Algèbre Commutative 2023/2024
T.D.3

Exercice 1: Soit A un anneau commutatif et $S \subset A \setminus \{0\}$ une partie multiplicative.

(1) Montrer qu'on a un isomorphisme canonique d'anneaux $S^{-1}(A[X]) \tilde{\to} (S^{-1}A)[X]$.

(2) Montrer que les localisés d'un anneau principal en ses idéaux premiers non nuls sont des anneaux de valuation discrète (on rappelle qu'un anneau de valuation discrète est un anneau principal ne possèdant qu'un seul idéal premier non nul).

(3) Si $I, J \subset A$ sont des idéaux, montrer que $S^{-1}(I \cap J) = S^{-1}I \cap S^{-1}J$ et $S^{-1}(I + J) = S^{-1}I + S^{-1}J$.

(4) Si $I \subset J$ sont des idéaux et si on note $\overline{S} \subset A/I$ l'image de S *via* la projection canonique $A \twoheadrightarrow A/I$, montrer qu'on a un isomorphisme canonique

$$S^{-1}I/S^{-1}J \tilde{\to} \overline{S}^{-1}(I/J).$$

Pour (1) et (4), on peut construire deux morphismes inverses l'un de l'autre en utilisant les prop. univ. (*cf.* Exercice 2 (1) ci-dessous). Pour (3), il suffit d'écrire. Pour (2), on sait que les idéaux premiers non nuls de A sont les idéaux de la forme Ap avec $0 \neq p \in A$ irréductible. Notons $v_p : K \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}$ la valuation p-adique de A étendue à son corps des fraction $K := Frac(A)$. On renvoie au par. 6.5 du poly de cours pour le fait que $A_{v_p} := v_p^{-1}(\mathbb{Z}_{\geq 0}) \subset K$ est un sous-anneau de K, contenant A et dont les idéaux sont exactement les $p^n A_{v_p} := v_p^{-1}(\mathbb{Z}_{\geq n})$, $n \geq 0$; en particulier, A_{v_p} est local d'unique idéal maximal pA_{v_p}. Maintenant, pour tout $a \in A$ on a $a \in A_{v_p}^\times$ ssi $v_p(a) = 0$ ssi $a \in A \setminus Ap$. Donc par prop. univ. de $A \to A_{Ap}$, l'inclusion canonique $A \hookrightarrow A_{v_p}$ se factorise de façon unique en un morphisme injectif d'anneaux $\phi : A_{Ap} \hookrightarrow A_{v_p}$ qui est aussi clairement surjectif puisque pour tout $x \in A_{v_p}$ on peut écrire

$$x = p^{v_p(x)} \prod_{q \neq p \,|\, v_q(x) \geq 0} q^{v_q(x)} \Big(\prod_{q \neq p \,|\, v_q(x) < 0} q^{-v_q(x)} \Big)^{-1} = \phi\Big(p^{v_p(x)} \prod_{q \neq p \,|\, v_q(x) \geq 0} q^{v_q(x)}\Big) \phi\Big(\prod_{q \neq p \,|\, v_q(x) < 0} q^{-v_q(x)} \Big)^{-1}.$$

Exercice 2:

(1) Soit A un anneau commutatif et $a \in A$ non nilpotent. Montrer qu'on a un isomorphisme canonique de A-algèbres $A[T]/(Ta - 1) \tilde{\to} A_a$.

(2) Soit p, q deux premiers distincts. Déterminer les idéaux premiers $\mathfrak{p}$ de $A := \mathbb{Z}/pq$ et déterminer dans chaque cas le localisé $(A \setminus \mathfrak{p})^{-1}A$.

(3) Soit A un anneau principal de corps des fractions $A \hookrightarrow K := Frac(A)$ et soit $A \subset B \subset K$ un sous-anneau de K contenant A. On pose $S := A \cap B^\times$. Montrer que $S \subset A \setminus \{0\}$ est une partie multiplicative de A et que le morphisme canonique $S^{-1}A \to B$ induit par l'inclusion $A \hookrightarrow B$ est un isomorphisme.

