Algèbre Commutative 2023/2024
T.D.4

Exercice 1:
(1) Si $n \geq 2$ est un entier, montrer que la suite de $\mathbb{Z}$-modules $0 \to \mathbb{Z} \overset{n\cdot}{\to} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n \to 0$ n'est pas scindée.
(2) On considère les structure de $\mathbb{Z}[X]$-modules suivantes sur $\mathbb{Z}^2$
  (a) $X \cdot (a,b) = (a+b, b)$;
  (b) $X \cdot (a,b) = (b,a)$.
  Dans le cas (a), la suite exacte courte de $\mathbb{Z}[X]$-modules
$$0 \to \mathbb{Z} \overset{a \to (a,0)}{\to} \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z} \to 0$$
  est-elle scindée? Même question avec la suite exacte courte de $\mathbb{Z}[X]$-modules
$$0 \to \mathbb{Z} \overset{a \to (a,a)}{\to} \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z} \to 0$$
  dans le cas (b). Que se passe-t-il si on remplace $\mathbb{Z}$ par $\mathbb{Q}$?

Exercice 2: Soit
$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_1"] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_2"] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_3"] & M_4 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_4"] & M_5 \arrow[d, "\alpha_5"] \\
N_1 \arrow[r] & N_2 \arrow[r] & N_3 \arrow[r] & N_4 \arrow[r] & N_5
\end{tikzcd}$$
un diagramme commutatif de morphismes de A-modules dont les lignes horizontales sont exactes.
(1) Montrer que si α_1 est surjective et α_2, α_4 sont injectives alors α_3 est injective.
(2) Montrer que si α_5 est injective et α_2, α_4 sont surjectives alors α_3 est surjective.

Exercice 3: (Noetherien vs artinien). Soit A un anneau.
(1) On suppose que l'idéal nul est produit d'un nombre fini $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_r$ d'idéaux maximaux (non nécéssairement distincts). Montrer que A est artinien ssi A est noetherien.
(2) Montrer qu'un anneau artinien est toujours noetherien.

Exercice 4: (A-modules simples). Soit A un anneau. On dit qu'un A-module M est simple s'il est non nul et si ses seuls sous-A-modules sont $\{0\}$ et M.
(1) Montrer que si M_1, M_2 sont deux A-modules simples tout morphisme de A-modules $f : M_1 \to M_2$ est soit nul soit un isomorphisme.
(2) Montrer qu'à isomorphisme près, les A-modules simples sont exactement les $A/\mathfrak{m}$ avec $\mathfrak{m} \in spm(A)$. Quels sont les A-modules simples d'un anneau principal?

Exercice 5: Soit A un anneau. Pour tout $X = (X_{i,j})_{1\leq i,j\leq r} \in M_r(A)$, on définit $det(X) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_r} \epsilon(\sigma) \prod_{1\leq j\leq r} X_{\sigma(j),j}$ et on rappelle la formule classique ${}^tCom(X)X = det(X)I_r$, où $Com(X) \in M_r(A)$ est la comatrice de X définie par $Com(X)_{i,j} = (-1)^{i+j} det(X[i,j])$ et $X[i,j] \in M_{r-1}(A)$ est la matrice obtenue à partir de X en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne. On regarde X comme un morphisme de A-modules $X : A^r \to A^r$, $C \mapsto XC$.
(1) Montrer que les PSSE:
  (i) $X : A^r \to A^r$ est surjectif;
  (ii) $X : A^r \to A^r$ est un isomorphisme;
  (iii) $det(X) \in A^\times$.
(2) Montrer que les PSSE:
  (i) $X : A^r \to A^r$ est injectif;
  (ii) $det(X) \in A \setminus A_{tors}$.

Exercice 6: (Lemme de Nakayama). Soit A un anneau et M un A-module *de type fini.*

(1) Soit $I \subset A$ un idéal tel que $IM = M$. Montrer qu'il existe $a \in I$ tel que $(1+a)M = 0$;
(2) Si on suppose de plus que I est contenu dans le radical de Jacobson de A montrer que $IM = M$ implique $M = 0$.

