployé puisque $\mathrm{rg}_K H^d = \mathrm{rg}_{\tilde{K}} H = \mathrm{rg}_{K_s} H$.

2.6. Le cas absolument simple.

PROPOSITION. *Supposons que H est défini sur K, absolument presque simple et non déployé sur $\tilde{K}$ (cf.* 2.5*). Il existe un groupe H^d, et un seul à K-isomorphisme près, satisfaisant aux deux conditions :*

(i) *H^d est résiduellement déployé sur K ;*
(ii) *Il existe un $\tilde{K}$-isomorphisme i de H^d sur H tel que les lois d'opération de Γ_s sur les graphes de Dynkin de H et de H^d identifiés grâce à i, soient les mêmes.*

L'unicité résulte de 1.3 (b). Prenons pour H^d le groupe quasi-déployé sur K correspondant au triple $(D,\rho_{H,K},C(H))$ (1.3 (b)). Il est clair que (ii) est satisfaite. Vu 2.1, il reste à montrer que les orbites de $\rho_{H,K}$ et celles de sa restriction $\rho_{H,\tilde{K}}$ à $\mathrm{Gal}(K_s/\tilde{K})$ sont les mêmes. Or si, sur $\tilde{K}, H$ est de type ${}^2A_n$ pour $n \leqq 2, {}^2D_n$ pour $n \geqq 5, {}^2E_6$ ou ${}^6D_4$, on a $\mathrm{Im}\,\rho_{H,E} = \mathrm{Aut}\,D$; si H est de type ${}^2D_4$, $\mathrm{Im}\,\rho_{H,\tilde{K}}$ est son propre normalisateur dans $\mathrm{Aut}\,D$ et coïncide donc avec $\mathrm{Im}\,\rho_{H,K}$; enfin, si H est de type ${}^3D_4$, les orbites de $\rho_{H,\tilde{K}}$ sont celles de $\mathrm{Aut}\,D$, d'où le résultat.

REMARQUES.

1) H^d peut être de type ${}^6D_4$ sur K et ${}^3D_4$ sur $\tilde{K}$. La K-extension déployante est alors de degré 6 et d'indice de ramification 3 et n'est pas totalement ramifiée.

2) Supposons que H (toujours absolument presque simple) soit seulement *défini sur $\tilde{K}$ et soit non déployé sur $\tilde{K}$.* Il peut se faire que $\mathcal{R}$ soit vide (nous verrons en 2.7 que ceci exige $\mathrm{car}\,k = 2$, ou 3 dans le cas D_4 trialitaire). En tout état de cause, les arguments ci-dessus et le cor. 2 de 2.4 entraînent que, si H n'est pas de type ${}^3D_4$ sur $\tilde{K}$, alors $\mathcal{R}$ est en correspondance bijective avec les extensions galoisiennes totalement ramifiées E de K telles que $\tilde{E} = E\tilde{K}$, donc quadratiques sauf si H est de type ${}^6D_4$ sur $\tilde{K}$ (ce qui exige $\mathrm{car}\,k = 3$). Si H est de type ${}^3D_4$ sur $\tilde{K}$, on montre aisément que ou bien $\mathcal{R} = \emptyset$, ou bien $\mathcal{R} \neq \emptyset$ est en correspondance bijective avec les extensions E de K totalement ramifiées cycliques d'ordre 3 telles que $\tilde{E} = E\tilde{K}$, ou bien $\mathcal{R} \neq \emptyset$ est en correspondance bijective avec les extensions galoisiennes E de K, de groupe de Galois $\mathfrak{S}_3$, d'indice de ramification 3, telles que $\tilde{E} = E\tilde{K}$ (compte tenu de ce que tout automorphisme de $\mathrm{Aut}\,D_4 = \mathfrak{S}_3$ laissant fixes les éléments d'ordre 3 est intérieur) ; pour voir qu'il ne peut y avoir simultanément des groupes H^d de type ${}^3D_4$ et d'autres de types ${}^6D_4$, on remarque que la composée F des deux extensions E_1 et E_2 correspondantes serait une extension galoisienne de degré 18, d'indice de ramification 3 puisque $\tilde{E} = F\tilde{K}$, et dont le groupe de Galois aurait trois quotients d'ordre 6 distincts, à savoir $\mathrm{Gal}(E_1(E_2\cap\tilde{K})/K)$, $\mathrm{Gal}(E_2/K)$ et $\mathrm{Gal}(F\cap\tilde{K}/K)$, le premier étant isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et le second à $\mathfrak{S}_3$: la classification des groupes d'ordre 18 montre que c'est impossible.

   Ainsi, lorsque H est absolument presque simple, les groupes H^d sont tous de même type. Nous verrons que ce n'est pas vrai en général (2.9).

3) Supposons H *simplement connexe* (ou adjoint)*, défini sur K et $\tilde{K}$-presque simple.* Alors, $\mathcal{R}$ est non vide.

   En effet, $\mathrm{Gal}(\tilde{E}/\tilde{K})$ opère *transitivement* sur les composantes connexes de D. Soit D_0 l'une d'elles et soit Σ son stabilisateur dans $\mathrm{Gal}(\tilde{E}/\tilde{K})$. Distinguons deux cas :

(a) $\Sigma = \{1\}$. Alors, H est $\tilde{K}$-isomorphe à $\Pi_{\tilde{E}/\tilde{K}} H'$, où H' est un groupe déployé sur $\tilde{E}$. De plus, $\mathrm{Gal}(\tilde{E}/K)$ est produit direct de $\mathrm{Gal}(\tilde{E}/\tilde{K})$ et de $\mathrm{Ker}\,\rho_{H,K}$. Si E est le corps des invariants de $\mathrm{Ker}\,\rho_{H,K}$, on a donc $\tilde{E} = E\tilde{K}$, $\tilde{K} \cap E = K$ et $\tilde{E}$ est l'extension étale maximale de E. Appliquant 2.5, on trouve un groupe H'^d résiduellement déployé sur $\tilde{E}$ et $\tilde{E}$-isomorphe à H', et il suffit de poser $H^d = \Pi_{E/K} H'^d$.

(b) $\Sigma \neq \{1\}$. On raisonne alors comme en 2.6 : les orbites de $\rho_{H,K}$ et de $\rho_{H,\tilde{K}}$ sont les mêmes.

Dans le cas (b), contrairement au cas (a) (cf. 2.8), il n'est pas nécessaire de supposer H simplement connexe ou adjoint.

2.7. Le cas de caractéristique résiduelle nulle ou première à $[\tilde{E} : \tilde{K}]$. Posons $n = [\tilde{E} : \tilde{K}]$. On note K_n l'extension cyclotomique de niveau n de K ("corps des racines n-ièmes de l'unité"). On sait que $\mathrm{Gal}(K_n/K)$ s'identifie canoniquement à un sous-groupe de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ ([3]., p.V 78). On note A_n le "groupe affine" de l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, c'est-à-dire le groupe des transformations

$$\gamma_{a,b} : x \to ax + b$$

de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (avec $a \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ et $b \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$), et A_n^K le sous-groupe de A_n formé des $\gamma_{a,b}$ avec $a \in \mathrm{Gal}(K_n/K)$.

On suppose dans la suite de ce n° que la condition suivante est satisfaite :

(CO) $\mathrm{car}\, k = 0$*, ou, plus généralement,* n *est premier à l'exposant caractéristique de* k.

Alors, $\tilde{E}$ *est l'extension cyclique* $\tilde{K}(\pi^{1/n})$: voir par exemple [16] pp. 75-76 (les résultats y sont énoncés pour un corps complet, mais on vérifie aisément que les démonstrations restent valables en le supposant seulement hensélien ; si $\mathrm{car}\, k = 0$, la prop. 8, p. 76, donne explicitement le résultat ; si $\mathrm{car}\, k = p \neq 0$, le cor. 4, p. 75, montre que $\tilde{E}$ est *cyclique* et on raisonne comme dans la démonstration de la prop. 8 pour montrer que $\tilde{K}$ a une seule extension de degré n). Par suite, $\tilde{E}$ est une extension *galoisienne* de K. On note ζ une racine primitive n-ième de l'unité, de sorte que $a \in \mathrm{Gal}(K_n/K) \subset (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ opère sur K_n par $\zeta \to \zeta^a$. On *identifie* d'une part $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $\mathrm{Gal}(\tilde{E}/\tilde{K})$ en posant $b \cdot \pi^{1/n} = \zeta^b \pi^{1/n}$ pour $b \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, d'autre part $\mathrm{Gal}(\tilde{E}/\tilde{K})$ et son image dans $\mathrm{Aut}\, D$, notée Γ, grâce à l'isomorphisme $\rho_{H,\tilde{K}}$.

Soit $\mathcal{U}$ l'ensemble des $u \in K_s$ tels que u^n soit une *uniformisante* de K. Pour $u \in \mathcal{U}$, on pose $E_u = K_n(u)$ et $E_{0,u} = K(u)$: ce sont des extensions totalement ramifiées de degré n de K_n et K respectivement, la première étant galoisienne.

