RÉPONSE À UNE QUESTION DE DÉCOMPOSITION SUR LES TORES POSÉE PAR COLLIOT-THÉLÈNE ET SANSUC

ANIS ZIDANI

Résumé. L'objectif de cette note est de présenter une stratégie simple pour répondre négativement à une question de décomposition sur les tores posée par Colliot-Thélène et Sansuc dans l'article *Principal Homogeneous Spaces under Flasque Tori : Applications* de 1987. On en déduit alors un tore T sur $\mathbb{Q}$ et un nombre premier p tel que $T(\mathbb{Z}_p)\,T(\mathbb{Q}) \neq T(\mathbb{Q}_p)$, où $T(\mathbb{Z}_p)$ désigne le sous-groupe compact maximal de $T(\mathbb{Q}_p)$.

Mots clés : Tores algébriques, Approximation faible, Morphisme de Kottwitz.

MSC : 11E72, 14G25, 20G30.

Table des matières

Introduction

L'objectif de cette note est de répondre à la question suivante :

Question 1 ([4, Remark 8.3]). *Soit K un corps global, $\widehat{K}$ un complété de K pour une valuation discrète, et $\widehat{R}$ l'anneau de valuation discrète associé. Considérons T, un tore sur K. Désignons par $T(\widehat{R})$, le sous-groupe compact maximal de $T(\widehat{K})$. Est-ce que l'égalité*

$$T(\widehat{R})\,T(K) = T(\widehat{K})$$

est satisfaite ?

2. Contexte. La question 1 apparaît pour la première fois en 1987 dans [4], où Colliot-Thélène et Sansuc la rapportent d'après une suggestion de Bruhat et Tits. Ils y démontrent le cas où T est un K-tore non ramifié en utilisant la théorie des résolutions flasques (cf. [4, Proposition 8.1.(i)]).

Plus tard, en 2007 dans [5], Colliot-Thélène et Suresh ont étudié des variantes du problème : le cas où R est un anneau semi-local (avec donc plusieurs valuations à considérer en même temps), et le cas d'une décomposition « $\mathrm{R}T(\widehat{K})\,T(\widehat{R}) = T(\widehat{K})$ », où $\mathrm{R}T(\widehat{K})$ est le sous-groupe des éléments R-triviaux

Date: 11 juin 2026.

de $T(\widehat{K})$ (cf. [7, 7.1. Définition]). Ils ont réussi à trouver des contre-exemples pour les deux situations. Ils ont également donné une liste de cas où la décomposition « $\mathrm{R}T(\widehat{K})\,T(\widehat{R}) = T(\widehat{K})$ » est valable (cf. [5, Proposition 2.1]). Cependant, même après ces travaux, la question 1 restait ouverte.

Dans cette note, on répond par la négative à la question 1 (cf. les propositions 14 et 16). Plus généralement, on développe une stratégie systématique pour construire des tores ne satisfaisant pas la décomposition demandée. L'ingrédient crucial pour cela est le morphisme de Kottwitz, qui n'avait pas été utilisé jusqu'à présent pour ce type de problème.

3. Le morphisme de Kottwitz. Supposons cette fois que $\widehat{K}$ désigne un corps valué discrètement hensélien de valuation v et dont le corps résiduel est parfait. Le morphisme de Kottwitz peut-être vu comme une généralisation fonctorielle du morphisme de valuation

$$\begin{aligned}\kappa_{\mathbb{G}_m} : \widehat{K}^\times &\longrightarrow \mathbb{Z}\\ k &\longmapsto v(k)\end{aligned}$$

à tout groupe réductif G sur $\widehat{K}$. Il a été défini par Kottwitz dans [11, Section 7].

Par exemple, le morphisme de Kottwitz pour GL_n sur $\widehat{K}$ est :

$$\begin{aligned}\kappa_{\mathrm{GL}_n} : \mathrm{GL}_n(\widehat{K}) &\longrightarrow \mathbb{Z}\\ M &\longmapsto v(\det(M)),\end{aligned}$$

tandis que pour PGL_n sur $\widehat{K}$, on a :

$$\begin{aligned}\kappa_{\mathrm{PGL}_n} : \mathrm{PGL}_n(\widehat{K}) &\longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\\ \overline{M} &\longmapsto v(\det(\overline{M})) \pmod n.\end{aligned}$$

Le morphisme est défini grâce au groupe fondamental algébrique (cf. [10, Definition 11.3.2]), que l'on note $\pi_1(G)$. Il s'agit d'un $\mathrm{Gal}(\widehat{K}^{\mathrm{sep}}/\widehat{K})$-module (où $\widehat{K}^{\mathrm{sep}}$ est la clôture séparable de $\widehat{K}$). Pour un $\widehat{K}$-tore T, on a $\pi_1(T) = T_*$, le module galoisien des cocaractères de T.

Considérons $\widehat{K}^{\mathrm{nr}}$, l'extension maximale non ramifiée de $\widehat{K}$. Notons $\Gamma^{\mathrm{nr}} := \mathrm{Gal}(\widehat{K}^{\mathrm{nr}}/\widehat{K})$ et $I := \mathrm{Gal}(\widehat{K}^{\mathrm{sep}}/\widehat{K}^{\mathrm{nr}})$. Considérons un groupe réductif G sur $\widehat{K}$. Il s'avère que le morphisme de Kottwitz de G sur $\widehat{K}^{\mathrm{nr}}$ est un morphisme de Γ^{nr}-modules : $\kappa_{G_{\widehat{K}^{\mathrm{nr}}}} : G(\widehat{K}^{\mathrm{nr}}) \to \pi_1(G)_I$.

Le morphisme de Kottwitz de G sur $\widehat{K}$ est alors le morphisme $\kappa_G : G(\widehat{K}) \to (\pi_1(G)_I)^{\Gamma^{\mathrm{nr}}}$ obtenu à partir de $\kappa_{G_{\widehat{K}^{\mathrm{nr}}}}$ en prenant les Γ^{nr}-invariants. Il jouit de nombreuses propriétés :

— Il est surjectif lorsque $\widehat{K}$ est un corps local (cf. [10, Corollary 11.7.6]).

— Il est trivial pour tout groupe semi-simple simplement connexe (car est de π_1 trivial).

— Son noyau est $G(\widehat{K})^0$, le sous-groupe ouvert engendré par les sous-groupes parahoriques de G (cf. [10, Proposition 11.5.4]).

— L'image réciproque de la partie de torsion de $(\pi_1(G)_I)^{\Gamma^{\mathrm{nr}}}$ est $G(\widehat{K})^1$, l'intersection des noyaux de $g \mapsto v(\chi(g))$ pour χ parcourant les caractères de G (cf. [10, Lemma 11.5.2]).

Par ailleurs, pour un $\widehat{K}$-tore T, il s'avère que $T(\widehat{K})^0$ est le sous-groupe des points du modèle de Néron connexe de T (cf. [10, Corollary B.8.7]), et $T(\widehat{K})^1$ est le sous-groupe borné maximal de $T(\widehat{K})$.

4. Stratégie et plan de l'article. Notre stratégie pour répondre à la question 1 est en deux étapes. En section 1 on prouve que, pour un groupe réductif G sur $\widehat{K}$ (qui est cette fois un corps local) déployé par une extension dont le sous-groupe d'inertie sauvage est cyclique, l'application $G(\widehat{K})/\overline{G(K)} \to G(\widehat{K})/G(K)\,G(\widehat{K})^0$ est un isomorphisme (cf. la proposition 9). Ceci est prouvé grâce au morphisme de Kottwitz. Ensuite, en section 2 on trouve un tore T sur K vérifiant l'hypothèse précédente (en fait déployée par une extension modérément ramifiée) tel que $T(\widehat{K})^1 = T(\widehat{K})^0$ et $\overline{T(K)} \neq T(\widehat{K})$ (c'est-à-dire que T ne satisfait pas l'approximation faible). L'approximation faible sur les corps de nombres est très bien comprise grâce aux travaux de Sansuc (cf. [13]). Borovoi fournit dans [1] une version incluant les corps de fonctions. On en déduit alors dans les propositions 14 et 16 une réponse négative à la question 1 (et même une réponse négative à une question analogue dans le cas d'un groupe semi-simple). Précisons que cette stratégie fonctionne également pour étudier la variante semi-locale du problème.