(1) On construit deux morphismes $\phi : A[T]/(Ta - 1) \to A_a$ et $\psi : A[T]/(Ta - 1) \to A_a$ inverses l'un de l'autre en utilisant les prop. univ. Par prop. univ. de $A \to A[T]$, il existe un unique morphisme de A-algèbres $\Phi : A[T] \to A_a$, $T \mapsto a^{-1}$. En particulier $\Phi(Ta - 1) = a^{-1}a - 1 = 0$ donc $\Phi : A[T] \to A_a$ se factorise de façon unique en un morphisme de A-algèbres $\phi := \overline{\Phi} : A[T]/(Ta - 1) \to A_a$. Inversement, considérons le morphisme canonique d'anneaux $\Psi : A \hookrightarrow A[T] \twoheadrightarrow A[T]/(aT - 1)$. On a $\Psi(a)\overline{T} = 0$ donc par prop. univ. de $A \to A_a$, $\Psi : A \to A[T]/(aT - 1)$ se factorise de façon unique en un morphisme d'anneaux $\psi = S_a^{-1}\Psi : A_a \to A[T]/(Ta - 1)$. On vérifie immédiatement sur les constructions que $\phi \circ \psi = Id$, $\psi \circ \phi = Id$.

(2) Par le lemme des restes chinois $\mathbb{Z}/pq \tilde{\to} \mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/q$. D'après l'Exercice 6 du TD1, les idéaux premiers de $A := \mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/q$ sont $\mathfrak{p} := \{0\} \times \mathbb{Z}/q$, $\mathfrak{q} := \mathbb{Z}/p \times \{0\}$. Notons $\iota_\mathfrak{p} : A \to A_\mathfrak{p}$, $\iota_\mathfrak{q} : A \to A_\mathfrak{q}$ les morphismes de localisation. Calculons le noyau de $\iota_\mathfrak{p} : A \to A_\mathfrak{p}$: pour tout $a \in A$, $\iota_\mathfrak{p} a = 0$ ssi il existe $s \notin \mathfrak{p}$ tel que $sa = 0$. Mais $A \setminus \mathfrak{p} = \mathbb{Z}/p \setminus \{0\} \times \mathbb{Z}/q = (\mathbb{Z}/p)^\times \times \mathbb{Z}/q$ donc $\iota_\mathfrak{p} : A \to A_\mathfrak{p}$ se factorise en $\overline{\iota}_\mathfrak{p} : A/\mathfrak{p} \to A_\mathfrak{p}$. Inversement, considérons la projection canonique $p_\mathfrak{p} : A \twoheadrightarrow A/\mathfrak{p}$. Pour

tout $s = (u, v) \in A \setminus \mathfrak{p} = (\mathbb{Z}/p)^\times \times \mathbb{Z}/q$, en posant $t = (u^{-1}, 0)$ on a $st = (1, 0) = (1, 1) - (0, 1)$ et $p_\mathfrak{p}(s)p_\mathfrak{p}(t) = p_\mathfrak{p}(st) = p_\mathfrak{p}((1, 1)) = 1$. En particulier, $p_\mathfrak{p}(A \setminus \mathfrak{p}) \subset (A/\mathfrak{p})^\times$ donc $p_\mathfrak{p} : A \twoheadrightarrow A/\mathfrak{p}$ se factorise en $(p_\mathfrak{p})_\mathfrak{p} : A_\mathfrak{p} \to A/\mathfrak{p}$. Vérifions que $\bar{\iota}_\mathfrak{p} \circ (p_\mathfrak{p})_\mathfrak{p} = Id$, $(p_\mathfrak{p})_\mathfrak{p} \circ \bar{\iota}_\mathfrak{p} = Id$.

(3) Clairement $1 \in S$, $0 \notin S$ et comme $A, B^\times$ sont stables par produit, S aussi. Notons $\iota : A \hookrightarrow K$ l'inclusion canonique et $\iota|^B : A \hookrightarrow B$ sa restriction. Par construction, $\iota|^B(S) \subset B^\times$ donc par prop. univ. de $\iota_S : A \to S^{-1}A$ il existe un unique morphisme d'anneau $S^{-1}\iota|^B : S^{-1}A \to B$ tel que $S^{-1}\iota|^B \circ \iota_S = \iota|^B$. Explicitement, $S^{-1}\iota|^B(a/s) = a/s \in B \subset K$; en particulier, $S^{-1}\iota|^B : S^{-1}A \to B$ est injectif. C'est la surjectivité qui requiert l'hypothèse que A est principal. Il suffit de montrer que pour tout $a \in A$, $0 \neq s \in A$, $s^{-1}a \in B \Rightarrow s^{-1} \in B$ (*i.e.* $s \in B^\times$). Or, comme A est principal donc factoriel, on peut toujours supposer que a et s n'ont pas de diviseurs irréductibles communs. Comme A est principal, cela implique $Aa + As = A$ donc il existe $u, v \in A$ tels que $ua + vs = 1$, ou encore, $s^{-1} = s^{-1}au + v \in B$.