Lemme. *Soit* $u \in \mathcal{U}$. *Il existe un isomorphisme* ϕ_u *et un seul de* A_n^x *sur* $\mathrm{Gal}(E_u/K)$ *tel que*

$$\phi_u(\gamma_{a,b})(\zeta^k u) = \zeta^{ak+b} u$$

pour $a \in \mathrm{Gal}(K_n/K) \subset (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$, $b \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *et* $k \in \mathbb{Z}$.

La vérification est immédiate, compte tenu de ce que $\mathrm{Gal}(E_u/K)$ est produit semi-direct de $\mathrm{Gal}(E_u/E_{0,u}) = \mathrm{Gal}(K_n/K)$ par $\mathrm{Gal}(E_u/K_n) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Proposition. *Supposons que* (CO) *est satisfaite et que* H *est simplement connexe ou adjoint, ou plus généralement que* $\mathrm{Aut}(D, C) = \mathrm{Aut}\, D$. *L'ensemble* $\mathcal{R}$ *est alors non vide.*

Supposons de plus que H *est* $\tilde{K}$*-presque simple. Il existe alors un isomorphisme* φ *de* A_n^K *sur un sous-groupe de* $\mathrm{Aut}\, D$ *tel que* $\mathcal{L}^d$ (2.4) *est l'ensemble des couples* $(E_u, \varphi \circ \phi_u^{-1})$ *(cf. lemme précédent) pour* $u \in \mathcal{U}$. *L'élément* $\lambda(u) = \lambda((E_u, \varphi \circ \phi_u^{-1}))$ *de* $\mathcal{R}$ *ne dépend que de l'image de* $\pi^{-1}u^n$ *dans* $k^\times/(k^\times)^n$ *et on obtient par passage au quotient une bijection de* $k^\times/(k^\times)^n$ *sur* $\mathcal{R}$. *Tout élément de* $\mathcal{R}$ *est donc de type* $(D, \varphi(A_n^K))$.

Si de plus $\mathrm{car}\, K = \mathrm{car}\, k$ *et si* H_1 *et* H_2 *sont deux groupes résiduellement déployés sur* K *et* $\tilde{K}$*-isomorphes à* H*, il existe un* k*-automorphisme* τ *de* K *tel que* H_1 *et* H_2 *soient* τ*-isomorphes.*

Supposons d'abord que H est $\tilde{K}$-presque simple. Le groupe de Galois $\Gamma = \mathrm{Gal}(\tilde{E}/\tilde{K}) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ opère alors transitivement sur les composantes connexes de D. Soit D_0 une telle composante connexe. Le stabilisateur de D_0 dans Γ est un sous-groupe cyclique de $\mathrm{Aut}\, D_0$, un coup d'oeil sur la classification montre qu'il est d'ordre $n_0 = 1, 2$ ou 3 et il existe une orbite Ω_0 de Γ telle que $\mathrm{Card}(\Omega_0 \cap D_0) = n_0$, d'où $\mathrm{Card}\,\Omega_0 = n$. Choisissons un point $s_0 \in \Omega_0 \cap D_0$, de sorte que $b \mapsto b \cdot s_0$ est une bijection de Γ sur Ω_0 et que $\Omega_0 \cap D_0 = \{b \cdot s_0 \mid n_0 b = 0\}$. Soient $\Omega_1, \cdots, \Omega_k$ les autres orbites de Γ dans D, et, pour $j = 1, \cdots, k$, soit s_j un point arbitrairement choisi dans $\Omega_j \cap D_0$. Posons

$$\hat{\Gamma} = \{\gamma \in \mathrm{Aut}\, D \mid \gamma\Gamma\gamma^{-1} = \Gamma \text{ et } \gamma \cdot \Omega_j = \Omega_j \text{ pour } 0 \leqq j \leqq k\}.$$

Soit a l'homomorphisme de $\hat{\Gamma}$ dans $\mathrm{Aut}\,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ tel que $\gamma x \gamma^{-1} = a(\gamma)x$ pour $\gamma \in \hat{\Gamma}$ et $x \in \Gamma = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Puisque Γ opère de manière simplement transitive sur Ω_0, le groupe $\hat{\Gamma}$ est produit semi-direct du stabilisateur $\hat{\Gamma}_0$ de s_0 dans $\hat{\Gamma}$ par Γ. Mais un élément de $\hat{\Gamma}_0$ laisse fixes tous les s_j. Pour $\gamma \in \hat{\Gamma}_0$, $a = a(\gamma)$, $x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $0 \leqq j \leqq k$, on a donc

$$\gamma \cdot (x s_j) = (\gamma x \gamma^{-1}) \cdot s_j = (ax) \cdot s_j \tag{$*$}$$

Inversement, on vérifie sans peine que, pour tout $a \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$, la formule $(*)$ définit un élément de $\hat{\Gamma}_0$. Autrement dit, *il existe un isomorphisme $\hat{\varphi}$ du groupe affine A_n sur $\hat{\Gamma}$ tel que*

$$\hat{\varphi}(\gamma_{a,b}) \cdot (x s_j) = (ax + b) \cdot s_j$$

pour $a \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$, $b, x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $0 \leqq j \leqq k$. On note φ la restriction de $\hat{\varphi}$ à A_n^K.

Soit alors $(E, \rho) \in \mathcal{L}^d$ et soit $L = \tilde{K} \cap E$ la sous-extension étale maximale de E. On a vu que l'opération de restriction fournit un isomorphisme canonique de Γ sur $\mathrm{Gal}(E/L)$ qui nous permet d'identifier ces deux groupes. Mais on sait qu'il existe un isomorphisme θ_0 de $\mathrm{Gal}(E/L)$ dans le groupe des racines de l'unité du corps résiduel l de L ([16], p. 75). Par suite, l contient les racines n-ièmes de l'unité et, vu le lemme de Hensel, *L contient K_n*. Il existe donc $v \in L$ tel que $E = L(\alpha)$, avec $\alpha^n = v$. *Montrons que l'on peut prendre pour v une uniformisante de L.* En effet, posons $v = u\pi^k$ avec $u \in L$, $\omega(u) = 0$ et $k \in \mathbb{Z}$. Si $d = (k, n)$, on a $u = (\alpha^{n/d}\pi^{-k/d})^d$ et l'image $\bar{u}$ de u dans le corps résiduel de E est une puissance d-ième. Mais le corps résiduel de L est le même que celui de E et le lemme de Hensel entraîne qu'il existe $x \in L$ avec $\omega(x) = 0$ et $u = x^d$. On a alors $(\alpha^{n/d})^d = (x\pi^{k/d})^d$ et $\alpha^{n/d}$ appartient à L puisque $L \supset K_n \supset K_d$. Par suite, $d = 1$ et il suffit de remplacer α par $\alpha^r\pi^s$, où r et s sont des entiers tels que $kr + ns = 1$, ce qui remplace v par $u^r\pi$.

Comme ρ est injectif, que $\mathrm{Im}\,\rho$ contient et normalise Γ et a les mêmes orbites que Γ, on voit que ρ est un isomorphisme de $\mathrm{Gal}(E/K)$ sur un sous-groupe de $\hat{\Gamma}$ contenant Γ, donc produit semi-direct de son intersection avec $\hat{\Gamma}_0$ par Γ. Soit Γ_0 l'image réciproque de cette intersection dans $\mathrm{Gal}(E/K)$ et soit E_0 le corps des invariants de Γ_0. Ce qui précède entraîne que $E = LE_0$, que L et E_0 sont linéairement disjointes et que E_0 est une extension (non galoisienne) totalement ramifiée de degré n de K.

Soit $\sigma \in \Gamma_0$. On a $E = L(\alpha) = L(\sigma(\alpha))$ et, d'après la théorie de Kummer, ceci signifie que α^n et $\sigma(\alpha)^n$ engendrent le même sous-groupe de $L^\times/(L^\times)^n$ ([3], V 85), autrement dit qu'il existe un entier r premier avec n et un $x_\sigma \in L^\times$ tels que $\sigma(\alpha)^n = \alpha^{nr}x_\sigma^n$. Prenant les valuations des deux membres, on trouve $1 = r + n\omega(x_\sigma)$, d'où $\sigma(\alpha)^n = \alpha^n y_\sigma^n$ avec $y_\sigma = \alpha^{-n\omega(x_\sigma)}x_\sigma \in L^\times$. Par suite, on a $\sigma(\alpha) = c_\sigma \cdot \alpha$, où $c_\sigma \in L^\times$est l'une des racines n-ièmes de y_σ^n. L'application $\sigma \mapsto c_\sigma$ est alors un 1-cocycle de $\Gamma_0 = \mathrm{Gal}(L/K)$ à valeurs dans $L^\times$ et, vu le théorème 90 de Hilbert, il existe $c \in L^\times$ tel que $c_\sigma = \sigma(c)c^{-1}$. Quitte à multiplier c par une puissance de π, on peut supposer $\omega(c) = 0$. Comme $u = c^{-1}\alpha$ est invariant par tout $\sigma \in \Gamma_0 = \mathrm{Gal}(E/E_0)$, on voit que u est une uniformisante de E_0 et que $u^n = c^{-n}\alpha^n \in L \cap E_0 = K$ est une uniformisante de K.