En complément, on discute dans les sections 3 et 4 de cet article quelques problèmes supplémentaires autour du morphisme de Kottwitz. D'une part, à la section 3, on donne deux exemples de tores sur $\mathbb{R}(\!(t)\!)$ dont les morphismes de Kottwitz ne sont pas surjectifs. La surjectivité n'est donc réalisée que pour des corps spécifiques. D'autre part, on montre en section 4 que, pour un K-tore T, les groupes $\operatorname{coker}(\kappa_{T_{\widehat{K}}})$, $\operatorname{coker}(T(K) \to ((T_*)_I)^{\Gamma^{\mathrm{nr}}})$ et $T(\widehat{K})/T(K)\,T(\widehat{K})^0$ sont des invariants birationnels stables de T.

Notations

Soit K un corps. Notons :

- — Ω_K l'ensemble des places de K, Σ un ensemble fini de Ω_K et $\overline{\Sigma} := \Omega_K \backslash \Sigma$,
- — K_v le complété de K en une place $v \in \Sigma$ et $K_\Sigma := \prod_{v\in\Sigma} K_v$ (on y inclut K diagonalement),
- — K_v^{nr}, l'extension maximale non ramifiée de K_v et $K_\Sigma^{\mathrm{nr}} := \prod_v K_v^{\mathrm{nr}}$,
- — $\Gamma_v^{\mathrm{nr}} := \mathrm{Gal}(K_v^{\mathrm{nr}}/K_v)$, I_v le sous-groupe d'inertie de K_v, $\Gamma^{\mathrm{nr}} := \prod_v \Gamma_v^{\mathrm{nr}}$ et $I := \prod_v I_v$.

On suppose que, pour tout $v \in \Sigma$, le corps résiduel de K_v est *parfait*. Les notations, propriétés, définitions que l'on introduit dans cette note pour un corps complet se généralisent au cas de K_Σ en raisonnant facteur par facteur. Cela est implicite tout au long du document.

On reprend également les notations $(-)^{\mathrm{sep}}$, $\pi_1(-)$, $(-)_*$, $\kappa_{(-)}$, $(-)^0$ et $(-)^1$ du §3.

Dans les parties 1 et 2, le corps K est supposé être *global*.

1. Quelques lemmes sur le morphisme de Kottwitz

L'objectif de cette partie est d'établir quelques résultats cruciaux pour l'élaboration de notre réponse à la question 1, lesquels font intervenir le morphisme de Kottwitz. On montre en particulier que, sous certaines conditions, le problème se ramène à une question d'approximation faible.

5. Inertie sauvage cyclique. On dit qu'un groupe réductif sur K_Σ est à *inertie sauvage cyclique* si pour tout $v \in \Sigma$, il existe une extension galoisienne déployante de K_v telle que son sous-groupe d'inertie sauvage soit cyclique (c'est en particulier le cas si l'extension est modérément ramifiée). On observe que c'est équivalent à demander que le sous-groupe d'inertie soit un groupe métacyclique (c'est à dire tel que ses sous-groupes de Sylow soient cycliques).

Lemme 6. *Soit T un tore sur K_Σ qui est un facteur direct d'un tore quasi-trivial sur K_Σ^{nr}. Alors $\pi_1(T)_I$ est libre et $T(K_\Sigma)^0 = T(K_\Sigma)^1$.*

Démonstration. La construction du foncteur $\pi_1(-)_I$ se comporte bien avec les produits directs, de sorte que $\pi_1(T)_I$ est un facteur direct du «$\pi_1(-)_I$» d'un tore quasi-trivial, qui est libre. Par conséquent, $\pi_1(T)_I$ est libre. D'après [10, Corollary 11.1.6], on a alors $T(K_\Sigma)^0 = T(K_\Sigma)^1$. □

Lemme 7. *Soit T un K_Σ-tore à inertie sauvage cyclique qui est soit flasque, soit coflasque. Alors T est un facteur direct d'un tore quasi-trivial sur K_Σ^{nr}, le groupe $\pi_1(T)_I$ est libre et $T(K_\Sigma)^0 = T(K_\Sigma)^1$.*

Démonstration. Le théorème d'Endo et Miyata (cf. [4, p. 0.5]) nous montre qu'un tore flasque ou coflasque est un facteur direct d'un tore quasi-trivial lorsque ce tore est déployé par une extension métacyclique. Donc T est un facteur direct d'un tore quasi-trivial sur K_Σ^{nr}. Le reste découle alors du lemme 6. □

Lemme 8. *Soit $1 \to A \to B \to C \to 1$ une suite exacte de K_Σ-groupes réductifs. Supposons que A soit un tore et que le groupe $\pi_1(A)_I$ soit libre. On a alors les suites exactes suivantes :*

$$1 \longrightarrow \pi_1(A)_I \longrightarrow \pi_1(B)_I \longrightarrow \pi_1(C)_I \longrightarrow 1$$

et

$$1 \longrightarrow A(K_\Sigma)^0 \longrightarrow B(K_\Sigma)^0 \longrightarrow C(K_\Sigma)^0 \longrightarrow 1.$$

Démonstration. Rappelons que le foncteur $\pi_1(-)$ est exact (cf. [2, Theorem 3.8]). En prenant les coinvariants par I, on obtient :

$$H_1(I, \pi_1(A)) \longrightarrow \pi_1(A)_I \longrightarrow \pi_1(B)_I \longrightarrow \pi_1(C)_I \longrightarrow 1.$$

Puisque $\pi_1(A)_I$ est libre d'après le lemme 6, l'image de $H_1(I, \pi_1(A))$ (qui est un groupe de torsion) dans $\pi_1(A)_I$ est triviale. D'où la première suite exacte.

Quant à la seconde suite exacte, puisque le corps résiduel est parfait, le théorème de Steinberg (cf. [10, Theorem 2.3.3.(1)]) nous donne $H^1(I, A(K_\Sigma^{\mathrm{sep}})) = 1$. Nous avons alors :

$$1 \longrightarrow A(K_\Sigma^{\mathrm{nr}}) \longrightarrow B(K_\Sigma^{\mathrm{nr}}) \longrightarrow C(K_\Sigma^{\mathrm{nr}}) \longrightarrow H^1(I, A(K_\Sigma^{\mathrm{sep}})) = 1.$$

En combinant les deux suites exactes précédentes grâce au morphisme de Kottwitz, et en utilisant le lemme du Serpent, on obtient :

$$1 \longrightarrow A(K_\Sigma^{\mathrm{nr}})^0 \longrightarrow B(K_\Sigma^{\mathrm{nr}})^0 \longrightarrow C(K_\Sigma^{\mathrm{nr}})^0 \longrightarrow 1.$$

En prenant les invariants par Γ^{nr} et en utilisant le fait que $H^1(\Gamma^{\mathrm{nr}}, A(K_\Sigma^{\mathrm{nr}})^0) = 1$ d'après [10, Lemma 11.7.1], on obtient alors :

$$1 \longrightarrow A(K_\Sigma)^0 \longrightarrow B(K_\Sigma)^0 \longrightarrow C(K_\Sigma)^0 \longrightarrow H^1(\Gamma^{\mathrm{nr}}, A(K_\Sigma^{\mathrm{nr}})^0) = 1.$$

D'où la suite exacte désirée. □

Proposition 9. *Soit G un groupe réductif sur K. Si le groupe G_{K_Σ} est à inertie sauvage cyclique, alors l'application naturelle suivante est un isomorphisme :*

$$G(K_\Sigma)/\overline{G(K)} \xrightarrow{\sim} G(K_\Sigma)/G(K)\, G(K_\Sigma)^0.$$

Démonstration. Comme $G(K_\Sigma)^0$ est un sous-groupe ouvert de $G(K_\Sigma)$, on a l'inclusion $\overline{G(K)} \subset G(K)G(K_\Sigma)^0$. Il suffit alors de prouver que $G(K_\Sigma)^0 \subset \overline{G(K)}$. Remarquons que, puisque le groupe G_{K_Σ} est à inertie sauvage cyclique, on doit avoir une résolution flasque (cf. [3, Proposition-Définition 3.1]) sur K_Σ^{nr} donnée par $1 \to F' \to H' \to G_{K_\Sigma^{\mathrm{nr}}} \to 1$ où F' est également à inertie sauvage cyclique. Par conséquent, il s'agit d'un facteur direct d'un tore quasi-trivial d'après le lemme 7.

