Algèbre Commutative 2021/2022
D.M. (à rendre pour le 26/11, par mail ou dans mon casier en 15-16-415)

Exercice 1: L'objectif de cet exercice est de montrer que l'anneau $\mathbb{Z}[\frac{1+i\sqrt{19}}{2}]$ est principal mais non euclidien.
(1) Soit A un anneau euclidien. Montrer qu'il existe un élément $a \in A$, $a \notin A^\times$ tel que l'application $p_{Aa} : A^\times \cup \{0\} \to A/Aa$ soit surjective.
Dans ce qui suit, on note $\alpha := \frac{1+i\sqrt{19}}{2}$ et $\overline{\alpha} := \frac{1-i\sqrt{19}}{2}$, $A := \mathbb{Z}[\alpha] \subset \mathbb{C}$.
(2) Montrer qu'on a un isomorphisme canonique d'anneaux $\mathbb{Z}[X]/X^2 - X + 5 \tilde{\to} A$.
(3) Montrer que $A/2A$ et $A/3A$ sont des corps.
(4) Déterminer $A^\times$ et en déduire que A n'est pas euclidien.
(5) Montrer que pour tout $0 \neq a, b \in A$ il existe $q, r \in A$ tels que $r = 0$ ou $|r| < |b|$ et soit $a = qb + r$ soit $2a = qb + r$.
(6) En déduire que A est principal.

Exercice 2 Soit B un anneau et $A \subset B$ un sous-anneau.
(1) Montrer que pour $b \in B$ les PSSE:
  (a) Il existe un polynôme unitaire non nul $0 \neq P_b \in A[T]$ tel que $P_b(b) = 0$;
  (b) La sous A-algèbre $A[b] \subset B$ est de type fini comme A-module;
  (c) Il existe une sous-A-algèbre $C \subset B$ contenant $A[b]$ qui est de type fini comme A-module.
  On dit qu'un élément $b \in B$ qui vérifie les propriétés équivalentes (a), (b), (c) ci-dessous est entier sur A.
(2) Montrer que l'ensemble $B^A \subset B$ des éléments de B entiers sur A est une sous-A-algèbre de B. Si $A = B^A$, on dit que A est intégralement clos dans B. Si $B^A = B$ on dit que B est entier sur A.
(3) Supposons B entier sur A. Montrer que si $I \subset B$ est un idéal alors B/I est entier sur $A/A \cap I$ et que si $S \subset A$ est une partie multiplicative alors $S^{-1}B$ est entier sur $S^{-1}A$.
(4) Supposons A, B intègres et B entier sur A. Montrer que A est un corps ssi B est un corps.
(5) Supposons B entier sur A. Montrer que
  (a) pour tout $\mathfrak{q} \in spec(B)$, $\mathfrak{q} \in spm(B)$ ssi $\mathfrak{q} \cap A \in spm(A)$.
  (b) pour tout $\mathfrak{q}, \mathfrak{q}' \in spec(B)$ tels que $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}'$, $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{q}' \cap A$ implique $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}'$.
  (c) pour tout $\mathfrak{p} \in spec(A)$ il existe $\mathfrak{q} \in spec(B)$ tel que $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap A$ (Ind.: on pourra considérer un idéal maximal du localisé de B en $A \setminus \mathfrak{p}$).
  (d) pour toutes suites d'idéaux premiers $\mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_m$ de A, toute suite d'idéaux premiers $\mathfrak{q}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{q}_n$ de B telle que $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{q}_i \cap A$, $i = 1, \ldots, n$ peut se prolonger en une suite d'idéaux premiers $\mathfrak{q}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{q}_m$ de B telle que $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{q}_i \cap A$, $i = 1, \ldots, m$.

