UPMC - 2M175
CC - groupe 9, Corrigé

(1) On décompose σ en produit de cycles à support disjoint

$$\sigma = (1,17)(2,14,8)(3,5,7,11,13)(4,12,6,15,9,16,10) = c_1c_2c_3c_4$$

(a) Si c est un cycle de longueur ℓ, $\epsilon(c) = (-1)^{\ell-1}$. En utilisant que la signature est un morphisme de groupes, on a donc $\epsilon(\sigma) = (-1)^{1+2+4+6} = -1$.

(b) Le nombre d'inversions de σ et le nombre $I(\sigma)$ de couples (i,j) avec $1 \leq i < j \leq 17$ tels que $\sigma(j) > \sigma(i)$. On trouve $I(\sigma) = 16 + 12 + ... = 89$.

(c) En utilisant qu'un cycle de longueur ℓ est d'ordre ℓ donc en particulier vérife $c^\ell = Id$ et que dans la décomposition $\sigma = c_1c_2c_3c_4$ les cycles c_i commutent, on obtient $\sigma^{21} = c_1^{21}c_2^{21}c_3^{21}c_4^{21} = (c_1^2)^{10}c_1(c_2^3)^7(c_3^5)^2c_3(c_4^7)^3 = c_1c_3$.

(2) On rappelle que $\sigma, \tau \in \mathcal{S}_n$ sont dite conjuguées si et seulement si il existe $\gamma \in \mathcal{S}_n$ tel que $\sigma = \gamma\tau\gamma^{-1}$. On a vu dans l'exercice 6, que c'tait aussi équivalent au fait que dans leur décomposition en produit de cycles à support disjoint, σ et τ aient exactement le même nombre de cycles de longueur donnée.
Or $\sigma = (1,7,4)(2,8,5)(3,9,6)$ et $\tau = (1,4,8,2,6)(3,5,7,9)$: ces permutations ne sont pas conjuguées. Pour calculer $\sigma\tau\sigma^{-1}$, on utilise la formule de conjugaison pour un cycle: $\sigma(a_1,\dots,a_n)\sigma^{-1} = (\sigma(a_1),\dots,\sigma(a_n))$. Ici,

$$\sigma\tau\sigma^{-1} = (\sigma(1),\sigma(4),\sigma(8),\sigma(2),\sigma(6))(\sigma(3),\sigma(5),\sigma(7),\sigma(9)) = (7,1,5,8,3)(9,2,4,6).$$

(3) (a) En général $|\mathcal{S}_n| = n!$ donc ici $|\mathcal{S}_5| = 5! = 120$.

(b) En général, le nombre de classes de conjugaison dans $\mathcal{S}_n$ correspond au nombre de décomposition possible en produit de cycles à support disjoint (ce qui correspond aussi au nombre de partitions de l'entier n). Pour $n = 5$, on vérifie 'à la main' que $5 = 1+1+1+1+1 = 2+1+1+1 = 3+1+1 = 4+1 = 5 = 2+2+1 = 2+3$, ce qui donne 7 classes de conjugaison.

(c)

Représentant	Nombre déléments
Id	1
$(1,2)$	$\binom{5}{2} = 10$
$(1,2,3)$	$2! \times \binom{5}{2} = 20$
$(1,2,3,4)$	$3! \times \binom{5}{1} = 30$
$(1,2,3,4,5)$	$4! = 24$
$(1,2)(3,4)$	$3 \times \binom{5}{1} = 15$
$(1,2)(3,4,5)$	$2! \times \binom{5}{2} = 20$

ment On vérifie au passage que $1 + 10 + 20 + 30 + 24 + 15 + 20 = 120$.

(4) Si on écrit une permutation σ comme produit de cycles à support disjoint $\sigma = c_1c_2\cdots c_r$, l'ordre de σ est le ppcm des ordres des c_i (*i.e.* la longueur de c_i). Il faut donc regarder les décompositions possibles en produit de cycles à support disjoint. Celle qui fait gagner est $10 = 2 + 3 + 5$, $ppcm(2,3,5) = 30$.