Considérons maintenant une résolution flasque de G sur K donnée par $1 \to F \to H \to G \to 1$. Puisque F est unique à un tore quasi-trivial près (cf. [3, Proposition 3.2.(iii)]), la discussion précédente montre que F est en fait un facteur direct d'un tore quasi-trivial sur K_Σ^{nr}. De plus, [1, Proposition 2.6] nous indique que H vérifie l'approximation faible, autrement dit : $\overline{H(K)} = H(K_\Sigma)$. Ceci implique que le sous-groupe $H(K_\Sigma)^0 \subset H(K_\Sigma)$ est envoyé sur $\overline{G(K)}$. Mais le lemme 8 nous indique que $H(K_\Sigma)^0 \to G(K_\Sigma)^0$ est surjectif, de sorte que $G(K_\Sigma)^0 \subset \overline{G(K)}$ comme souhaité. □

Remarque 10. Le résultat n'est plus vrai si le groupe n'est plus à inertie sauvage cyclique. Considérons l'extension $L/K := \mathbb{Q}(\zeta_8)/\mathbb{Q} = \mathbb{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt{2})/\mathbb{Q}$ (où $\zeta_8 = e^{\frac{2i\pi}{8}}$) et considérons le tore normique $T := R^{(1)}_{L/K}(\mathbb{G}_m)$. D'après [15, 11.6. Example 3.2)], $\mathbb{Q}_2(\zeta_8)/\mathbb{Q}_2$ est une extension biquadratique totalement ramifiée telle que $T(\mathbb{Q}_2)/\overline{T(\mathbb{Q})} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \neq 0$. Or, $\mathrm{coker}(T(\mathbb{Q}) \to \mathrm{Im}(\kappa_{T_{\mathbb{Q}_2}})) = 0$ (i.e., $T(\mathbb{Q}_2)/T(\mathbb{Q})\, T(\mathbb{Q}_2)^0 = 0$). En effet, en réadaptant la section 3.1 à notre contexte et en reprenant ses notations, on observe que $N(a(1-\zeta_8)) \in T(\mathbb{Q})$ et $N(b(1-\zeta_8)) \in T(\mathbb{Q})$ s'envoient respectivement sur $\overline{a}$ et $\overline{b}$ par $\kappa_{T_{\mathbb{Q}_2}}$, et engendrent alors $\mathrm{Im}(\kappa_{T_{\mathbb{Q}_2}})$.

2. Approximation faible et création d'exemples

Dans cette partie, on calcule des défauts d'approximation faible. Combinés à la proposition 9, on répond négativement à la question 1 (et à sa variante semi-simple), lorsque K est un corps de nombres (cf. la proposition 14) et lorsque K est un corps de fonctions (cf. la proposition 16).

Lemme 11. *Soit $\mu := R_{K'/K}(\mu_n)/\mu_n$ avec $n \in \mathbb{N}^\times$ tel que $\mathrm{car}(K) \nmid n$. On a :*

$$\mathrm{coker}\left(H^1(K,\mu) \to H^1(K_\Sigma,\mu)\right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{coker}\left(\mathrm{Br}(K'/K)[n] \to \mathrm{Br}(K'_{\Sigma'}/K_\Sigma)[n]\right) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/\frac{\mathrm{pgcd}(d_\Sigma,n)}{\mathrm{pgcd}(d_\Sigma,d_{\overline{\Sigma}},n)}\mathbb{Z},$$

où pour un ensemble de places S de K, on note $d_S := \mathrm{ppcm}_{v\in S}[K'_{v'} : K_v]$, et où pour tout $v \in \Omega_K$, on désigne par v' une place de K' au dessus de v.

Démonstration. Posons $T := R_{K'/K}(\mathbb{G}_m)/\mathbb{G}_m$. Observons que $\mu = \ker(T \xrightarrow{\times n} T)$. En utilisant la suite induite en cohomologie sur K et sur K_Σ, on a le diagramme suivant à lignes exactes :

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & T(K)/nT(K) \arrow[r] \arrow[d] & H^1(K,\mu) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Br}(K'/K)[n] \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\ 1 \arrow[r] & T(K_\Sigma)/nT(K_\Sigma) \arrow[r] & H^1(K_\Sigma,\mu) \arrow[r] & \mathrm{Br}(K'_{\Sigma'}/K_\Sigma)[n] \arrow[r] & 1. \end{tikzcd}$$

Comme T admet par définition une résolution flasque $1 \to \mathbb{G}_m \to R_{K'/K}(\mathbb{G}_m) \to T \to 1$, il est rétracte K-rationnel (cf. [4, Proposition 7.4]). En conséquence, $T(K)$ est dense dans $T(K_\Sigma)$ (cf.[4, Proposition 8.1.(iii)]). Par ailleurs, puisque $\mathrm{car}(K) \nmid n$, la multiplication par n dans T est lisse, de sorte que $nT(K_\Sigma)$ est un ouvert de $T(K_\Sigma)$ (cf. [6, 3.1.2 Lemme]). On a donc $T(K)\cdot nT(K_\Sigma) = T(K_\Sigma)$. Ceci donne que $T(K)/nT(K) \to T(K_\Sigma)/nT(K_\Sigma)$ est surjective.

Le lemme du serpent appliqué au diagramme précédent donne alors l'isomorphisme :

$$\mathrm{coker}\left(H^1(K,\mu) \to H^1(K_\Sigma,\mu)\right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{coker}\left(\mathrm{Br}(K'/K)[n] \to \mathrm{Br}(K'_{\Sigma'}/K_\Sigma)[n]\right).$$

Calculons maintenant le membre de droite. Le théorème de Brauer-Hasse-Noether (cf. [9, Théorème 14.11]) restreint à $\mathrm{Br}(K'/K)[n]$ donne la suite exacte suivante :

$$1 \longrightarrow \mathrm{Br}(K'/K)[n] \longrightarrow \bigoplus_{v\in\Omega_K} \mathrm{Br}(K'\otimes_K K_v/K_v)[n] \xrightarrow{\sum \mathrm{inv}_v} \tfrac{1}{n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}.$$

Considérons les applications partielles $\phi_\Sigma := \sum_{v\in\Sigma}\mathrm{inv}_v$ et $\phi_{\overline{\Sigma}} := \sum_{v\in\overline{\Sigma}}\mathrm{inv}_v$. On a donc $\phi_\Sigma(x) = -\phi_{\overline{\Sigma}}(x) = \phi_{\overline{\Sigma}}(-x)$ pour $x \in \mathrm{Br}(K'/K)[n]$. En fait, $\mathrm{Im}((\phi_\Sigma)_{|\mathrm{Br}(K'/K)[n]}) = \mathrm{Im}(\phi_\Sigma)\cap\mathrm{Im}(\phi_{\overline{\Sigma}})$. Ceci permet d'en déduire finalement la suite exacte suivante :

$$1 \longrightarrow \mathrm{Br}(K'/K)[n] \longrightarrow \mathrm{Br}(K'_{\Sigma'}/K_\Sigma)[n] \xrightarrow{\phi_\Sigma} \mathrm{Im}(\phi_\Sigma)/(\mathrm{Im}(\phi_\Sigma)\cap\mathrm{Im}(\phi_{\overline{\Sigma}})) \longrightarrow 1.$$

Pour terminer, on calcule le cardinal du quotient (qui est cyclique). Prenons v une place de K. Observons que $\mathrm{Br}(K'_{v'}/K_v) = \mathrm{Br}(K'\otimes_K K_v/K_v)$. Aussi, $d_v := [K'_{v'} : K_v] = |\mathrm{Br}(K'_{v'}/K_v)|$ et l'image de $\mathrm{Br}(K'_{v'}/K_v)$ dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est $(\frac{1}{d_v}\mathbb{Z})/\mathbb{Z}$ (cf. [9, Corollaire 8.10]). Donc l'image de $\mathrm{Br}(K'\otimes_K K_v/K_v)[n]$ est $(\frac{1}{\mathrm{pgcd}(d_v,n)}\mathbb{Z})/\mathbb{Z}$. En conséquence, $\mathrm{Im}(\phi_\Sigma) = \frac{1}{\mathrm{pgcd}(d_\Sigma,n)}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ et $\mathrm{Im}(\phi_{\overline{\Sigma}}) = \frac{1}{\mathrm{pgcd}(d_{\overline{\Sigma}},n)}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$. On observe alors que $\mathrm{Im}(\phi_{\overline{\Sigma}})\cap\mathrm{Im}(\phi_\Sigma) = \frac{1}{\mathrm{pgcd}(|\mathrm{Im}(\phi_\Sigma)|,|\mathrm{Im}(\phi_{\overline{\Sigma}})|)}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} = \frac{1}{\mathrm{pgcd}(d_\Sigma,d_{\overline{\Sigma}},n)}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$. On conclut finalement que le conoyau est de cardinal $\frac{\mathrm{pgcd}(d_\Sigma,n)}{\mathrm{pgcd}(d_\sigma,d_{\overline{\Sigma}},n)}$ comme voulu. □