Autrement dit, nous avons montré qu'*il existe $u \in \mathcal{U}$ tel que $E = L(u)$ et $E_0 = E_{0,u} = K(u)$.*

Comme $\pi^{-1}u^n \in K$, on a $\pi^{-1/n}u \in \tilde{K}$, d'où $b \cdot u = \zeta^b u$ pour $b \in \Gamma$. Il en résulte que l'action de $\Gamma_0 = \mathrm{Gal}(L/K) = \mathrm{Gal}(E/K)/\mathrm{Gal}(E/L)$ sur $\mathrm{Gal}(E/L)$ se factorise par l'homomorphisme de restriction $\mathrm{Gal}(L/K) \to \mathrm{Gal}(K_n/K)$. Mais, cette action est *fidèle* puisque celle de $\hat{\Gamma}_0$ sur Γ l'est. Par suite, *on a $L = K_n$ et $E = E_u$.*

Enfin, les éléments $\rho(\phi_u(\gamma_{a,0}))$ et $\varphi(\gamma_{a,0})$ de Γ_0 opèrent de la même manière sur Γ, donc sont égaux. Comme, après nos identifications, $\rho \circ \phi_u$ et φ sont l'identité sur Γ, il en résulte que $\rho = \varphi \circ \phi_u^{-1}$.

En résumé, nous avons montré que *tout élément de* $\mathcal{L}^d$ *est de la forme* $(E_u, \varphi \circ \phi_u^{-1})$ *pour un* $u \in \mathcal{U}$. La réciproque est immédiate : si $u \in \mathcal{U}$, alors $\tilde{E} = E_u\tilde{K}$, l'homomorphisme $\varphi \circ \phi_u^{-1}$ prolonge $\rho_{H,\tilde{K}}$, il est injectif et son image est contenue dans $\hat{\Gamma}$, donc a mêmes orbites que $\Gamma = \operatorname{Im} \rho_{H,\tilde{K}}$.

Montrons maintenant qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $\lambda((E_u, \varphi \circ \phi_u^{-1})) = \lambda((E_{u'}, \varphi \circ \phi_{u'}^{-1}))$ (pour $u, u' \in \mathcal{U}$) est que $(u'u^{-1})^n \in (\mathcal{O}^\times)^n$. Comme un élément de $\mathcal{O}^\times$ est une puissance n-ième si et seulement si son image dans $k^\times$ en est une, ceci achèvera la démonstration du deuxième alinéa de la proposition. Que la condition soit suffisante est immédiat : elle entraîne en effet $u' = \zeta^c uv$ avec $c \in \mathbb{Z}$ et $v \in \mathcal{O}^\times$, d'où $E_u = E_{u'}$, et un calcul simple montre que $\phi_{u'} = \phi_u \circ \operatorname{int} \gamma_{1,c}$, d'où $\varphi \circ \phi_{u'}^{-1} = \operatorname{int}(\varphi(\gamma_{1,c}))^{-1} \circ \varphi \circ \phi_u^{-1}$. Réciproquement, si les éléments de $\mathcal{R}$ images de u et u' sont les mêmes, alors $E_u = E_{u'}$, et il existe $\alpha \in \operatorname{Aut} D$ centralisant Γ et transformant $\varphi \circ \phi_u^{-1}$ en $\varphi \circ \phi_{u'}^{-1}$. Or le centralisateur Γ_1 de Γ dans $\operatorname{Aut} D$ est le produit de Γ par le stabilisateur de D_0 dans Γ_1. On en déduit que Γ_1 est réduit à Γ lorsque $n_0 = 2$ ou 3 et est produit direct de Γ par un sous-groupe isomorphe à $\operatorname{Aut} D_0$ et commutant avec Γ lorsque $n_0 = 1$. Par suite, on peut supposer $\alpha \in \Gamma$ et les deux lois d'opération de $\operatorname{Gal}(E_u/K)$ dans D se déduisent l'une de l'autre par un automorphisme intérieur de $\operatorname{Gal}(E_u/K)$ défini par un élément σ de $\Gamma = \operatorname{Gal}(E_u/K_n)$. Comme $E_{0,u}$ est le corps des invariants du stabilisateur de s_0, on a $E_{0,u} = \sigma(E_{0,u'})$ et il existe un entier c tel que $K(u) = K(\zeta^c u')$. Par suite, u et $\zeta^c u'$ sont deux uniformisantes de $K(u)$ et il existe $x \in K(u)$ tel que $\omega(x) = 0$ et que $u^n = x^n u'^n$. Mais les corps résiduels de K et de $K(u)$ sont les mêmes et le lemme de Hensel entraîne qu'il existe $y \in \mathcal{O}$ tel que $y^n = x^n$, d'où $(u^{-1}u')^n \in (\mathcal{O}^\times)^n$, ce qu'il fallait démontrer.

La dernière assertion de la proposition est évidente puisqu'en égale caractéristique, K est, pour tout $u \in \mathcal{U}$, le corps des séries formelles $k((u^n))$ en u^n.

Enfin, on passe du cas $\tilde{K}$-presque simple au cas simplement connexe (ou adjoint) par produit direct (notons que l'extension déployante de toute composante $\tilde{K}$-presque simple de H est une sous-extension de $\tilde{E}$, donc satisfait à (CO)), puis au cas général par isogénie *stricte*, au sens de [18] (isogénie *centrale* dans la terminologie de [2]).

2.8. La prop. 2.7 devient inexacte si l'on supprime l'hypothèse $\operatorname{Aut}(D, C) = \operatorname{Aut} D$. Plus précisément, gardons les hypothèses de 2.7, en supposant H simplement connexe et $\tilde{K}$-presque simple, et soit H' un groupe défini sur $\tilde{K}$, strictement isogène à H, de cocentre $C' \subset C$. Soit $\mathcal{R}'$ l'ensemble des classes de K-isomorphisme de groupes résiduellement déployés sur K et $\tilde{K}$-isomorphes à H'. Alors, on voit aussitôt que $\mathcal{R}'$ *est non vide si et seulement si* $\varphi(A_n^K) \subset \operatorname{Aut}(D, C')$ et que sous cette condition 2.7 reste valable en remplaçant H par H'.

Donnons un exemple où $\mathcal{R}' = \emptyset$. Prenons $K = \mathbb{R}((t))$, de sorte que, pour $n \geqq 3$, on a $\tilde{K} = K_n = \mathbb{C}((t))$ et que A_n^K est le groupe diédral d'ordre $2n$. Prenons $H = \Pi_{C((t^{1/7}))/C(t))}\mathrm{SL}_2$ (groupe obtenu par restriction des scalaires à partir de SL_2). La représentation de Γ dans C est alors la représentation régulière de $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ sur le corps $\mathbb{F}_2$ et se décompose en somme directe de trois représentations irréductibles inéquivalentes, la représentation unité et deux représentations de degré 3 échangées par l'automorphisme $x \mapsto -x$ de $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, correspondant l'une aux racines 7-ièmes de l'unité, c'est-à-dire aux éléments de $\mathbb{F}_8$, racines de l'équation $X^3 + X^2 + 1 = 0$, l'autre aux racines de $X^3 + X + 1 = 0$. Il suffit alors de prendre pour C' l'espace V de l'une de ces deux représentations.

On peut avoir $\mathcal{R}' = \emptyset$ même si H' est défini et quasi-déployé sur K et $\tilde{K}$-presque simple. Par exemple, soit H_0 le groupe simplement connexe quasi-déployé sur $E = \mathbb{R}((t^{1/7}))$, de type ${}^2D_{2n}$ ($n \geqq 2$) correspondant à l'extension quadratique $\tilde{E} = \mathbb{C}((t^{1/7}))$ de E. On prend $H = \Pi_{E/K}H_0$. La représentation de Γ dans C est somme directe de deux exemplaires de la représentation régulière de Γ sur $\mathbb{F}_2$, échangés par le générateur σ de $\operatorname{Gal}(\tilde{E}/E)$. Il suffit alors de prendre pour H' le groupe strictement isogène à H de cocentre $V + \sigma(V)$.

2.9. Dans les cas que nous venons d'étudier, tous les éléments de $\mathcal{R}$ sont de même type. *Ceci n'est pas toujours vrai lorsque* $\operatorname{car} k \neq 0$. Donnons un contre-exemple. Soit $p = \operatorname{car} k > 0$ et soit r un entier > 1, premier à p. Supposons que K possède une extension galoisienne étale L cyclique d'ordre r et une extension galoisienne *totalement ramifiée* E de degré $e = rp^h$, dont le groupe de Galois Γ soit produit semi-direct d'un sous-groupe A cyclique d'ordre r par un sous-groupe distingué d'ordre p^h sur lequel A opère *fidèlement* (cf. [16] p. 75). On pose $\tilde{E} = E\tilde{K}$ et l'on identifie $\mathrm{Gal}(\tilde{E}/\tilde{K})$ à Γ.