Exercice 3: Soit A un anneau commutatif.

(1) Déterminer le noyau du morphisme canonique $A \to \prod_{\mathfrak{m} \in Spm(A)} A_\mathfrak{m}$;

(2) Montrer que les PSSE:

(i) A est réduit;
(ii) Pour tout $\mathfrak{p} \in Spec(A)$, $A_\mathfrak{p}$ est réduit;
(iii) Pour tout $\mathfrak{m} \in Spm(A)$, $A_\mathfrak{m}$ est réduit;

(3) L'énoncé de 2. reste-t-il vrai si on remplace réduit par intègre?

(4) Soit $S \subset A\setminus\{0\}$ une partie multiplicative. Montrer que si A est réduit, (resp. intègre, resp. intégralement clos, resp. factoriel) alors $S^{-1}A$ l'est aussi.

(1) Soit $a \in A$ tel que pour tout $\mathfrak{m} \in spm(A)$ il existe $s_\mathfrak{m} \notin \mathfrak{m}$ tel que $s_\mathfrak{m}a = 0$. Introduisons l'idéal annulateur de a dans A *i.e.*

$$Ann_A(a) := \ker(L_a : A \to A) = \{\alpha \in A \mid \alpha a = 0\} \subset A.$$

La condition pour tout $\mathfrak{m} \in spm(A)$ il existe $s_\mathfrak{m} \notin \mathfrak{m}$ tel que $s_\mathfrak{m}a = 0$ se réécrit pour tout $\mathfrak{m} \in spm(A)$, $Ann_A(a) \not\subset \mathfrak{m}$. Donc $Anna_A(a) = A$. En particulier, $1 \in Ann_A(a)$ donc $a = 0$. Cela montre que

$$\ker(A \to \prod_{\mathfrak{m} \in Spm(A)} A_\mathfrak{m}) = 0.$$

(2) (ii) $\Rightarrow$ (iii) est clair et (iii) $\Rightarrow$ (i) résulte de 1. puisque si $a \in \sqrt{0}$, pour tout $\mathfrak{m} \in Spm(A)$, $a/1$ est encore nilpotent dans $A_\mathfrak{m}$ donc nul par (iii). Autrement dit, $a \in \ker(A \to \prod_{\mathfrak{m} \in Spm(A)} A_\mathfrak{m})$. Enfin, pour (i) $\Rightarrow$ (iii) soit $\mathfrak{p} \in Spec(A)$ et $a/s \in A_\mathfrak{p}$ nilpotent *i.e.* il existe $n \geq 1$ et $t \notin \mathfrak{p}$ tel que $ta^n = 0$. Donc $(ta)^n = 0$. Comme A est réduit, cela impose $ta = 0$ *i.e.* $a/1 = 0$ dans $A_\mathfrak{p}$.

(3) On a toujours (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) mais la réciproque est fausse en général (*e.g.* $\mathbb{Z}/pq$).

(4) Il suffit d'écrire...

Exercice 4: Montrer qu'on a un morphisme d'anneaux canonique injectif $A/\mathfrak{p} \to \kappa(\mathfrak{p}) := A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$. Montrer que $\mathfrak{p}$ est maximal ssi ce morphisme est un isomorphisme.

Déjà, $\mathfrak{p} = \ker(A \xrightarrow{\iota_\mathfrak{p}} A_\mathfrak{p} \to A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p} =: \kappa(\mathfrak{p}))$. L'inclusion $\subset$ est immédiate. Inversement, si $a \in A$ est tel que $a/1 \in \mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ cela signifie qu'il existe $p \in \mathfrak{p}$ et $s, t \notin \mathfrak{p}$ tels que $tsa = tp$ mais comme $tp \in \mathfrak{p}$, $st \notin \mathfrak{p}$ et $\mathfrak{p}$ est premier, cela impose $a \in \mathfrak{p}$. Donc $A \xrightarrow{\iota_\mathfrak{p}} A_\mathfrak{p} \to \kappa(\mathfrak{p})$ se factorise de façon unique en un morphisme injectif $A/\mathfrak{p} \hookrightarrow \kappa(\mathfrak{p})$. De plus, par propriété universelle du corps des fractions d'un anneau intègre, $A/\mathfrak{p} \hookrightarrow \kappa(\mathfrak{p})$ se factorise à son tour en