Exercice 3: (Différentielles de Kähler). Soit A un anneau. On rappelle que si B et C sont deux A-algèbres, $A \to B \otimes_A C$, $a \mapsto a \otimes 1 = 1 \otimes a$ est naturellement muni d'une structure de A-algèbre pour le produit $(b \otimes c)(b' \otimes c') = (bb') \otimes (cc')$ et que les applications $B \to B \otimes_A C$, $b \mapsto b \otimes 1$ et $C \to B \otimes_A C$, $c \mapsto 1 \otimes c$ sont des morphismes de A-algèbres. Cela s'applique en particulier au cas $B = C$. Dans ce cas en outre, comme l'application produit $B \times B \to B$, $(b, b') \mapsto bb'$ est 2-A-linéaire, elle se factorise de façon unique en un morphisme de A-modules $B \otimes_A B \to B$, $b \otimes b' \mapsto bb'$.
(1) Vérifier que $B \otimes_A B \to B$ est un morphisme de A-algèbres.
(2) Montrer que l'idéal $I := \ker(B \otimes_A B \to B) \subset B \otimes_A B$ est engendré par les éléments de la forme $b \otimes 1 - 1 \otimes b$.
(3) On note $\Omega_{B|A} := I/I^2$. C'est un $B \otimes_A B$-module. En considérant les morphismes de A-algèbres $\phi_1 : B \to B \otimes_A B$, $b \mapsto b \otimes 1$ et $\phi_2 : B \to B \otimes_A B$, $b \mapsto 1 \otimes b$, on peut munir $\Omega_{B|A}$ de deux structures de B-module *a priori* distinctes: $\phi_{1*}\Omega_{B|A}$ et $\phi_{2*}\Omega_{B|A}$. Montrer qu'en fait ces deux structures de B-module coïncident.

(4) Soit M un B-module. Une A-dérivation sur B à valeur dans M est une application $d : B \to M$ telle que $d(bb') = bdb' + b'db$. Montrer que l'ensemble $Der_A(B, M)$ est naturellement muni d'une structure de B-modules.

(5) Montrer que l'application $d := d_{B|A} : B \to \Omega_{B|A}$, $b \mapsto db = \overline{b \otimes 1 - 1 \otimes b}$ est une A-dérivation.

(6) Rappeler quelle est la structure de B-module sur l'ensemble $Hom_B(\Omega_{B|A}, M)$ des morphismes de B-modules $\Omega_{B|A} \to M$ et montrer que l'application $Hom_B(\Omega_{B|A}, M) \to Der_A(B, M)$, $\phi \mapsto \phi \circ d$ est un isomorphisme de B-modules.

(7) Soit $I \subset A$ un idéal. Montrer que $\Omega_{A/I|A} = 0$.

(8) Soit $S \subset A$ une partie multiplicative. Montrer que $\Omega_{S^{-1}A|A} = 0$.

(9) Supposons $B = A[X_1, \ldots, X_r]$.

  (a) Montrer que $\Omega_{B|A}$ est engendré comme B-module par $dX_1, \ldots, dX_r$ et que pour tout $P(\underline{X}) \in B$, $dP = \sum_{1 \leq i \leq r} \frac{\partial P}{\partial X_i} dX_i$ (où $\frac{\partial P}{\partial X_i}$ est le "polynôme dérivé de $P(\underline{X})$ selon la variable X_i").

  (b) Montrer que pour $i = 1, \ldots, r$, l'application $\partial_i : B \to B$, $P \mapsto \frac{\partial P}{\partial X_i}$ est une A-dérivation à valeur dans B. D'après la question (6) il existe donc un unique morphisme de B-modules $\phi_i : \Omega_{B|A} \to B$ tel que $\phi_i \circ d = \partial_i$.

  (c) Montrer que $\phi_i(dX_j) = \delta_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq r$. En déduire que

$$\Omega_{B|A} \simeq \bigoplus_{1 \leq i \leq r} BdX_i \quad \text{et} \quad Hom_B(\Omega_{B|A}, B) \simeq \bigoplus_{1 \leq i \leq r} B\partial_i.$$