Prenons $H = \Pi_{E/K}\mathrm{SL}_2$. Alors, H est $\tilde{K}$-isomorphe à $\Pi_{\tilde{E}/\tilde{K}}\mathrm{SL}_2$ (cf. II 1.5.3), d'où $\mathrm{rg}_K H = \mathrm{rg}_{\tilde{K}} H = 1$ et H est *résiduellement déployé sur K*. Le graphe de Dynkin D se compose de e points et le choix d'un "point origine" $d \in D$ permet de l'identifier à Γ opérant sur lui-même par translations à *gauche*.

Posons maintenant $E' = EL \cong E \otimes_K L$, de sorte que $\mathrm{Gal}(E'/K)$ s'identifie canoniquement au produit direct $\Gamma \times \mathrm{Gal}(L/K)$. Le choix d'un isomorphisme de $\mathrm{Gal}(L/K)$ sur A nous permet donc d'identifier $\mathrm{Gal}(E'/K)$ à $\Gamma \times A$. Prolongeons alors la loi d'opération de Γ sur $D = \Gamma$ en une loi d'opération de $\mathrm{Gal}(E'/K) = \Gamma \times A$ en faisant opérer le second facteur par translations *à droite sur* Γ, de sorte que $\Gamma \times A$ opère *fidèlement* sur D. Le stabilisateur de d dans $\Gamma \times A$ est le sous-groupe B formé des (a^{-1}, a) pour $a \in A$ et $\Gamma \times A$ est produit semi-direct de B par $\Gamma = \Gamma \times \{1\}$. Soit F le corps des invariants de B dans E' : l'assertion précédente entraîne que $E' = FL$ et que $F \cap L = K$. Par suite, F est une extension totalement ramifiée (non galoisienne) de K et $\tilde{E} = F\tilde{K} \cong F \otimes_K \tilde{K}$.

Soit alors H' le groupe simplement connexe quasi-déployé sur K, d'extension déployante E', de graphe de Dynkin D, correspondant à la loi d'opération fidèle de $\mathrm{Gal}(E'/K)$ dans D introduite ci dessus. Il est immédiat que $H' = \Pi_{F/K}\mathrm{SL}_2$. Par suite, H' est $\tilde{K}$-isomorphe à $\Pi_{\tilde{E}/\tilde{K}}\mathrm{SL}_2$ donc à H, et est résiduellement déployé sur K puisque $\mathrm{rg}_K H' = \mathrm{rg}_{\tilde{K}} H' = 1$.

On a ainsi construit deux groupes simplement connexes H et H', résiduellement déployés sur K, $\tilde{K}$-presque simples et $\tilde{K}$-isomorphes, mais qui ne sont pas de même type sur K : la K-extension déployante de H est E, de degré e et celle de H' est E', de degré re.

2.10. Terminons cette entomologie par un exemple d'un groupe H *simplement connexe, défini et quasi-déployé sur K, K-presque simple, pour lequel $\mathcal{R}$ est vide*. Il faut évidemment vu 2.7 supposer $\mathrm{car}\, k = p > 0$. Donnons-nous trois extensions L, E_1 et E_2 de K telles que

– L est une extension quadratique étale de K;
– E_i est une extension galoisienne totalement ramifiée de L et tout $\sigma \in \Gamma_s$ induisant sur L le K-automorphisme non trivial de L permute E_1 et E_2;
– posons $\tilde{E}_i = E_i\tilde{K}$; alors, $\tilde{E}_1 \neq \tilde{E}_2$.

Remarquons que ces conditions ne sont pas compatibles si $\mathrm{car}\, k = 0$.

Prenons alors $H = \prod_{E_1/K} \mathrm{SL}_2$, de sorte que H est bien quasi-déployé sur K, de rang 1. De plus, H est $\tilde{K}$-isomorphe à $\Pi_{\tilde{E}_1/\tilde{K}}\mathrm{SL}_2 \times \Pi_{\tilde{E}_2/\tilde{K}}\mathrm{SL}_2$ (car $E_1 \otimes_K L \cong E_1 \times E_2$, donc $E_1 \otimes_K \tilde{K} \cong \tilde{E}_1 \times \tilde{E}_2$) d'où $\mathrm{rg}_{\tilde{K}} H = 2$. Si H' est un groupe défini sur K et $\tilde{K}$-isomorphe à H, l'action sur $H'(\tilde{K}) = H(\tilde{K})$ d'un élément $\sigma \in \mathrm{Gal}(\tilde{K}/K)$ non trivial sur L, doit permuter les deux facteurs, donc $\mathrm{rg}_K H' \leqq 1$, et H' n'est pas résiduellement déployé.

Reste à construire explicitement un exemple d'extensions L, E_1, E_2 convenables. Tout d'abord, on prend pour L une extension quadratique étale de K, définie par une équation irréductible $X^2 - aX + b = 0$, avec $a, b \in \mathcal{O}^\times$. On note u_1, u_2 les deux racines de cette équation, de sorte que $u_1 + u_2 = a$.

Si $\mathrm{car}\, K = 0$, on suppose que K contient les racines p-ièmes de l'unité et on pose $E_i = L((1 + \pi u_i)^{1/p})$. La seule chose non évidente à vérifier est que $\tilde{E}_1 \neq \tilde{E}_2$. Or dans le cas contraire, il existerait, d'après Kummer, un entier r et un $x \in \tilde{K}$ tels que $1 + \pi u_1 = x^p(1 + \pi u_2)^r$. Ceci entraîne $\omega(x) = 0$, puis $x \equiv 1 \bmod \pi$, puis $u_1 \equiv r u_2 \bmod \pi$, c'est-à-dire $a \equiv (r+1)u_2 \bmod \pi$, ce qui est impossible puisque d'une part $a \not\equiv 0 \bmod \pi$, d'autre part l'équation $X^2 - aX + b = 0$ reste irréductible après réduction $\bmod \pi$.

Si $\mathrm{car}\, K = p$, on pose $E_i = L(v_i)$, où v_i est racine de l'équation $X^p - \pi^{p-1}X - \pi u_i = 0$. Alors, $\pi^{-1}v_i$ est racine d'une équation d'Artin-Schreier et on raisonne comme ci-dessus, en remplaçant la théorie de Kummer par celle d'Artin-Schreier.

Remarque. Le groupe $\Pi_{\tilde{E}_1/\tilde{K}}\mathrm{SL}_2$ est un exemple de groupe défini sur $\tilde{K}$, simplement connexe, $\tilde{K}$-presque simple, pour lequel $\mathcal{R} = \emptyset$: il n'existe même pas de groupe *défini sur* K et $\tilde{K}$-isomorphe à H.

En supposant $p = 2$ (resp. $p = 3$) et en considérant le groupe SU_3 quasi-déployé sur $\tilde{K}$ (resp. le groupe simplement connexe quasi-déployé de type ${}^3D_4$ sur $\tilde{K}$) correspondant à l'extension cyclique de degré 2 (resp. 3) $\tilde{E}_1$ de $\tilde{K}$, on trouve un exemple de groupe H simplement connexe défini sur $\tilde{K}$, absolument presque simple, pour lequel $\mathcal{R} = \emptyset$, pour la même raison que ci-dessus.

2.11. En résumé :

– si H est simplement connexe ou adjoint, alors $\mathcal{R} \neq \emptyset$ dès que ou bien car k ne divise pas $[\tilde{E} : \tilde{K}]$ (2.7), ou bien H est défini sur K et $\tilde{K}$-presque simple (2.6, Remarque 3). Il y a un exemple où $\mathcal{R} = \emptyset$ avec H défini sur K et K-presque simple, ou avec H absolument presque simple (2.10).

– si le cocentre de H est quelconque, alors $\mathcal{R} \neq \emptyset$ dès que ou bien H est déployé sur $\tilde{K}$ (2.5), ou bien H est défini sur K et absolument presque simple (2.6). Il y a un exemple où $\mathcal{R} = \emptyset$ avec H défini sur K, $\tilde{K}$-presque simple et car $k = 0$ (2.8).

3. Cohomologie.

On donne une extension galoisienne étale K' de K, avec $K \subset K' \subset \tilde{K}$, d'anneau des entiers $\mathcal{O}'$, d'idéal maximal $\mathbf{p}'$, de corps résiduel k' et de groupe de Galois $\Gamma = \mathrm{Gal}(K'/K) = \mathrm{Gal}(k'/k)$.

3.1. Soit X un groupe compact totalement discontinu ; un X*-groupe* est un groupe discret sur lequel X opère continûment (autrement dit le stabilisateur de chaque point est ouvert, donc d'indice fini) par automorphismes.