Proposition 12. *Soit K'/K une extension finie galoisienne et un K-groupe fini étale de type multiplicatif μ déployé sur K'. Posons $\Sigma' := \{w \in \Omega_{K'} \mid \exists v \in \Sigma, w \mid v\}$. On a alors $K'_{\Sigma'} = K'\otimes_K K_\Sigma$. Supposons que le sous-groupe d'inertie sauvage de $K'_{\Sigma'}/K_\Sigma$ est cyclique. Alors, il existe un K-groupe semi-simple G et un K-tore T tel que $T(K_\Sigma)^0 = T(K_\Sigma)^1$, tous deux déployés sur K', tels que :*

$$G(K_\Sigma)/G(K)\,G(K_\Sigma)^0 \xleftarrow{\sim} G(K_\Sigma)/\overline{G(K)} \xrightarrow{\sim} \mathrm{coker}\left(H^1(K,\mu) \to H^1(K_\Sigma,\mu)\right) \quad \textit{et}$$

$$T(K_\Sigma)/T(K)\,T(K_\Sigma)^0 \xleftarrow{\sim} T(K_\Sigma)/\overline{T(K)} \xrightarrow{\sim} \mathrm{coker}\left(H^1(K,\mu) \to H^1(K_\Sigma,\mu)\right).$$

Démonstration. Les isomorphismes de gauche sont une conséquence de la proposition 9. En effet, G et T sont à inertie sauvage cyclique puisque déployés sur K', donc sur $K'_{\Sigma'}$.

Il existe une famille finie d'entiers (n_i) telle que $\mu_{K'} \cong \prod \mu_{n_i}$. On plonge alors μ dans le centre de $G' := \mathrm{R}_{K'/K}(\prod \mathrm{SL}_{n_i})$. En posant $G := G'/\mu$, on obtient une isogénie centrale de noyau μ, où G est un groupe semi-simple (ceci était déjà connu de Serre dans [14, p.158]). D'autre part, selon [4, Proposition 1.3], on peut trouver une suite exacte $1 \to \mu \to P \to T \to 1$ tel que P est quasi-trivial et T est coflasque. On peut également observer que, par construction, P et T peuvent être choisis comme étant déployés sur K'. [1, Theorem 2.12] donne alors les isomorphismes de droite.

Enfin, le lemme 7 montre que $T(K_\Sigma)^0 = T(K_\Sigma)^1$. □

2.1. *Exemple dans le cas des corps de nombres*

13. Étude d'un corps de nombres. Posons $K := \mathbb{Q}$, $K' := \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{11})$ et $\Sigma := \{3\}$. On a donc $K_\Sigma = \mathbb{Q}_3$. Pour ce qui est de $K'_{\Sigma'}$, on a :

$$K'_{\Sigma'} := K' \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_3 \cong \mathbb{Q}[X,Y]/(X^2-3, Y^2-11) \otimes_Q \mathbb{Q}_3 \cong \mathbb{Q}_3[X,Y]/(X^2-3, Y^2-11).$$

De plus, X^2-3 est irréductible dans $\mathbb{Q}_3$ puisque 3 est une uniformisante. Par ailleurs, X^2-11 n'a pas de racine dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, et donc pas dans $\mathbb{Z}_3(\sqrt{3})$. Puisque $X^2-11 \in \mathbb{Z}_3(\sqrt{3})[X]$, il n'a pas non plus de racine dans $\mathbb{Q}_3(\sqrt{3})$. Par conséquent, $\mathbb{Q}_3[X,Y]/(X^2-3, Y^2-11) = \mathbb{Q}_3(\sqrt{3}, \sqrt{11})$ est un corps. En conséquence, $\Sigma' = \{\sqrt{3}\}$ et $K'_{\Sigma'} \cong \mathbb{Q}_3(\sqrt{3}, \sqrt{11})$, qui est alors de dimension 4 et, bien sûr, de groupe de Galois $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Donc $K'_{\Sigma'}/K_\Sigma$ est modérément ramifiée.

Cherchons les nombres premiers pour lesquels $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{11})/\mathbb{Q}$ est ramifiée. Bien entendu, tous les groupes de décomposition sont cycliques dans le cas non ramifié. D'après [12, Chapter 2, Exercise 42.(f)], le discriminant de cette extension est $16 \times 3^2 \times 11^2$. Les nombres premiers qui divisent le discriminant, c'est-à-dire les nombres premiers ramifiés, sont alors 2, 3 et 11.

— En $p = 2$, on remarque que $P := X^2 - 33$ admet 1 comme racine modulo 8 (et $P'(1) = 2 \pmod 4$). Cela signifie que $|P(1)|_2 \leq \frac{1}{8} < |P'(1)|_2^2 = \frac{1}{2}^2$. La méthode de Newton nous donne alors une racine dans $\mathbb{Q}_2$. On remarque également que X^2-3 n'a pas de racine dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, donc pas de racine dans $\mathbb{Z}_2$, et par conséquent pas de racine dans $\mathbb{Q}_2$ puisque $X^2-3 \in \mathbb{Z}_2[X]$. Ainsi, X^2-3 est irréductible dans $\mathbb{Q}_2$. On obtient alors :

$$K' \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_2 \cong \mathbb{Q}_2[X,Y]/(X^2-3, Y^2-11) \cong \left(\mathbb{Q}_2[\sqrt{3}]\right)[Y]/(Y^2 - (\frac{\sqrt{33}}{\sqrt{3}})^2) \cong \left(\mathbb{Q}_2(\sqrt{3})\right)^2.$$

Les deux corps locaux de K' au-dessus de 2 sont donc des extensions cycliques de degré 2.

— En $p = 11$, $P := X^2 - 3$ admet 5 comme racine modulo 11 (et $P'(5) \neq 0 \pmod{11}$). D'après le lemme de Hensel, $P := X^2 - 3$ possède une racine dans $\mathbb{Q}_{11}$. De plus, $X^2 - 11$ est irréductible dans $\mathbb{Q}_{11}$ puisque 11 est une uniformisante. On a alors :

$$K' \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_{11} \cong \mathbb{Q}_{11}[X,Y]/(X^2-3, Y^2-11) \cong \left(\mathbb{Q}_{11}(\sqrt{11})\right)[X]/(X^2 - (\sqrt{3})^2) \cong \left(\mathbb{Q}_{11}(\sqrt{11})\right)^2.$$

Ainsi, les deux corps locaux de K' au-dessus de 11 sont des extensions cycliques de degré 2.

Proposition 14. *Il existe un $\mathbb{Q}$-groupe semi-simple G et un $\mathbb{Q}$-tore T tel que $T(\mathbb{Q}_3)^0 = T(\mathbb{Q}_3)^1$, tous deux déployés sur $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{11})$, tels que :*

$$0 \neq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xleftarrow{\sim} G(\mathbb{Q}_3)/\overline{G(\mathbb{Q})} \xrightarrow{\sim} G(\mathbb{Q}_3)/G(\mathbb{Q})\,G(\mathbb{Q}_3)^0 \quad et$$

$$0 \neq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xleftarrow{\sim} T(\mathbb{Q}_3)/\overline{T(\mathbb{Q})} \xrightarrow{\sim} T(\mathbb{Q}_3)/T(\mathbb{Q})\,T(\mathbb{Q}_3)^0.$$

Démonstration. Reprenons le contexte de §13. Sous les notations du lemme 11, on a $d_\Sigma = 4$ et $d_{\overline{\Sigma}} = 2$. Posons $\mu := R_{K'/K}(\mu_4)/\mu_4$. Ce même lemme donne alors

$$\operatorname{coker}\left(H^1(K,\mu) \to H^1(K_\Sigma,\mu)\right) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/\frac{\operatorname{pgcd}(d_\Sigma,4)}{\operatorname{pgcd}(d_\Sigma,d_{\overline{\Sigma}},4)}\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