$$\begin{tikzcd} A/\mathfrak{p} \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & \kappa(\mathfrak{p}) \\ Frac(A/\mathfrak{p}) \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

et on vérifie immédiatement que $Frac(A/\mathfrak{p})\tilde{\to}\kappa(\mathfrak{p})$ est un isomorphisme ($\overline{a}/\overline{s}$ avec $a \in A$, $s \notin \mathfrak{p}$ s'envoie sur la classe de a/s modulo $A_{\mathfrak{p}}\mathfrak{p}$). La conclusion résulte donc du fait que $\mathfrak{p}$ est maximal ssi $A/\mathfrak{p}\tilde{\to}Frac(A/\mathfrak{p})$.

Exercice 5: Soit k un corps et A une k-algèbre.

(1) Supposons que A est un corps. Pour tout $x \in A$, on note $k(x) \subset A$ le plus petit sous-corps de A contenant x et k. Montrer qu'on a l'alternative suivante (algébrique / transcendant - *cf.* TD1, Ex. 4):
- Soit le morphisme d'évalutation $ev_x : k[X]\tilde{\to}k[x]$ est un isomorphisme de k-algèbres et le morphisme $k[X] \overset{ev_x}{\tilde{\to}} k[x] \hookrightarrow k(x)$ se localise en un isomorphisme de corps $k(X)\tilde{\to}k(x)$. En particulier $k[x]$ (donc a fortiori $k(x)$) est de dimension infinie sur k.
- Soit il existe un unique polynôme irréductible unitaire $P_x \in k[X]$ tel que $\ker(ev_x) = k[X]P_x$ et le morphisme de k-algèbres $ev_x : k[X] \twoheadrightarrow k[x]$ se factorise en un isomorphisme $k[X]/P_x\tilde{\to}k[x]$. En particulier $k[x] = k(x)$ et $k(x)$ est de dimension finie sur k, égale au degré de P_x.

(2) Montrer que le corps des fractions $k(X)$ de l'anneau des polynômes à une indéterminée $k[X]$ sur k n'est pas une k-algèbre de type fini.

(3) (Nullstellensatz) Supposons encore que A est un corps. Montrer que si A est de type fini sur k alors A est de dimension finie sur k. On pourra procéder par récurrence sur le nombre de générateurs de A comme k-algèbre.

(4) Soit A une k-algèbre de type fini. Soit $a \in A$ non nilpotent et $\mathfrak{m} \in spm(A)$.
  (a) Montrer que $A_a/\mathfrak{m}$ est de k-dimension finie.
  (b) On note $\iota_a : A \to A_a$ le morphisme de localisation. Montrer que $\mathfrak{p} := \iota_a^{-1}(\mathfrak{m}) \in spm(A_a)$.

(5) Soit A une k-algèbre de type fini. Montrer que $\cap_{\mathfrak{p}\in spec(A)}\mathfrak{p} = \cap_{\mathfrak{m}\in spm(A)}\mathfrak{m}$. En déduire que pour tout idéal $I \subset A$

$$\sqrt{I} = \bigcap_{\mathfrak{m}\in spm(A),\ I\subset\mathfrak{m}} \mathfrak{m}.$$

(6) On suppose dans cette question que k est algébriquement clos *i.e.* que la seule extension de corps de k-dimension finie est l'extension triviale (*e.g.* $\mathbb{C}$ a cette propriété).
  (a) Montrer que les idéaux maximaux de $k[X_1, \dots, X_r]$ sont les idéaux engendrés par les $X_1-a_1, \dots, X_r-a_r$, $\underline{a} = (a_1, \dots, a_r) \in k^r$.
  (b) Soit $I \subset k[X_1, \dots, X_r]$ un idéal. On note $V(I) := \{\underline{a} \in k^r \mid P(\underline{a}) = 0,\ P \in I\} \subset k^r$ et $V^m(I) := \{\mathfrak{m} \in spm(A) \mid I \subset \mathfrak{m}\}$. Montrer qu'on a des bijections canoniques