Soit A un $\tilde{\Gamma}$-groupe et soit $A(K')$ le groupe des points fixes de $\mathrm{Gal}(\tilde{K}/K')$ dans A. Le groupe Γ opère sur $A(K')$ et on peut considérer l'ensemble $Z^i(\Gamma, A(K'))$ des cocycles continus $a : s \mapsto a_s$ de Γ à valeurs dans $A(K')$ et les ensembles de cohomologie $H^i(\Gamma', A(K'))$ (pour $i \geqq 0$ si A est commutatif, pour $i = 0, 1$ sinon). *On les note simplement* $Z^i(A)$ *et* $H^i(A)$ lorsque aucune confusion n'est à craindre.

Quatre cas seront principalement envisagés :

(1) $A = G(\tilde{K})$: on écrit $Z^i(G)$ et $H^i(G)$ au lieu de $Z^i(A), H^i(A)$.
(2) $A = H$ est un sous-groupe de $G(\tilde{K})$ contenant G^{00} et stable par $\tilde{\Gamma}$.
(3) $A = \mathbf{G}(\tilde{\mathcal{O}})$, où $\mathbf{G}$ est un $\mathcal{O}$-schéma en groupes lisse de fibre générique G.
Notations : $Z^i(\mathbf{G}), H^i(\mathbf{G})$.
(4) $A = g(\tilde{k})$, où g est un groupe algébrique défini sur k. Notations: $Z^i(g), H^i(g)$.

3.2. Pour simplifier l'exposé, *nous ferons les démonstrations des assertions qui suivent en supposant de plus que le degré* $[K' : K]$ *est fini.* On passe de là au cas général par les procédés habituels de *limite inductive* ([17] 1.9) : nous en laisserons le soin au lecteur.

3.3. Torsion. Soit E un Γ-groupe opérant sur G par automorphismes de $\tilde{K}$-groupe algébrique, de manière compatible avec l'action de Γ_s : pour $s \in \Gamma_s$, d'image $\bar{s} \in \Gamma$, on a ${}^s(\alpha \cdot g) = {}^{\bar{s}}\alpha \cdot {}^s g$ pour $\alpha \in E, g \in G(K_s)$.

Rappelons la définition du K-groupe algébrique ${}_\alpha G$ obtenu à partir de G par *torsion* par un cocycle $\alpha \in Z^1(\Gamma, E)$: comme K_s-groupe algébrique, on a ${}_\alpha G = G$ et l'action de $s \in \Gamma_s$ sur ${}_\alpha G(K_s) = G(K_s)$ est donnée par $s : g \mapsto \alpha_{\bar{s}} \cdot {}^s g$, où $\bar{s}$ est l'image de s dans Γ ([17] I-59). Il s'ensuit que ${}_\alpha G = G$ comme K'-groupe algébrique.

On peut en particulier prendre $E = G(K')$ opérant sur G par automorphismes intérieurs, d'où la définition du groupe ${}_a G$ obtenu par torsion de G par un cocycle $a \in Z^1(G)$. On sait (loc. cit.) que si a et b sont deux cocycles cohomologues, alors ${}_a G$ et ${}_b G$ sont K-isomorphes, de manière d'ailleurs non canonique : si $c \in G(L)$ est tel que $b_s = c^{-1} a_s {}^s c$ $(s \in \Gamma)$, alors $\mathrm{int}\, c$ est un K-isomorphisme de ${}_b G$ sur ${}_a G$. D'autre part, si $b \in Z^1({}_a G)$, alors $ba \in Z^1(G)$, l'application $b \mapsto ba$ est une bijection de $Z^1({}_a G)$ sur $Z^1(G)$ et définit par passage aux quotients une bijection $\tau_a : H^1({}_a G) \to H^1(G)$ appelée *translation* par a (loc. cit.). On a ${}_b({}_a G) = {}_{ba} G$.

On a des définitions et résultats semblables dans chacun des trois autres cas envisagés ci-dessus. Nous laissons au lecteur le soin de les expliciter.

3.4. Enonçons deux lemmes "bien connus", en en rappelant brièvement la démonstration.

Lemme 1. *Soit A un groupe algébrique défini sur k, soit U un sous-groupe distingué défini sur k unipotent et connexe, et soit $B = A/U$.*

(i) *L'application canonique de $H^0(A)$ dans $H^0(B)$ est surjective.*
(ii) *L'application canonique de $H^1(A)$ dans $H^1(B)$ est bijective.*
(iii) *Plus précisément, pour tout cocycle $\bar{z} \in Z^1(B)$, il existe un cocycle $z \in Z^1(A)$ d'image $\bar{z}$ et, si deux cocycles $z, z' \in Z^1(A)$ ont même image dans $Z^1(B)$, alors il existe $u \in U$ tel que $z'_s = u^{-1} z_s {}^s u$ pour tout $s \in \Gamma$.*

Par récurrence sur $\dim U$ on se ramène au cas où U est *commutatif*, et l'on sait qu'un groupe unipotent connexe commutatif défini sur un corps parfait est cohomologiquement trivial (i.e. $H^i(U) = \{0\}$ pour $i > 0$). L'assertion (i) résulte alors de l'exactitude de la suite $H^0(A) \to H^0(B) \to H^1(U)$ ([17], I-59). De plus, les groupes A et B opèrent sur U par automorphismes intérieurs et pour tout cocycle z appartenant à $Z^1(A)$ ou à $Z^1(B)$, le groupe tordu ${}_zU$ est toujours unipotent connexe commutatif. L'assertion (ii) résulte alors du cor. 2 à la prop. 39 et de la prop. 41 de [17] (1-67 et 70). La première partie de l'assertion (iii) résulte de la démonstration de la prop. 41 de [17]. Pour la seconde, on vérifie que, si $z'_s = a_s z_s$ avec $a_s \in U$, alors $a \in Z^1({}_zU)$, et il existe $u \in U$ tel que $a_s = u^{-1} z_s {}^s u z_s^{-1}$, d'où $z'_s = u^{-1} z_s {}^s u$.

Lemme 2. *Soit $\mathbf{G}$ un $\mathcal{O}$-schéma en groupes lisse.*

(i) *L'application canonique de $H^0(\mathbf{G}) = \mathbf{G}(\mathcal{O})$ dans $H^0(\overline{\mathbf{G}}) = \mathbf{G}(k)$ est surjective.*
(ii) *L'application canonique de $H^1(\mathbf{G})$ dans $H^1(\overline{\mathbf{G}})$ est bijective.*

L'assertion (i) est le lemme de Hensel. Plus généralement, pour n entier $\geqq 0$, posons $\mathcal{O}_n = \mathcal{O}/\mathbf{p}^{n+1}$ et $\mathcal{O}'_n = \mathcal{O}'/\mathbf{p}'^{n+1}$ (de sorte que $\mathcal{O}_0 = k$ et $\mathcal{O}'_0 = k'$): le lemme de Hensel dit que l'application canonique de $\mathbf{G}(\mathcal{O})$ (resp. $\mathbf{G}(\mathcal{O}_{n+1})$) dans $\mathbf{G}(\mathcal{O}_n)$ est surjective et $\mathbf{G}(\mathcal{O})$ est la limite projective des $\mathbf{G}(\mathcal{O}_n)$. Les mêmes assertions restent vraies en remplaçant la lettre $\mathcal{O}$ par $\mathcal{O}'$ (rappelons que *dans les démonstrations* on suppose que $[K' : K]$ est fini, donc que K' est complet). D'autre part, soit $\mathbf{G}_n$ le $\mathcal{O}_n$-schéma en groupes lisse obtenu par le changement de base $\mathcal{O} \to \mathcal{O}_n$; par application du foncteur de Greenberg aux $\mathbf{G}_n$, on obtient une suite de groupes algébriques Q_n définis sur k, telle que $Q_n(k')$ s'identifie canoniquement en tant que Γ-groupe à $\mathbf{G}_n(\mathcal{O}'_n)$ et l'application canonique de $\mathbf{G}(\mathcal{O}'_{n+1})$ sur $\mathbf{G}(\mathcal{O}'_n)$ à un "morphisme de transition" $\lambda_n : Q_{n+1} \to Q_n$ défini sur k, surjectif, séparable et à noyau unipotent connexe (cf. [13]).

Soit alors $z_0 \in Z^1(\mathbf{G}_0)$. Par application du lemme 1, on construit par récurrence une suite de cocycles $z_n \in Z^1(\mathbf{G}(\mathcal{O}'_n))$ telle que $z_n = \lambda_n \circ z_{n+1}$, d'où, par passage à la limite projective, un cocycle $z \in Z^1(\mathbf{G})$ d'image z_0. Soient maintenant $z, z' \in Z^1(\mathbf{G})$, dont les images z_0 et z'_0 dans $Z^1(\mathbf{G}_0)$ sont cohomologues ; il nous reste à montrer que z et z' sont cohomologues. Vu la surjectivité de l'application canonique de $\mathbf{G}(\mathcal{O}')$ dans $\mathbf{G}(k')$, on peut, supposer que $z'_0 = z_0$, quitte à remplacer z' par un cocycle cohomologue. En appliquant le lemme 1 (iii), on construit par récurrence une suite d'éléments $u_n \in \ker \lambda_n$ telle que les images z_n et z'_n de z et z' dans $Z^1(\mathbf{G}(\mathcal{O}'_n))$ satisfassent à

$$z'_n(s) = u_n^{-1} \cdots u_1^{-1} \cdot z_n(s) \cdot {}^s(u_1 \cdots u_n) \quad (\text{pour } s \in \Gamma).$$

Si u est la limite projective de la suite des produits $u_1 \cdots u_n$, on a alors $z'(s) = u^{-1} z(s) {}^s u$ pour tout s, ce qui achève la démonstration.