On a donc le résultat en utilisant la proposition 12. □

2.2. *Exemple dans le cas des corps de fonctions*

15. Étude d'un corps de fonctions. Soit p un premier tel que $p \equiv 3 \pmod 4$. Posons $K := \mathbb{F}_p(t)$, $K' := \mathbb{F}_p(\sqrt{t}, \sqrt{1-t})$ et $\Sigma := \{t^{-1}\}$. On a donc $K_\Sigma = \mathbb{F}_p(\!(t^{-1})\!)$. Pour ce qui est de $K'_{\Sigma'}$, on a :

$$K'_{\Sigma'} := K' \otimes_{\mathbb{F}_p(t)} \mathbb{F}_p(\!(t^{-1})\!) \cong \mathbb{F}_p(\!(t^{-1})\!)[X,Y]/\left(X^2 - t, Y^2 - (1-t)\right).$$

Notons que $X^2 - t$ est irréductible dans $\mathbb{F}_p(\!(t^{-1})\!)$ car, dans le cas contraire, cela donnerait l'existence d'un élément de valuation $-\frac{1}{2}$, ce qui est absurde. Observons ensuite que $1 - t = (-1)\,t\,(1-t^{-1})$. On sait que t est un carré dans $\mathbb{F}_p(\!(t^{-\frac{1}{2}})\!)$. Aussi, $1 - t^{-1}$ est également un carré dans $\mathbb{F}_p(\!(t^{-\frac{1}{2}})\!)$ grâce au lemme de Hensel, puisque l'est sur $\mathbb{F}_p$ en réduisant modulo $t^{-\frac{1}{2}}$. En conséquence, $X^2 - (1-t)$ est irréductible dans $\mathbb{F}_p(\!(t^{-\frac{1}{2}})\!)$ si et seulement si -1 n'est pas un carré. C'est bien le cas puisque la condition $p \equiv 3 \pmod 4$ implique que -1 n'est pas un carré dans $\mathbb{F}_p$. On en déduit donc que $\Sigma' = \{t^{-\frac{1}{2}}\}$, et que $K'_{\Sigma'}$ est un corps isomorphe à $\mathbb{F}_{p^2}(\!(t^{-\frac{1}{2}})\!)$. C'est une extension modérée de $\mathbb{F}_p(\!(t^{-1})\!)$ de groupe de Galois $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Notons que K ne se ramifie potentiellement que en t, $1-t$ et t^{-1}. Les autres places sont alors non ramifiées, donc de groupe de Galois local cyclique, et donc de degré au plus 2. En effet, en une autre place, t et $1-t$ sont des unités, de sorte que leur réduction dans $\mathbb{F}_p$ soit non triviale. En conséquence, les réductions dans $\mathbb{F}_p[X]$ des polynômes $X^2 - t$ et $X^2 - (1-t)$ sont séparables ($p \neq 2$). Ils admettent donc chacun une racine dans $\mathbb{F}_p^{\text{sep}}$ et donc sur l'extension maximale non ramifiée d'après Hensel. D'où la non-ramification des extensions locales.

— En t, on a bien sûr $X^2 - t$ qui est irréductible puisque t est une uniformisante. D'autre part, $X^2 - (1-t)$ admet une racine dans $\mathbb{F}_p$, en réduisant modulo t. Le lemme de Hensel affirme alors qu'il y en a une dans $\mathbb{F}_p(\!(t)\!)$. On obtient alors :

$$K' \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F}_p(\!(t)\!) \cong \mathbb{F}_p(\!(t)\!)[X,Y]/\left(X^2 - t, Y^2 - (1-t)\right) \cong \mathbb{F}_p(\!(t^{\frac{1}{2}})\!)[X]/\left(X^2 - (\sqrt{1-t})^2\right) \cong \left(\mathbb{F}_p(\!(t^{\frac{1}{2}})\!)\right)^2.$$

Les deux corps locaux de K' au-dessus de t sont donc des extensions cycliques de degré 2.

— En $1-t$, le polynôme $X^2 - (1-t)$ est irréductible puisque $1-t$ est une uniformisante. Aussi, puisque $t = 1 - (1-t)$, le polynôme $X^2 - t$ admet une racine dans $\mathbb{F}_p$, en réduisant modulo $1-t$. Le lemme de Hensel en donne donc une dans $\mathbb{F}_p(\!(1-t)\!)$. On a alors :

$$K' \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F}_p(\!(1-t)\!) \cong \mathbb{F}_p(\!(1-t)\!)[X,Y]/\left(X^2 - t, Y^2 - (1-t)\right) \cong \mathbb{F}_p\left(\!\left((1-t)^{\frac{1}{2}}\right)\!\right)[X]/\left(X^2 - (\sqrt{t})^2\right) \cong \mathbb{F}_p\left(\!\left((1-t)^{\frac{1}{2}}\right)\!\right)^2.$$

Ainsi, les deux corps locaux de K' au-dessus de $1-t$ sont des extensions cycliques de degré 2.

Proposition 16. *Soit p un premier tel que $p \equiv 3 \pmod 4$. Il existe un $\mathbb{F}_p(t)$-groupe semi-simple G et un $\mathbb{F}_p(t)$-tore T tel que $T\left(\mathbb{F}_p(\!(t^{-1})\!)\right)^0 = T\left(\mathbb{F}_p(\!(t^{-1})\!)\right)^1$, tous deux déployés sur $\mathbb{F}_p(\sqrt{t}, \sqrt{1-t})$, tels que :*

$$0 \neq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xleftarrow{\sim} G\left(\mathbb{F}_p(\!(t^{-1})\!)\right)/\overline{G(\mathbb{F}_p(t))} \xrightarrow{\sim} G\left(\mathbb{F}_p(\!(t^{-1})\!)\right)/G(\mathbb{F}_p(t))\,G\left(\mathbb{F}_p(\!(t^{-1})\!)\right)^0 \quad et$$

$$0 \neq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xleftarrow{\sim} T\left(\mathbb{F}_p(\!(t^{-1})\!)\right)/\overline{T(\mathbb{F}_p(t))} \xrightarrow{\sim} T\left(\mathbb{F}_p(\!(t^{-1})\!)\right)/T(\mathbb{F}_p(t))\,T\left(\mathbb{F}_p(\!(t^{-1})\!)\right)^0.$$

Démonstration. La démonstration est identique à celle de la proposition 14. □

3. Contre-exemples à la surjectivité du morphisme de Kottwitz

On considère ici $K = \mathbb{R}(t)$ et $\Sigma = \{t\}$, de sorte que $K_\Sigma = \mathbb{R}((t))$, que l'on note désormais $\widehat{K}$. On construit dans cette partie deux exemples de tores T sur K qui vérifient tous deux l'égalité $T(\widehat{K}) = T(K)\,T(\widehat{K})^0$, mais pour lesquels le morphisme de Kottwitz $\kappa_{T_{\widehat{K}}}$ n'est pas surjectif (cf. les propositions 19 et 21).

17. Contexte des contre-exemples. Posons $L := \mathbb{C}(u)$, $\widehat{L} := \mathbb{C}((u))$, $\mathcal{O}_{\widehat{L}} := \mathbb{C}[[u]]$, et $\mathcal{O}_{\widehat{K}} := \mathbb{R}[[t]]$, où u est tel que $u^2 = t$. Dénotons par $v_{\widehat{L}}$, la valuation de $\widehat{L}$. Considérons $\Gamma := \mathrm{Gal}(L/K) \cong \mathrm{Gal}(\widehat{L}/\widehat{K}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ engendré par $\sigma : i \mapsto -i$ et $\tau : u \mapsto -u$. Notons que $\widehat{K}^{\mathrm{nr}} = \mathbb{C}((t))$. Dans la suite, il est inoffensif de considérer que I désigne $\mathrm{Gal}(\widehat{L}/\widehat{K}^{\mathrm{nr}})$.

Soit T un $\widehat{K}$-tore déployé sur $\widehat{L}$. Rappelons que l'on a une identification de Γ-modules $X \otimes L^\times \xrightarrow{\sim} T(\widehat{L})$ donnée par $\chi \otimes l \mapsto \chi(l)$. De même, $X \otimes \mathcal{O}_{\widehat{L}}^\times \xrightarrow{\sim} T(\widehat{L})^1$. Notons d'ailleurs que la décomposition $\mathcal{O}_{\widehat{L}}^\times \cong \mathbb{C}^\times \times U^1$ (où U^1 est le sous-groupe de $\mathcal{O}_{\widehat{L}}^\times$ dont le terme constant est 1) est Γ-invariante et induit alors la décomposition Γ-invariante $X \otimes \mathcal{O}_{\widehat{L}}^\times \xrightarrow{\sim} (X \otimes \mathbb{C}^\times) \oplus (X \otimes U^1)$.