$$V^m(I)\tilde{\to}Hom_{Alg/k}(k[X_1, \dots, X_r]/I, k)\tilde{\to}V(I).$$

(1) Par prop. univ. de $k[T]$ il existe un unique morphisme de k-algèbres $ev_x : k[T] \to K$ tel que $ev_x(T) = x$. De plus, par définition / construction, $ev_x(k[T]) = k[x](\subset K)$. Si $\ker(ev_x) = \{0\}$, $ev_x : k[T] \hookrightarrow K$ induit donc un isomorphisme sur son image $ev_x : k[T]\tilde{\to}k[x]$ et, comme $k(x)$ est un corps, le morphisme injectif $ev_x : k[T]\tilde{\to}k[x] \hookrightarrow k(x)$ se localise en un morphisme $ev_x : k(T) \to k(x)$. Comme $k(T)$ est un corps, $ev_x : k(T) \to k(x)$ est automatiquement injectif. De plus $ev_x(k(T) \subset K)$ est un sous-corps de K contenant k et x donc par minimalité de $k(x)$, $ev_x(k(T)) = k(x)$. Si par contre $\ker(ev_x) \neq \{0\}$, comme $k[T]$ est principal, il existe $0 \neq P_x \in k[T]$ tel que $\ker(ev_x) = k[T]P_x$ et $ev_x : k[T] \to K$ se factorise en un isomorphisme de k-algèbres $\overline{ev}_x : k[T]/P_x\tilde{\to}k[x]$. Mais comme $k[x] \subset K$ est intègre, $k[T]P_x \subset k[T]$ est un idéal premier non nul de $k[T]$- donc maximal puisque $k[T]$ est principal. On en déduit que $k[x] = k(x)$ est un corps. On a déjà vu que pour tout $0 \neq P \in k[T]$, $k[T]/P$ est de k-dimension le degré de P (division euclidienne par P dans $k[T]$).

(2) Sinon, on aurait $k(X) = k[a_1, \dots, a_n]$ où $a_i = P_i/Q_i$ avec $0 \neq P_i, Q_i \in k[X]$, $i = 1, \dots, n$. Posons $Q := Q_1 \cdots Q_n \in k[X]$. Par construction $k(X) \subset k[X]_Q$. Mais si $P \in k[X]$ est premier avec Q, $1/P \notin k[X]_Q$: contradiction.

(3) On procède par récurrence sur le nombre n de générateurs de K comme k-algèbre. Plus précisément, pour tout $n\geq 0$ considérons l'assertion suivante

H(n) Pour tout corps k, toute k-algèbre $K=k[a_1,\dots,a_n]$ qui est un corps est une extension finie de k

- H(0) est trivialement vraie. H(1) résulte de la Question (1).
- Supposons maintenant $n\geq 2$ et soit $A=k[a_1,\dots,a_n]$ un corps. Comme A est un corps, on a $A=k[a_1,\dots,a_n]=k(a_1)[a_2,\dots,a_n]$ et H(n-1) assure que $[A:k(a_1)]<+\infty$. Il suffit donc de montrer que $[k(a_1):k]<+\infty$ *i.e.* - *cf.* Question (1) - que $a_1\in A$ est algébrique sur k. Choisissons une $k(a_1)$-base $b_1,\dots,b_r$ de K. Ecrivons $a_i=\sum_{1\leq j\leq r}x_{i,j}b_j$ avec $x_{i,j}\in k(a_1)$, $1\leq i\leq n$, $1\leq j\leq r$, $b_ib_j=\sum_{1\leq k\leq r}x_{i,j,k}b_k$ avec $x_{i,j,k}\in k(a_1)$, $1\leq i,j,k\leq r$ et introduisons la sous-k-algèbre *de type fini sur k*

$$R:=k[x_{i,j},1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq r,x_{i,j,k},\ 1\leq i,j,k\leq r]\subset k(a_1)\subset A.$$

Comme $A=k[a_1,\dots,a_n]$ on a $A\subset\oplus_{1\leq i\leq r}Rb_i\subset\oplus_{1\leq i\leq r}k(a_1)b_i=A$ ce qui impose $k(a_1)=R$ donc, d'après les Questions (1) et (2), que $a_1\in A$ est algébrique sur k.