3.5. On note désormais H un sous-groupe de $G(\tilde{K})$ stable par $\tilde{\Gamma}$ et contenant la composante neutre résiduelle G^{00}.

Soit P un sous-groupe K-parahorique de G. Notons $\mathbf{N}_H(P)$ le sous-schéma en groupes ouvert de $\mathbf{N}(P)$ (1.7) tel que $\mathbf{N}_H(P)(\tilde{\mathcal{O}}) = \mathrm{Norm}_H(P)$ (cf. II 4.6.21). On appelle *application canonique de $H^1(\overline{\mathbf{N}_H(P)})$ dans $H^1(H)$* la composée de l'inverse de la bijection $H^1(\mathbf{N}_H(P)) \to H^1(\overline{\mathbf{N}_H(P)})$ donnée par le lemme 2 et de l'application canonique de $H^1(\mathbf{N}_H(P)) = H^1(\mathrm{Norm}_H(P))$ dans $H^1(H)$.

3.6. On dit qu'un cocycle z appartenant à $Z^1(\mathbf{N}_H(P))$ ou à $Z^1(\overline{\mathbf{N}_H(P)})$ est *anisotrope* si le k-groupe algébrique ${}_z\overline{\mathbf{P}}$ déduit de $\overline{\mathbf{P}}$ par torsion par z (les groupes $\mathbf{N}_H(P)$ et $\overline{\mathbf{N}_H(P)}$ opérant sur $\overline{\mathbf{P}}$ par automorphismes intérieurs) est presque anisotrope (1.7), condition qui ne dépend que de la classe de cohomologie de z puisque ${}_z\overline{\mathbf{P}}$ et ${}_{z'}\overline{\mathbf{P}}$ sont K-isomorphes lorsque z et z' sont cohomologues ([17] I-5). On note $Z^1(\mathbf{N}_H(P))_{an}$ (resp. $Z^1(\overline{\mathbf{N}_H(P)})_{an}$) l'ensemble de ces cocycles et $H^1(\mathbf{N}_H(P))_{an}$ (resp. $H^1(\overline{\mathbf{N}_H(P)})_{an}$) l'ensemble de leurs classes de cohomologie.

Remarquons que si P est un sous-groupe d'Iwahori, on a $H^1(\mathbf{N}_H(P))_{an} = H^1(\mathbf{N}_H(P))$; par contre, si P n'est pas un sous-groupe K-parahorique minimal de G, alors $H^1(\mathbf{N}_H(P))_{an}$ ne contient pas l'élément neutre de $H^1(\mathbf{N}_H(P))$ et peut être vide.

3.7. Lemme. *Soit P un sous-groupe K-parahorique de G et soit $z \in Z^1(H)$.*

(i) *Pour que P soit un sous-groupe K-parahorique de ${}_zG$, il faut et il suffit que $z \in Z^1(\mathbf{N}_H(P))$.*
(ii) *Pour que P soit un sous-groupe K-parahorique minimal de ${}_zG$, il faut et il suffit que $z \in Z^1(\mathbf{N}_H(P))_{an}$.*

Dire que P est un sous-groupe K-parahorique de ${}_zG$ signifie que $z_s{}^sPz_s^{-1} = P$ pour tout $s \in \Gamma$. L'assertion (i) en résulte puisque ${}^sP = P$. L'assertion (ii) est alors évidente puisque P minimal équivaut à $\overline{\mathbf{P}}$ presque anisotrope.

3.8. Lemme. *Soit P un sous-groupe K-parahorique de G et soit $\dot z \in H^1(H)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *$\dot z$ appartient à l'image canonique de $H^1(\overline{\mathbf{N}_H(P)})$ (resp. de $H^1(\overline{\mathbf{N}_H(P)})_{an}$) ;*
(b) *il existe un cocycle $z \in \dot z$ tel que P soit un sous-groupe K-parahorique (resp. un sous-groupe K-parahorique minimal) de ${}_zG$;*
(c) *pour tout cocycle $z \in \dot z$, il existe $h \in H$ tel que hPh^{-1} soit un sous-groupe K-parahorique (resp. un sous-groupe K-parahorique minimal) de ${}_zG$.*

Les équivalences (a) $\Leftrightarrow$ (b) sont une reformulation du lemme 3.7. Que (b) entraîne (c) résulte de ce que $\operatorname{int} h$ est un K-isomorphisme de ${}_{z'}G$ sur ${}_zG$ dès que $z'_s = h^{-1}z_s{}^sh$ ($s \in \Gamma$). Inversement, si (c) est satisfaite, on obtient (b) en remplaçant z par le cocycle cohomologue $z'_s = h^{-1}z_s{}^sh$.

3.9. Lemme. *Soit P un sous-groupe K-parahorique de G. La restriction à $H^1(\overline{\mathbf{N}_H(P)})_{an}$ de l'application canonique de $H^1(\overline{\mathbf{N}_H(P)})$ dans $H^1(H)$ est injective.*

Soient $z, z' \in Z^1(\mathbf{N}_H(P))_{an}$ ayant même image dans $H^1(H)$ et soit $h \in H$ tel que $z'_s = h^{-1}z_s{}^sh$ pour $s \in \Gamma$. Comme P est un sous-groupe K-parahorique minimal à la fois de ${}_zG$ et de ${}_{z'}G$ (3.7) et que $\operatorname{int} h$ est un K-isomorphisme de ${}_{z'}G$ sur ${}_zG$, on voit que P et hPh^{-1} sont deux sous-groupes K-parahoriques minimaux de ${}_zG$. Mais on sait que deux tels sous-groupes sont conjugués par un élément de ${}_zG'(K)$ (1.7). Par suite, il existe $g \in G^{00} \cap {}_zG(K) \subset H$ tel que $hPh^{-1} = gPg^{-1}$. On a alors $g^{-1}h \in \operatorname{Norm}_H(P) = \mathbf{N}_H(P)(\widetilde{\mathcal{O}})$ et, pout tout $s \in \Gamma$, $g = z_s{}^sgz_s^{-1}$, d'où $z_s = g^{-1}hz'_s{}^s(h^{-1}g)$. Le lemme en résulte.

3.10. Soit $z \in Z^1(H)$. On peut appliquer les résultats précédents au groupe ${}_zG$: on obtient des objets que l'on distinguera par un indice z à gauche. Par exemple, si Q est un sous-groupe K-parahorique de ${}_zG$, le $\mathcal{O}$-schéma ${}_z\mathbf{N}_H(Q)$ est celui pour lequel ${}_z\mathbf{N}_H(Q)(\tilde{\mathcal{O}}) = \operatorname{Norm}_H Q$, l'opération de $\tilde\Gamma$ étant induite par celle sur ${}_zG$. Les notations telles que ${}_zH, H^1({}_z\mathbf{N}_H(Q))_{an}$ etc. s'expliquent d'elles-mêmes.

Proposition. *L'application composée de l'injection canonique de $H^1(\overline{{}_z\mathbf{N}_H(Q)})_{an}$ dans $H^1({}_zH)$ suivie de la translation τ_z de $H^1({}_zH)$ dans $H^1(H)$ est une bijection, dite canonique, de $H^1(\overline{{}_z\mathbf{N}_H(Q)})_{an}$ sur l'ensemble des classes de cohomologie des cocycles $a \in Z^1(H)$ tels que les sous-groupes K-parahoriques minimaux de ${}_aG$ soient conjugués de Q par des éléments de H.*

Lorsque $z = 1$, ce n'est qu'une reformulation des deux lemmes précédents. Le cas général s'en déduit aussitôt par translation par z.

3.11. Soit Θ l'ensemble des classes de conjugaison θ par H de sous-groupes parahoriques de G possédant la propriété suivante : il existe $z \in Z^1(H)$ tel que ${}_zG$ possède un sous-groupe K-parahorique Q appartenant à θ. *Une telle classe est invariante par* $\tilde\Gamma$: on a ${}^sQ = z_s^{-1}Qz_s$ pour $s \in \tilde\Gamma$. Choisissons alors pour tout $\theta \in \Theta$ un cocycle $z(\theta) \in Z^1(H)$ et un sous-groupe K-parahorique $Q(\theta)$ de ${}_{z(\theta)}G$ tels que $Q(\theta) \in \theta$. La prop. 3.10 décrit l'ensemble des cocycles

$a \in Z^1(H)$ tels que les sous-groupes K-parahoriques *minimaux* de ${}_aG$ appartiennent à θ. D'où immédiatement :

3.12. Théorème. *L'application dans $H^1(H)$ de la somme (ensembliste) des $H^1({}_{z(\theta)}\overline{\mathbf{N}_H(Q(\theta))})_{an}$ pour $\theta \in \Theta$, somme des applications canoniques, est une bijection.*

3.13. Remarques.

1) On peut avoir $H^1({}_{z(\theta)}\overline{\mathbf{N}_H(Q(\theta))})_{an} = \emptyset$ (cf. 4.7).