Rappelons d'après [10, Proposition 11.1.1] que l'on a le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} T(\widehat{L}) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes v_{\widehat{L}}"] \arrow[d, two heads, "N_{\widehat{L}/\widehat{K}^{\mathrm{nr}}}"'] & X \arrow[d, two heads, "\bar{\cdot}"] \\ T(\widehat{K}^{\mathrm{nr}}) \arrow[r, two heads, "\kappa_{T_{\widehat{K}^{\mathrm{nr}}}}"'] & X_I \end{tikzcd} \tag{1}$$

où N est la norme et $\bar{\cdot} := X \to X_I$ la projection canonique. En conséquence, $N(T(\widehat{L})^1) = T(\widehat{K}^{\mathrm{nr}})^0$. Ceci donne alors la décomposition $T(\widehat{K}^{\mathrm{nr}})^0 = N(X \otimes \mathbb{C}^\times) \oplus N(X \otimes U^1)$. Aussi, puisque $\mathbb{C}^\times$ est un groupe divisible τ-invariant, on a $N(X \otimes \mathbb{C}^\times) = N(X) \otimes \mathbb{C}^\times = X^I \otimes \mathbb{C}^\times$. Et enfin, puisque U^1 a une structure de $\mathbb{Q}$-espace vectoriel, $\widehat{H}^0(I, X \otimes U^1) = 0$ et donc $N(X \otimes U^1) = (X \otimes U^1)^I$. D'où finalement :

$$T(\widehat{K}^{\mathrm{nr}})^0 \cong (X^I \otimes \mathbb{C}^\times) \oplus (X \otimes U^1)^I \tag{2}$$

Notons d'ailleurs que cette décomposition est Γ^{nr}-invariante.

3.1. *Premier contre-exemple*

18. Le module galoisien du tore normique. Considérons le tore normique $T := R^{(1)}_{L/K}(\mathbb{G}_m)$. Son module des cocaractères X est le sous-réseau de $\mathbb{Z}[\Gamma]$ de trace nulle. Autrement dit, si l'on note $(e_1, e_\tau, e_\sigma, e_{\sigma\tau})$ la base naturelle de $\mathbb{Z}[\Gamma]$, on a :

$$X := \{\sum_{\alpha\in\Gamma} a_\alpha e_\alpha \in \mathbb{Z}[\Gamma] \mid \sum_{\alpha\in\Gamma} a_\alpha = 0\}.$$

On vérifie qu'une base de X est donnée par $(a, b, c) := (e_1 - e_\tau, e_\tau - e_\sigma, e_\sigma - e_{\sigma\tau})$. Les actions de σ et τ sur la base sont alors données par les matrices suivantes :

$$\text{pour } \sigma : \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et pour } \tau : \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calculons alors X_I. On a par définition :

$$\begin{aligned} \overline{a} &= \tau(\overline{a}) = \overline{\tau(a)} = -\overline{a} \\ \overline{b} &= \tau(\overline{b}) = \overline{\tau(b)} = \overline{a+b+c} \\ \overline{c} &= \tau(\overline{c}) = \overline{\tau(c)} = -\overline{c}. \end{aligned}$$

D'où les relations $2\overline{a} = 0$ et $\overline{a} = \overline{c}$. Par conséquent, $X_I \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ avec comme base $(\overline{a}, \overline{b})$. Par ailleurs, l'action de σ sur X_I est alors donnée par les relations :

$$\sigma(\overline{a}) = \overline{\sigma(a)} = \overline{c} = \overline{a}$$
$$\sigma(\overline{b}) = \overline{\sigma(b)} = \overline{-(a+b+c)} = -\overline{b}.$$

On en déduit alors que $(X_I)^{\Gamma^{\mathrm{nr}}} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ avec comme générateur $\overline{a}$.

Calculons cette fois X^I. Prenons $n_1 a + n_2 b + n_3 c \in X^I$. On a :

$$n_1 a + n_2 b + n_3 c = \tau(n_1 a + n_2 b + n_3 c) = -n_1 a + n_2(a+b+c) - n_3 c = (n_2 - n_1)a + n_2 b + (n_2 - n_3)c.$$

On en déduit $2n_1 = 2n_3 = n_2$. Donc $X^I \cong \mathbb{Z}$ et un générateur est donné par $E := a + 2b + c$. Par ailleurs, $\sigma(E) = \sigma(a) + 2\sigma(b) + \sigma(c) = c - 2(a+b+c) + a = -E$. D'où l'action de σ sur X^I.

Proposition 19. *Le K-tore normique $T := R^{(1)}_{L/K}(\mathbb{G}_m)$ est tel que*

$$0 \cong \mathrm{Im}(\kappa_{T_{\widehat{K}}}) \subsetneq ((T_*)_I)^{\Gamma^{\mathrm{nr}}} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

En particulier, $T(\widehat{K}) = T(\widehat{K})^0 = T(K)\,T(\widehat{K})^0$.

Démonstration. Reprenons le contexte du §18. Posons $l = a(u)$ et calculons $N(l)$. On trouve :

$$N(l) = l\tau(l) = a(u)\,(\tau(a)(\tau(u))) = a(u)a^{-1}(-u) = a(u)a((-u)^{-1}) = a(-1).$$

Par ailleurs, la commutativité du diagramme (1) montre que $\kappa_{T_{\widehat{K}^{\mathrm{nr}}}}(a(-1)) = \overline{a} \in (X_I)^{\Gamma^{\mathrm{nr}}}$, puisque $v_{\widehat{L}}(u) = 1$. Toutefois, $\sigma(a(-1)) = \sigma(a)(\sigma(-1)) = c(-1)$. En conséquence, $a(-1) \notin T(\widehat{K})$. Montrons que $\overline{a}$ n'est pas dans l'image de $\kappa_{T_{\widehat{K}}}$.

Considérons le cocycle $z : \alpha \mapsto a(-1)\alpha(a(-1))^{-1}$ à valeurs dans $T(\widehat{K}^{\mathrm{nr}})^0$ (puisque $\sigma(\overline{a}) = \overline{a}$). Ce cocycle est un cobord si et seulement si $\overline{a} \in \mathrm{Im}(\kappa_{T_{\widehat{K}}})$. Notons d'ailleurs que :

$$a(-1)\sigma(a(-1))^{-1} = a(-1)c(-1)^{-1} = a(-1)c(-1) = a(-1)b(-1)^2c(-1) = E(-1) \in X^I \otimes \mathbb{C}^\times.$$

Par l'absurde, supposons que z soit un cobord. Il s'écrit donc $\alpha \mapsto y\alpha(y)^{-1}$ avec $y \in T(\widehat{K}^{\mathrm{nr}})^0$. Utilisons la décomposition (2) pour écrire $y = y_0 u$. On a alors $y\sigma(y)^{-1} = (y_0\sigma(y_0)^{-1})(u\sigma(u)^{-1})$.

En identifiant les décompositions, on a $E(-1) = y_0\sigma(y_0)^{-1}$. Par ailleurs, puisque $X^I = \langle E \rangle$, on peut écrire $y_0 = E(x)$ avec $x \in \mathbb{C}^\times$. D'où finalement :

$$E(-1) = y_0\sigma(y_0)^{-1} = E(x)\sigma(E)(\sigma(x)^{-1}) = E(x)E(\sigma(x)) = E(|x|^2).$$

On en déduit alors $|x|^2 = -1$. C'est absurde ! Donc z n'est pas un cobord et $\overline{a} \notin \mathrm{Im}(\kappa_{T_{\widehat{K}}})$.

Puisque $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong (X_I)^{\Gamma^{\mathrm{nr}}} = \langle \overline{a} \rangle$, on en déduit que $\mathrm{Im}(\kappa_{T_{\widehat{K}}}) = 0$, et donc que $T(\widehat{K}) = T(\widehat{K})^0$. Il en découle alors trivialement la décomposition $T(\widehat{K}) = T(K)\,T(\widehat{K})^0$. □

3.2. *Second contre-exemple*

20. Le module galoisien d'un tore induit sur $\mathbb{C}(t)$. Considérons cette fois le réseau $X = \mathbb{Z}^4$ dont la base canonique est notée (e, e', f, f'). On associe à σ et τ les matrices suivantes :

$$\text{pour } \sigma : \begin{pmatrix} A & 0 \\ I_2 - A & -A \end{pmatrix} \text{ et pour } \tau : \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}, \text{ où } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Un calcul par blocs immédiat montre que cela définit une structure de Γ-module sur X. On en déduit alors un unique K-tore T tel que $T_* = X$. Par construction, $T_{\mathbb{C}(t)}$ est induit.