(4) (a) Comme A est par hypothèse une k-algèbre de type fini, $A[T]$ aussi. Or, d'après l'exercice 1. (a) on a $A[T]/Ta-1\tilde{\rightarrow}A_a\twoheadrightarrow A/\mathfrak{m}$ donc $A/\mathfrak{m}$ est une k-algèbre de type fini; comme c'est aussi un corps puisque $\mathfrak{m}$ est maximal, la Question (3) nous assure que $A/\mathfrak{m}$ est de k-dimension finie;

(b) Par définition, le morphisme de k-algèbres canonique $A\rightarrow A_a\twoheadrightarrow A_a/\mathfrak{m}$ se factorise en un morphisme injectif de k-algèbres $A/\mathfrak{p}\hookrightarrow A_a/\mathfrak{m}$. Mais on vient de voir que $A_a/\mathfrak{m}$ est de k-dimension finie. Donc $A/\mathfrak{p}$ est aussi de k-dimension finie; $A/\mathfrak{p}$ est aussi intègre puisque $A_a/\mathfrak{m}$ l'est donc, par l'Exercice 1 (a) du TD 1, $A/\mathfrak{p}$ est un corps.

(5) On a $\cap_{\mathfrak{m}\in spm(A)}\mathfrak{m}\subset\sqrt{0}$ ssi $A\setminus\sqrt{0}\subset\cup_{\mathfrak{m}\in spm(A)}A\setminus\mathfrak{m}$. Autrement dit, pour tout élément non-nilpotent $a\in A$ on cherche $\mathfrak{m}\in spm(A)$ tel que $a\notin\mathfrak{m}$. L'idéal $\mathfrak{p}$ construit dans la Question (4) convient. Le cas général se ramène au cas $I=0$ en travaillant dans A/I.

(6) Notons $A:=k[X_1,\dots,X_n]$.

(a) Déjà, par prop. univ de A, il existe un unique morphisme de k-algèbres $ev_{\underline{a}}:A\rightarrow k$ tel que $ev_{\underline{a}}(X_i)=a_i$, $i=1,\dots,r$. Par définition, $\mathfrak{m}_{\underline{a}}\subset\ker(ev_{\underline{A}})$. Inversement, pour tout $P\in\ker(ev_{\underline{a}})$, on peut effectuer la division euclidienne de P par X_1-a_1 dans $k[X_2,\dots,X_r][X_1]$ et écrire $P=(X_1-a_1)Q_1+R_1$ avec $R_1=0$ ou $0\neq R_1$ et $deg_{X_1}(R_1)=0$ *i.e.* $R_1\in k[X_2,\dots,X_r]$. Si $R_1\neq 0$, on peut effectuer la division euclidienne de R_1 par X_2-a_2 dans $k[X_3,\dots,X_r]$ *etc.* ainsi, on peut toujours écrire $P=\sum_{1\leq i\leq r}(X_i-a_i)Q_i+a$ avec $a\in k$. Mais comme $P\in\ker(ev_{\underline{a}})$, on a $a=0$. Cela montre que $\ker(ev_{\underline{a}})=\mathfrak{m}_{\underline{a}}$. Donc $A/\mathfrak{m}_{\underline{a}}\tilde{\rightarrow}k$ est un corps; en particulier, $\mathfrak{m}_{\underline{a}}\in spm(A)$. Inversement, pour tout $\mathfrak{m}\in spm(A)$, $A/\mathfrak{m}$ est une k-algèbre de type fini (comme quotient de A) et un corps donc par la Question (3), $A/\mathfrak{m}$ est une extension finie de k. Mais comme on a supposé k algébriquement clos, on a $k=A/\mathfrak{m}$. En particulier, si on note $a_i:=\overline{X}_i$, $i=1,\dots,r$ dans $A/\mathfrak{m}=k$, on a $\mathfrak{m}_{\underline{a}}\subset\mathfrak{m}$ donc, par maximalité de $\mathfrak{m}_{\underline{a}}$, $\mathfrak{m}_{\underline{a}}=\mathfrak{m}$.

(b) La première application est donnée par $\mathfrak{m}\mapsto p_{\mathfrak{m}}:A/I\rightarrow(A/I)/\mathfrak{m}\tilde{\rightarrow}A/p_I^{-1}(\mathfrak{m})=k$ et son inverse par $\phi:k[X_1,\dots,X_r]/I\rightarrow k\mapsto\mathfrak{m}_{(\phi(\overline{X}_1),\dots,\phi(\overline{X}_r))}$. La deuxième application est donnée par $\phi:k[X_1,\dots,X_r]/I\rightarrow k\mapsto(\phi(\overline{X}_1),\dots,\phi(\overline{X}_r))$ et son inverse par $\underline{a}\mapsto\overline{ev_{\underline{a}}}$.