2) On peut remplacer $Q(\theta)$ par n'importe quel élément Q de θ : si $Q = hQ(\theta)h^{-1}$ (avec $h \in H$), il suffit de remplacer z par le cocycle $s \mapsto h^{-1}z_s{}^s h$. En particulier, si θ contient un sous-groupe K-parahorique P de G, on peut prendre $z(\theta) = 1$ et $Q(\theta) = P$. Mais, bien qu'invariante par $\tilde{\Gamma}$, *une classe $\theta \in \Theta$ ne contient pas toujours de sous-groupe K-parahorique de G*. Prenons par exemple pour K' une extension quadratique de K, pour G le groupe adjoint PGU_2 de la forme hermitienne $x^\sigma x + y^\sigma y$ et pour H le groupe $G(\tilde{K})$. On voit aisément que G est résiduellement quasi-déployé, de graphe résiduel de type A_1 (cf. I, p. 29), et que Γ et $\xi(H)$, qui sont tous deux d'ordre 2, opèrent par permutation des deux sommets de Δ. Les sous-groupes parahoriques maximaux de G constituent donc une seule classe θ de H-conjugaison, qui contient deux classes de G^{00}-conjugaison permutées par $\tilde{\Gamma}$; il n'y a donc pas de sous-groupe K-parahorique de G appartenant à θ. Cependant, θ appartient à Θ. En effet, G est une forme intérieure de PGL_2 et il existe $z \in Z^1(G) = Z^1(H)$ tel que ${}_zG$ soit K-isomorphe à PGL_2, donc soit résiduellement déployé et possède un sous-groupe K-parahorique appartenant à θ.

3) *Une classe de H-conjugaison de sous-groupes parahoriques invariante par $\tilde{\Gamma}$ n'appartient pas toujours à Θ*, même si G est connexe et simplement connexe (ce qui entraîne $H = G(\tilde{K})$). Par exemple, soit D un corps gauche de centre K, de degré d, non ramifié (autrement dit, le corps résiduel $\bar{D}$ de D est un corps gauche de centre k, de degré d), et prenons $G = \mathrm{SL}_1(D)$. C'est un groupe connexe et simplement connexe, forme intérieure anisotrope de SL_d. On voit aisément (cf. [10]) que l'unique point x de l'immeuble $\mathcal{I}$ est un point spécial de $\tilde{\mathcal{I}}$ et que la fibre fermée $\overline{\mathbf{P}}_x$ du schéma correspondant est $\mathrm{SL}_1(\bar{D})$. Comme G est une forme intérieure de SL_d, le groupe de Galois $\tilde{\Gamma}$ opère sur le graphe résiduel Δ de G (qui est de type A_{d-1}) par permutations circulaires. Mais il laisse fixe le sommet correspondant à la classe du sous-groupe parahorique maximal P_x ; par suite, $\tilde{\Gamma}$ *opère trivialement sur* Δ.

   Soit θ_0 la classe de conjugaison des sous-groupes d'Iwahori. Elle est évidemment invariante par $\tilde{\Gamma}$. Supposons que θ_0 appartienne à Θ et soit $z \in H^1(G)$ tel que ${}_zG$ possède un K-sous-groupe d'Iwahori, c'est-à-dire soit résiduellement quasi-déployé. Le groupe G est simplement connexe, donc opère trivialement sur Δ et l'action de $\tilde{\Gamma}$ sur le graphe résiduel de ${}_zG$ est triviale puisqu'obtenue à partir de l'action triviale par torsion par un cocycle trivial. Par suite, ${}_zG$ est résiduellement déployé, donc est K-isomorphe à SL_d, et G est obtenu à partir de SL_d par torsion par le cocycle $z^{-1} \in Z^1(\mathrm{SL}_d)$. Mais on sait que $H^1(\mathrm{SL}_d) = \{0\}$ et l'on obtient finalement que G est K-isomorphe à SL_d, ce qui est absurde. Par suite, $\theta_0 \notin \theta$.

3.14. Supposons *G résiduellement déployé*. Soit B un K-sous-groupe d'Iwahori. Toute classe de G^{00}-conjugaison de sous-groupes parahoriques possède un élément contenant B, qui est automatiquement invariant par $\tilde{\Gamma}$. De plus, deux tels sous-groupes parahoriques sont H-conjugués si et seulement si ils sont transformés l'un de l'autre par un élément de $\xi(H)$. D'où :

Corollaire. *Soient $P_0 = B, P_1, \cdots, P_r$ des représentants des orbites de $\xi(H)$ dans l'ensemble des sous-groupes parahoriques contenant B. L'application de la somme des $H^1(\overline{\mathbf{N}_H(P_j)})_{an}$ dans $H^1(H)$ somme des applications canoniques (pour $0 \leqq j \leqq r$) est une bijection.*

3.15. Corollaire. *Supposons G résiduellement quasi-déployé. Soit B un K-sous-groupe d'Iwahori et soient $P_0 = B, \cdots, P_r$ les sous-groupes K-parahoriques de G contenant B. Prenons pour H la composante neutre résiduelle G^{00}, de sorte que $\mathbf{N}_H(P_j) = \mathbf{P}_j$. L'application de la* *somme des* $H^1(\overline{\mathbf{N}_H(P_j)})_{an}$ *dans* $H^1(G^{00})$ *somme des applications canoniques (pour* $0 \leqq j \leqq r$*) est une bijection.*

En effet, toute classe θ de G^{00}-conjugaison de sous-groupes parahoriques contient un élément et un seul contenant B, soit $P(\theta)$, et la classe θ est $\tilde{\Gamma}$-invariante si et seulement si $P(\theta)$ l'est.

3.16. Remarques.

1) Rappelons que si G est connexe et simplement connexe, on a $G^{00} = G(\tilde{K})$: le corollaire précédent donne donc une détermination de $H^1(G)$ lorsque G est connexe, simplement connexe et résiduellement quasi-déployé.
2) On peut dans le cor. 3.15 remplacer l'hypothèse $H = G^{00}$ par l'hypothèse plus faible $H \subset \operatorname{Ker} \xi$: on obtient alors une bijection de la somme des $H^1(\overline{\mathbf{N}_H(P_j)})_{an}$ sur $H^1(H)$.
3) Le corps $\tilde{K}$ est de dimension cohomologique $\leqq 1$ ([16] p. 170). Si G est *connexe*, on a donc $H^1(\mathrm{Gal}(K_s/\tilde{K}), G(K_s)) = \{0\}$; par suite, $H^1(\Gamma_s, G(K_s))$, ensemble de cohomologie galoisienne "total" de G, que l'on a généralement l'habitude de noter $H^1(G)$, s'identifie canoniquement à $H^1(\tilde{\Gamma}, G(\tilde{K}))$, c'est-à-dire, en prenant $K' = \tilde{K}$ dans ce qui précède, à l'ensemble que nous avons noté $H^1(G)$.

4. Corps résiduel de dimension $\leqq$ 1.

Dans ce paragraphe, nous supposons que le corps résiduel k est de dimension cohomologique $\leqq 1$. Rappelons que tout groupe algébrique défini sur k est alors quasi-déployé, c'est-à-dire possède un sous-groupe de Borel défini sur k, et que, plus généralement, on a $H^1(g) = \{0\}$ pour tout groupe algébrique connexe g défini sur k.

4.1. Théorème. *G est résiduellement quasi-déployé sur K.*

Soit F une facette de $\tilde{\mathcal{I}}$ invariante par $\tilde{\Gamma}$. La fibre fermée du $\mathcal{O}$-schéma $\mathbf{P}_F$ possède un sous-groupe de Borel b défini sur k et l'image réciproque de b dans P_F est un sous-groupe d'Iwahori de G invariant par $\tilde{\Gamma}$ (1.7).

4.2. Il existe donc une chambre de $\tilde{A}$ invariante par $\tilde{\mathcal{I}}$ (1.7). On note C une telle chambre et B le sous-groupe d'Iwahori correspondant.

4.3. Corollaire. *Pour que G soit presque anisotrope sur K* (1.7)*, il faut et il suffit que, pour toute composante connexe Δ_0 du graphe résiduel Δ de G, le stabilisateur de Δ_0 dans $\tilde{\Gamma}$ opère transitivement sur Δ_0.*

Dire que G est presque anisotrope sur K veut dire que le tore K-déployé maximal S_{ss} de $\mathscr{D}G^0$ est réduit à l'élément neutre, ou encore que l'appartement A (ou l'immeuble $\mathcal{I}$) est réduit à un point. Pour cela, il faut et il suffit que la seule facette de C invariante par $\tilde{\Gamma}$ soit C elle-même, ou encore que toute partie non vide de Δ stable par $\tilde{\Gamma}$ contienne une composante connexe de Δ. D'où le corollaire.