(5) On sait que les 3-cycles sont tous conjugués dans $\mathcal{S}_n$. Soit donc $c, c' \in \mathcal{S}_n$ deux 3-cycles et soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$ tel que $c' = \sigma c\sigma^{-1}$. Si $\sigma \in \mathcal{A}_n$, on a gagné. Sinon, si $n \geq 5$ et $c = (a,b,c)$, on peut toujours trouver deux autres éléments $1 \leq d,e \leq n$ distincts de a,b,c et alors $c' = \sigma c\sigma^{-1} =$

$\sigma(d,e)c(\sigma(d,e))^{-1}$ avec $(d,e)\sigma \in \mathcal{A}_n$. Cet argument utilise $n \geq 5$. Si $n=3$, il n'y a que 2 3-cycles: $c=(1,2,3)$ et c^2. Or $\mathcal{A}_3 = \{1,c,c^2\} \simeq \mathbb{Z}/3$ est abélien donc c et c^2 ne peuvent être conjugués dans $\mathcal{A}_3$. Si $n=4$, il y a $2 \times \binom{4}{3} = 8$ 3-cycles. Soit $c \in \mathcal{S}_4$ un 3-cycle. Le cardinal de la classe de conjugaison de c dans $\mathcal{A}_4$ est $[\mathcal{A}_4 : C_{\mathcal{A}_4}(c)]$ où $C_{\mathcal{A}_4}(c) := \{\sigma \in \mathcal{A}_4 \mid \sigma c \sigma^{-1} = c\}$. Or avec $c=(a,b,c)$, $\sigma c \sigma^{-1} = (\sigma(a),\sigma(b),\sigma(c)) = (a,b,c)$ impose que σ fixe le 4ème élément d de $\{1,2,3,4\}$ et si $\sigma \neq Id$ alors σ est sans point fixe sur $\{a,b,c\}$ (sinon, $\sigma(a)=a$ imposerait $\sigma(b)=c$, $\sigma(c)=b$: contradiction). On en déduit que $C_{\mathcal{S}_4}(c) = \langle c \rangle$ est d'ordre 3 donc que $[\mathcal{A}_4 : C_{\mathcal{A}_4}(c)] = 4$. Il y a donc deux classes de conjugaison de 3-cycles dans $\mathcal{A}_4$.

(6) (a) Cette question avait été traitée dans l'exercice 7 du TD 2: on peut par exemple prendre pour T l'ensemble des transpositions $(1,i)$, $i=2,\ldots,n$ en observant que $(i,j)=(1,i)(i,j)(1,i)$ et en invoquant le fait que $\mathcal{S}_n$ est engendré par les transpositions.

(b) (i) Notons C l'ensemble des couples (e,P), où $e \in A$ et $P \in S$ est un sommet de e. On calcule $|C|$ de deux façons différentes:

$$|C| = \sum_{e\in A} |\{P \in S \mid P \in e\}| = 2|A|$$
$$|C| = \sum_{P\in S} |\{e \in A \mid P \in e\}| = \sum_{P\in S} \delta(P)$$

(ii) En raisonnant par récurrence sur $n=|S|$, on va montrer qu'un graphe connexe ayant n sommets a toujours au moins $n-1$ arêtes. C'est clair si $n=1,2$. Supposons que c'est vrai pour un graphe connexe ayant $\leq n$ sommets et soit $G=(S,A)$ un graphe connexe ayant $n+1$ sommets. On distingue deux cas. Si pour tout $P \in S$, $\delta(P) \geq 2$, alors on a d'après (i), $|A| \geq n+1 \geq n$. Sinon, il existe au moins un $P \in S$ tel que $\delta(P)=1$. En supprimant ce P et l'unique arête $e \in A$ de sommet P, le graphe résultant $G'=(S',A')$ est encore connexe et on a $|A| = |A'|+1 \geq n-1+1 = n$. La dernière inégalité résulte de l'hypothèse de récurrence.

(iii) Revenons maintenant à nos moutons. On se fixe un ensemble $T \subset \mathcal{S}_n$ de transpositions et on lui associe un graphe G ayant n sommets $P_1,\ldots,P_n$ et dont les arêtes sont les segments $[P_i,P_j]$ tels que $(i,j) \in T$. Montrons que T engendre $\mathcal{S}_n$ si et seulement si G est connexe. Observons d'abord que, puisque les transpositions engendrent $\mathcal{S}_n$, T engendre $\mathcal{S}_n$ si et seulement si toute transposition de $\mathcal{S}_n$ peut s'écrire comme produit de transpositions dans T. Mais par définition de G, dire que la transposition (i,j) s'écrit comme produit de transpositions dans T, c'est exactement dire qu'on peut passer de P_i à P_j en suivant des arêtes dans A donc que G est connexe. Il résulte alors de (ii) que $|T| \geq n-1$.