Calculons X_I. Puisque $\tau(e) = e'$ et $\tau(f) = f'$, on trouve que X_I est défini par les relations $\overline{e} = \overline{e'}$ et $\overline{f} = \overline{f'}$, de sorte que $X_I \cong \mathbb{Z}^2$ avec comme base $(\overline{e}, \overline{f})$. Sa Γ^{nr}-action est donnée par :

$$\sigma(\overline{e}) = \overline{\sigma(e)} = \overline{e' + f - f'} = \overline{e}$$
$$\sigma(\overline{f}) = \overline{\sigma(f)} = \overline{-f'} = -\overline{f}.$$

On en déduit alors que $(X_I)^{\Gamma^{\mathrm{nr}}} \cong \mathbb{Z}$ avec comme générateur $\overline{e}$.

Calculons maintenant X^I. Prenons $ne+n'e'+mf+m'f' \in X^I$. On a :

$$ne+n'e'+mf+m'f' = \tau(ne+n'e'+mf+m'f') = n'e+ne'+m'f+mf'.$$

D'où $n=n'$ et $m=m'$. Donc $ne+n'e'+mf+m'f' = n(e+e')+m(f+f')$. On en déduit alors que $X^I \cong \mathbb{Z}^2$ et admet une base donnée par $(e+e', f+f')$. L'action de Γ^{nr} sur X^I est donnée par :

$$\sigma(e+e') = \sigma(e)+\sigma(e') = (e'+f-f')+(e-f+f') = e+e'$$
$$\sigma(f+f') = \sigma(f)+\sigma(f') = -f'-f = -(f+f').$$

Proposition 21. *Le K-tore T induit sur $\mathbb{C}(t)$ introduit en §20 est tel que*

$$2\mathbb{Z} \cong \mathrm{Im}(\kappa_{T_{\widehat{K}}}) \subsetneq ((T_*)_I)^{\Gamma^{\mathrm{nr}}} \cong \mathbb{Z}.$$

Par ailleurs, $T(\widehat{K}) = T(K)\,T(\widehat{K})^0$ et $T(\widehat{K}^{\mathrm{nr}})^0 = T(\widehat{K}^{\mathrm{nr}})^1$ (i.e., $(T_*)_I$ est libre).

Démonstration. Posons $l = e(iu)$ et calculons $N(l)$. On trouve :

$$N(l) = l\tau(l) = e(iu)\,(\tau(e)(\tau(iu))) = e(iu)e'(-iu) = (e+e')(iu)e'(-1).$$

Par ailleurs, la commutativité du diagramme (1) montre que $\kappa_{T_{\widehat{K}^{\mathrm{nr}}}}(N(l)) = \overline{e} \in (X_I)^{\Gamma^{\mathrm{nr}}}$, puisque $v_{\widehat{L}}(iu) = 1$. Montrons que $\overline{e}$ n'est pas dans l'image de $\kappa_{T_{\widehat{K}}}$.

Considérons le cocycle $z : \alpha \mapsto N(l)\alpha(N(l))^{-1}$ à valeurs dans $T(\widehat{K}^{\mathrm{nr}})^0$ (puisque $\sigma(\overline{e}) = \overline{e}$). Ce cocycle est un cobord si et seulement si $\overline{e} \in \mathrm{Im}(\kappa_{T_{\widehat{K}}})$. Notons d'ailleurs que :

$$\sigma(N(l)) = \sigma((e+e')(iu)e'(-1)) = \sigma(e+e')(-iu)\sigma(e')(-1) = (e+e')(-iu)(e-f+f')(-1).$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} N(l)\sigma(N(l))^{-1} &= (e+e')(iu)e'(-1)\left((e+e')(-iu)(e-f+f')(-1)\right)^{-1} \\ &= e'(-1)(e+e')(-1)(e-f+f')(-1) = (2e+2e'-f+f')(-1) = (f+f')(-1) \in X^I \otimes \mathbb{C}^\times. \end{aligned}$$

Par l'absurde, supposons que z soit un cobord. Il s'écrit donc $\alpha \mapsto y\alpha(y)^{-1}$ avec $y \in T(\widehat{K}^{\mathrm{nr}})^0$. Utilisons la décomposition (2) pour écrire $y = y_0 u$. On a alors $y\sigma(y)^{-1} = (y_0\sigma(y_0)^{-1})(u\sigma(u)^{-1})$.

En identifiant les décompositions, on a $(f+f')(-1) = y_0\sigma(y_0)^{-1}$. Par ailleurs, comme $\mathbb{Z}(e+e')$ et $\mathbb{Z}(f+f')$ sont stables par σ, et que $(e+e', f+f')$ est une base de X^I, on a $y_0 \in \mathbb{Z}(f+f') \otimes \mathbb{C}^\times$. On l'écrit alors $y_0 = (f+f')(x)$ pour $x \in \mathbb{C}^\times$. D'où finalement :

$$(f+f')(-1) = y_0\sigma(y_0)^{-1} = (f+f')(x)\sigma(f+f')(\sigma(x)^{-1}) = (f+f')(x)(f+f')(\sigma(x)) = (f+f')(|x|^2).$$

On en déduit alors $|x|^2 = -1$. C'est absurde ! Donc z n'est pas un cobord et $\overline{e} \notin \mathrm{Im}(\kappa_{T_{\widehat{K}}})$.

Toutefois $2\overline{e} \in \mathrm{Im}(T(K) \to (X_I)^{\Gamma^{\mathrm{nr}}})$. En effet $N(e(t)) = (e+e')(t) \in T(K)$ et $v_{\widehat{L}}(t) = 2$. Il en découle que $\mathrm{Im}(T(K) \to (X_I)^{\Gamma^{\mathrm{nr}}}) = \mathrm{Im}(\kappa_{T_{\widehat{K}}})$, c'est à dire $T(\widehat{K}) = T(K)\,T(\widehat{K})^0$. □

Remarque 22. Soit T un $\widehat{K}$-tore et $\mathcal{T}$ son modèle de Néron. On a :

$$\begin{aligned} \mathrm{coker}(\kappa_T) &\xrightarrow{\sim} \ker\left(H^1(\Gamma^{\mathrm{nr}}, T(\widehat{K}^{\mathrm{nr}})^0) \to H^1(\Gamma^{\mathrm{nr}}, T(\widehat{K}^{\mathrm{nr}}))\right) \\ &\xrightarrow{\sim} \ker\left(H^1(\Gamma^{\mathrm{nr}}, T(\widehat{K}^{\mathrm{nr}})^0) \to H^1(\mathrm{Gal}(\widehat{K}^{\mathrm{sep}}/\widehat{K}), T(\widehat{K}^{\mathrm{sep}})\right) \xrightarrow{\sim} \ker\left(H^1(\mathcal{O}_{\widehat{K}}, \mathcal{T}^0) \to H^1(\widehat{K}, T)\right). \end{aligned}$$

Le premier isomorphisme provient de la suite exacte en cohomologie induite par $\kappa_{T_{\widehat{K}^{\mathrm{nr}}}}$, le second provient de la suite exacte inflation-restriction [14, I.§5.8.a)], et le dernier s'obtient grâce à [8, 2.9.2.(2)] et [SGA3, XXIV, Proposition 8.1.(i)].

En conséquence, nos deux contre-exemples précédents induisent également un contre-exemple à un problème de type Grothendieck-Serre pour les modèles de Néron de tores.

4. Propriétés birationnelles

Dans cette partie, K n'est plus nécessairement un corps global. On prouve le théorème suivant :

Théorème 23. *Soit T un K-tore, et $1 \to S \to P \to T \to 1$, une résolution flasque de T. Notons $(S_*)_{I,\mathrm{free}}$, le quotient de $(S_*)_I$ par sa partie de torsion. On a les isomorphismes naturels suivants :*

$$\mathrm{coker}(\kappa_{T_{K_\Sigma}}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{coker}\left(H^1(K_\Sigma, S) \to H^1(\Gamma^{\mathrm{nr}}, (S_*)_{I,\mathrm{free}})\right),$$
$$\mathrm{coker}(T(K) \to ((T_*)_I)^{\Gamma^{\mathrm{nr}}}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{coker}\left(H^1(K, S) \to H^1(\Gamma^{\mathrm{nr}}, (S_*)_{I,\mathrm{free}})\right), \quad et$$
$$T(K_\Sigma)/T(K)\,T(K_\Sigma)^0 \xrightarrow{\sim} \mathrm{coker}\left(H^1(K, S) \to \mathrm{Im}(H^1(K_\Sigma, S) \to H^1(\Gamma^{\mathrm{nr}}, (S_*)_{I,\mathrm{free}})\right).$$

En particulier, ces trois quantités sont des invariants birationnels stables de T.