4.4. Un coup d'oeil sur la liste des graphes résiduels connexes montre que le seul graphe résiduel connexe Δ tel que $\operatorname{Aut}\Delta$ soit transitif sur Δ est celui de type A_n ($n \geqq 1$). Il en résulte aussitôt que, si G est presque anisotrope sur K, *le K-revêtement universel G' de G est $\tilde{K}$-isomorphe à un produit direct de groupes de la forme* $\Pi_{L/\tilde{K}}\mathrm{SL}_n$, obtenus par restriction des scalaires à $\tilde{K}$ à partir d'un groupe SL_n considéré comme groupe algébrique défini sur une extension séparable finie (automatiquement totalement ramifiée) L de $\tilde{K}$.

4.5. Plus précisément, le groupe des automorphismes du graphe résiduel Δ de type A_n est d'ordre 2 pour $n = 1$ et est, pour $n \geqq 2$, le groupe diédral $\mathrm{D}_{2(n+1)}$, produit semi-direct de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ opérant par une symétrie par le sous-groupe distingué cyclique $\operatorname{Int}\Delta = \mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$ opérant par permutations circulaires. On voit alors aisément que les seuls sous-groupes de $\operatorname{Aut}\Delta$ transitifs sur Δ sont $\operatorname{Aut}\Delta$ lui-même, $\operatorname{Int}\Delta$ et, lorsque n est impair $\geqq 3$, le sous-groupe diédral $\mathrm{D}_{(n+1)}$

produit semi-direct de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, opérant par une symétrie sans points fixes, et du sous-groupe d'ordre $(n+1)/2$ de $\operatorname{Int}\Delta$.

Utilisant la classification des groupes semi-simples ([18]), on en déduit que si *G est connexe, simplement connexe, absolument presque simple et K-anisotrope* (on passe ensuite au cas général d'un groupe presque anisotrope par les procédés habituels: restriction des scalaires, produit direct, épimorphisme central), *alors G est K-isomorphe à l'un des groupes suivants :*

1er cas : $\mathrm{SL}_1(D)$, où D est un corps gauche de centre K, de degré $n+1$ ($n \geqq 1, \gamma(\tilde{\Gamma}) = \operatorname{Int}\Delta = \mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$) (cf. 1.5)) ;

2ème cas : $\mathrm{SU}_1(D)$, où D est un corps gauche ayant pour centre une extension quadratique étale L de K, de degré $n+1$, muni d'une involution σ de seconde espèce triviale sur K ($n \geqq 2$ et $\gamma(\tilde{\Gamma}) = \operatorname{Aut}\Delta = \mathrm{D}_{2(n+1)}$);

3ème cas : $\mathrm{SU}_2(D)$ où D est comme dans le 2ème cas, mais de degré $(n+1)/2$, la forme hermitienne étant, après un éventuel "changement de coordonnées" (cf. II 10.1.3), la forme ${}^{\sigma}xx + {}^{\sigma}y\delta y$ sur D^2, où δ est une uniformisante de D (pour n impair $\geqq 3, \gamma(\tilde{\Gamma}) = \mathrm{D}_{(n+1)}$).

4.6. Remarquons que si $\gamma(\tilde{\Gamma})$ est *commutatif* (par exemple si $\tilde{\Gamma}$ l'est), alors seuls peuvent se produire le 1er cas ($G = \mathrm{SL}_1(D)$) et le 3ème cas pour $n = 3$ ($G = \mathrm{SU}_2(D)$, où D est un corps de quaternions sur une extension quadratique étale L de K, muni d'une involution de seconde espèce ; remarquons d'une part que ce cas a été omis par erreur dans [7], d'autre part que le groupe $\mathrm{SU}_1(D)$ correspondant n'apparaît pas dans cette classification car il est isomorphe à un $\mathrm{SL}_1(D')$).

Si $\gamma(\tilde{\Gamma})$ est *cyclique*, par exemple si k est *fini*, ou *quasifini* ([16] p. 198), ou plus généralement si $\tilde{\Gamma}$ est limite projective de groupes cycliques, alors seul le 1er cas peut se produire. On a ainsi généralisé les résultats de M. Kneser sur les groupes anisotropes sur un corps localement compact de caractéristique zéro ([15]).

4.7. Reprenons les notations du paragraphe 2 (en conservant l'hypothèse $\dim k \leqq 1$).

Théorème.
(i) *L'application canonique de $H^1(\overline{\mathbf{N}_H(B)})$ dans $H^1(H)$ est bijective.*
(ii) *Si G est connexe et simplement connexe, on a $H^1(G) = \{0\}$.*

Pour tout $z \in Z^1(H)$, le groupe ${}_zG$ est résiduellement quasi-déployé. Il résulte alors de la prop. 3.10 que $H^1(\overline{\mathbf{N}_H(Q(\theta))})_{an} = \emptyset$ pour tout $\theta \in \Theta$ distinct de la classe θ_0 des sous-groupes d'Iwahori (ceci résulte aussi de ce que tout groupe semi-simple connexe anisotrope défini sur k est réduit à l'élément neutre). D'autre part, on a évidemment $H^1(\overline{\mathbf{N}_H(B)})_{an} = H^1(\overline{\mathbf{N}_H(B)})$ puisque B est résoluble. Cela démontre (i).

Si de plus G est connexe et simplement connexe, alors $\overline{\mathbf{N}(B)} = \overline{\mathbf{B}}$ est connexe et l'on sait que $H^1(g) = \{0\}$ pour tout groupe algébrique g connexe défini sur k, d'où (ii).

Bibliographie

[1] Borel, A. et J. Tits, Groupes réductifs, Publ. Math. I. H.E.S. 27 (1965), 55-150.
[2] Borel, A. et J. Tits, Compléments à l'article "Groupes réductifs", Publ. Math. I. H.E.S. 41 (1972), 253 – 276.
[3] Bourbaki, N., Algèbre, chap. IV à VII, Masson, Paris, 1981.
[4] Bourbaki, N., Groupes et Algèbres de Lie, chap. IV à VI, Hermann, Paris, 1968.
[5] Bruhat, F., Groupes semi-simples sur un corps local, Actes du Congrés international des Mathématiciens (Nice 1970), Gauthier-Villars, Paris, 1971.
[6] Bruhat, F. et J. Tits, Groupes algébriques simples sur un corps local, cohomologie galoisienne, décompositions d'lwasawa et de Cartan, C. R. Acad. Sci. Paris 263 (1966), 867-869.
[7] Bruhat, F. et J. Tits, Groupes algébriques simples sur un corps local, Proc. Conf. on Local Fields (Driebergen 1966), Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1967, 23-36.
[8] Bruhat, F. et J. Tits, Groupes réductifs sur un corps local, I, Données radicielles valuées, Publ. Math. I.H.E.S. 41 (1972), 5-251.
[9] Bruhat, F. et J. Tits, Groupes réductifs sur un corps local, II, Schémas en groupes. Existence d'une donnée radicielle valuée, Publ. Math. I.H.E.S. 60 (1984), 5-184.
[10] Bruhat, F. et J. Tits, Schémas en groupes et immeubles des groupes classiques sur un corps local, Bull. Soc. Math. France 112 (1984), 259-301 et 115 (1987), 141-195,
[11] Chevalley, C., Séminaire sur la classification des groupes de Lie algébriques, Paris, 1958.
[12] Goldman, O. et N. Iwahori, The space of p-adic norms, Acta Math. 109 (1963), 137-177.
[13] Greenberg, M., Schemata over local rings, Ann. of Math. 73 (1961), 624-648, et 78 (1963), 256-266.
[14] Iwahori, N. et H. Matsumoto, On some Bruhat decomposition and the structure of the Hecke ring of p-adic Chevalley groups, Publ. Math. I.H.E.S. 25 (1965), 5-48.
[15] Kneser, M., Galois-Komologie halbeinfacher algebraischer Gruppen über $\boldsymbol{p}$-adischen Körpen, Math. Z. 88 (1965), 40-47 et 89 (1965), 250-272.
[16] Serre, J-P., Corps Locaux, Hermann, Paris, 1962.
[17] Serre, J-P., Cohomologie galoisienne, Lecture Notes in Math., vol. 5, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1964.
[18] Tits, J., Classification of algebraic semisimple groups, Proc. Sympos. Pure Math. 9(1966), 33–62.
[19] Tits, J., Reductive groups over local fields, Proc. Sympos. Pure Math. 33 (1979), 29 – 69.

(Reçu le 27 avril 1987)

F. Bruhat
Université Paris 7
U.E.R. de Mathématiques
75251 Paris Cedex 05
France

J. Tits
Collège de France
11, place Marcelin-Berthelot
75231 Paris Cedex 05
France