Démonstration. Observons que l'on a la suite exacte :

$$H_1(I, T_*) \longrightarrow (S_*)_I \longrightarrow (P_*)_I \longrightarrow (T_*)_I \longrightarrow 1.$$

Comme $(P_*)_I$ est libre et $H_1(I, T_*)$ est de torsion, il vient immédiatement :

$$1 \longrightarrow (S_*)_{I,\mathrm{free}} \longrightarrow (P_*)_I \longrightarrow (T_*)_I \longrightarrow 1.$$

Notons que $(P_*)_I$ est un module de permutation puisque P_* l'est. Par ailleurs, $\kappa_{P_{K_\Sigma}}$ est surjectif, car cela est vrai pour $\mathbb{G}_m$. On obtient alors le diagramme suivant à lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
\ldots & \longrightarrow & P(K_\Sigma) & \longrightarrow & T(K_\Sigma) & \longrightarrow & H^1(K_\Sigma, S) & \longrightarrow & H^1(K_\Sigma, P) = 1 \\
 & & \big\downarrow{\scriptstyle \kappa_{P_{K_\Sigma}}} & & \big\downarrow{\scriptstyle \kappa_{T_{K_\Sigma}}} & & \big\downarrow & & \\
\ldots & \longrightarrow & ((P_*)_I)^{\Gamma^{\mathrm{nr}}} & \longrightarrow & ((T_*)_I)^{\Gamma^{\mathrm{nr}}} & \longrightarrow & H^1(\Gamma^{\mathrm{nr}}, (S_*)_{I,\mathrm{free}}) & \longrightarrow & H^1(\Gamma^{\mathrm{nr}}, (P_*)_I) = 1
\end{array}$$

Une chasse aux diagrammes donne alors le premier isomorphisme.

Par ailleurs, $P(K) \to (P_*)_I$ est également surjectif car $P(K)$ est dense dans $P(K_\Sigma)$. En remplaçant dans la première ligne du diagramme précédent K_Σ par K, la même chasse aux diagrammes donne alors le second isomorphisme.

Le dernier isomorphisme s'obtient en observant que

$$\begin{aligned}
T(K_\Sigma)/T(K)\,T(K_\Sigma)^0 &\xrightarrow{\sim} (T(K_\Sigma)/T(K_\Sigma)^0)/(T(K)/T(K) \cap T(K_\Sigma)^0) \\
&\xrightarrow{\sim} \mathrm{Im}(\kappa_{T_{K_\Sigma}})/\mathrm{Im}(T(K) \to (T_*)_I) \\
&\xrightarrow{\sim} \mathrm{coker}(T(K) \to (T_*)_I)/\mathrm{coker}(\kappa_{T_{K_\Sigma}}) \\
&\xrightarrow{\sim} \mathrm{coker}\left(H^1(K, S) \to H^1(\Gamma^{\mathrm{nr}}, (S_*)_{I,\mathrm{free}})\right)/\mathrm{coker}\left(H^1(K_\Sigma, S) \to H^1(\Gamma^{\mathrm{nr}}, (S_*)_{I,\mathrm{free}})\right) \\
&\xrightarrow{\sim} \mathrm{coker}\left(H^1(K, S) \to \mathrm{Im}(H^1(K_\Sigma, S) \to H^1(\Gamma^{\mathrm{nr}}, (S_*)_{I,\mathrm{free}})\right).
\end{aligned}$$

Enfin, observons que ces trois quantités sont invariantes si l'on remplace S par $S \times P_0$ où P_0 est un tore quasi-trivial. On conclut alors que ces quantités sont des invariants birationnels stables de T d'après [15, §4]. □

Remerciements

L'auteur remercie Philippe Gille et Ralf Köhl, pour leurs soutiens, leurs accompagnements et leur relecture de la présente note.

L'auteur remercie également la Studienstiftung des deutschen Volkes pour avoir supporté financièrement cette note. Il a été également soutenu par le projet "Group schemes, root systems, and related representations", financé par l'Union Européenne - NextGenerationEU à travers le "Romania's National Recovery and Resilience Plan" (PNRR) call no. PNRR-III-C9-2023-I8, Project CF159/31.07.2023, et coordonné par le Ministre de la Recherche, de l'Innovation et de la Numérisation (MCID) de Roumanie.

Références

[1] Mikhail Borovoi et Jean-Louis Colliot-Thélène. *The defect of weak approximation for a reductive group over a global field*. 2025. arXiv : 2406.08017 [math.RT].

[2] Mikhail Borovoi et Cristian D. González-Avilés. *The algebraic fundamental group of a reductive group scheme over an arbitrary base scheme*. 2013. arXiv : 1303.6586 [math.AG].

[3] Jean-Louis Colliot-Thélène. « Résolutions flasques des groupes linéaires connexes ». In : *J. reine angew. Math.* 618 (2008), p. 77-133. url : https://doi.org/10.1515/CRELLE.2008.034.

[4] Jean-Louis Colliot-Thélène et Jean-Jacques Sansuc. « Principal homogeneous spaces under flasque tori: applications ». In : *J. Algebra* 106.1 (1987), p. 148-205. url : https://doi.org/10.1016/0021-8693(87)90026-3.

[5] Jean-Louis Colliot-Thélène et Venapally Suresh. « Quelques questions d'approximation faible pour les tores algébriques ». In : *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 57.1 (2007), p. 273-288. url : https://doi.org/10.5802/aif.2258.

[SGA3] M. Demazure et A. Grothendieck. *SGA3 : Schémas en groupes*. Réédition par P. Gille et P. Polo disponible sur https://webusers.imj-prg.fr/~patrick.polo/SGA3/. 1962–1964.

[6] Ofer Gabber, Philippe Gille et Laurent Moret-Bailly. « Fibrés principaux sur les corps valués henséliens ». In : *Algebr. Geom.* 1.5 (2014), p. 573-612. url : https://doi.org/10.14231/AG-2014-025.

[7] Philippe Gille. « Le problème de Kneser-Tits ». In : *Séminaire Bourbaki. Volume 2007/2008. Exposés 982–996*. 326. Paris: Société Mathématique de France (SMF), 2009, Exp. No. 983, vii, 39-81.

[8] Philippe Gille. « Sur la classification des schémas en groupes semi-simples ». In : *Autour des schémas en groupes. Vol. III*. T. 47. Panor. Synthèses. Soc. Math. France, Paris, 2015, p. 39-110.

[9] David Harari. *Cohomologie galoisienne et théorie du corps de classes*. Savoirs Actuels (Les Ulis). [Current Scholarship (Les Ulis)]. EDP Sciences, Les Ulis; CNRS Éditions, Paris, 2017, p. vi+344.

[10] Tasho Kaletha et Gopal Prasad. *Bruhat-Tits theory—a new approach*. T. 44. New Mathematical Monographs. Cambridge University Press, Cambridge, 2023, p. xxx+718.

[11] Robert E. Kottwitz. « Isocrystals with additional structure. II ». In : *Compositio Math.* 109.3 (1997), p. 255-339. url : https://doi.org/10.1023/A:1000102604688.

[12] Daniel A. Marcus. *Number fields*. Universitext. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977, p. viii+279.

[13] Jean-Jacques Sansuc. « Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres ». In : *J. reine angew. Math.* 327 (1981), p. 12-80. url : https://doi.org/10.1515/crll.1981.327.12.

[14] Jean-Pierre Serre. *Cohomologie galoisienne*. Fifth. T. 5. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1994, p. x+181. url : https://doi.org/10.1007/BFb0108758.

[15] V. E. Voskresenskiĭ. *Algebraic groups and their birational invariants*. T. 179. Translations of Mathematical Monographs. Translated from the Russian manuscript by Boris Kunyavski [Boris È. Kunyavskiĭ]. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998, p. xiv+218. url : https://doi.org/10.1090/mmono/179.

Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive Gauche, Sorbonne Université, Campus Pierre et Marie Curie, 4, place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France