Exercice 7: (A-Modules projectifs). Soit A un anneau et P un A-module.
(1) Montrer que les PSSE
  (a) Pour tout morphisme surjectif de A-modules $v : M \twoheadrightarrow M''$ et pour tout morphisme de A-modules $f : P \to M''$ il existe un morphisme de A-modules $\widetilde{f} : P \to M$ tel que $v \circ \widetilde{f} = f$;
  (b) Pour tout morphisme surjectif de A-modules $v : M \twoheadrightarrow P$ il existe un morphisme de A-modules $s : P \to M$ tel que $v \circ s = Id_P$;
  (c) Il existe un A-module Q tel que $P \oplus Q$ soit un A-module libre.
  On dit qu'un A-module qui vérifie les propriétés équivalentes (a), (b), (c) est un A-module projectif.
(2) Montrer que tout A-module est quotient d'un A-module projectif.

Exercice 8: (A-Modules injectifs). Soit A un anneau et I un A-module.
(1) [Utilise Zorn] Montrer que les PSSE
  (a) Pour tout morphisme injectif de A-modules $u : M' \hookrightarrow M$ et pour tout morphisme de A-modules $f : M' \to I$ il existe un morphisme de A-modules $\widetilde{f} : M \to I$ tel que $\widetilde{f} \circ u = f$;
  (b) Pour tout idéal J de A et tout morphisme de A-modules $f : J \to I$ il existe un morphisme de A-modules $\widetilde{f} : A \to I$ tel que $\widetilde{f}|_J = f$.
  On dit qu'un A-module qui vérifie les propriétés équivalentes (a), (b) est un A-module injectif.
(2) Montrer que $\mathbb{Z}$ n'est pas un $\mathbb{Z}$-module injectif mais que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ sont des $\mathbb{Z}$-modules injectifs;
(3) Montrer qu'un produit de A-modules injectifs est injectif.
(4) Montrer que tout $\mathbb{Z}$-module M se plonge dans un $\mathbb{Z}$-module injectif.

Rem: L'énoncé reste vrai pour un anneau A quelconque mais la preuve est plus astucieuse.

Exercice 9: Soit A un anneau principal de corps des fractions K et soit $G \subset \mathrm{GL}_n(K)$ un sous-groupe. On suppose qu'il existe $0 \neq a \in A$ tel que $aG \subset M_n(A)$. Montrer qu'il existe $g \in \mathrm{GL}_n(K)$ tel que $gGg^{-1} \subset M_n(A)$. En déduire que pour tout sous-groupe fini $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})$ il existe $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})$ tel que $gGg^{-1} \subset M_n(\mathbb{Z})$.

Les exercices qui suivent sont des applications du théorème de structure des modules de type fini sur les anneaux principaux.

Exercice 10: (Classification des classes de conjugaison par les invariants de similitude) On rappelle que si V est un k-espace vectoriel de dimension finie tout endomorphisme $u : V \to V$ définit une structure de $k[T]$ module V_u sur V par $P(T)v = P(u)(v)$, $P \in k[T]$, $v \in V$. Le $k[T]$-module V_u est évidemment de type fini et de torsion. Il existe donc une unique suite de polynômes $P_{u,1}|P_{u,2}|\cdots|P_{u,r_u}$ telle que

$$V_u \simeq k[T]/P_{u,1} \oplus \cdots \oplus k[T]/P_{u,r_u}.$$

On dit que la suite $P_{u,1}|P_{u,2}|\cdots|P_{u,r_u}$ est la suite des *invariants de similitude* de l'endomorphisme u.

(1) Soit $u, u' : V \to V$ deux endomorphismes. Montrer qu'il existe $\phi \in \mathrm{Aut}_k(V)$ tel que $u = \phi \circ u' \circ \phi^{-1}$ si et seulement si u et u' ont mêmes invariants de similitude.
(2) Calculer le polynôme minimal et le polynôme caractéristique de u en fonction de sa suite d'invariants de similitude. Montrer plus précisément qu'il existe une base du k-espace vectoriel V dans laquelle u a pour matrice la matrice diagonale par blocs dont les blocs diagonaux sont les matrices compagnons des $P_{u,i}$.
(3) Calculer le nombre de classes de conjugaison (sous $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$) dans $M_n(\mathbb{F}_q)$, dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$.

Exercice 11: (Théorème de la base adaptée) Soit A un anneau principal, M un A-module libre de rang r et $N \subset M$ un sous-A-module. L'objectif de cet exercice est de montrer qu'il existe un unique entier $0 \leq s \leq r$, une unique suite $Ad_1 \supset Ad_2 \supset \cdots \supset Ad_s$ d'idéaux de A et $m_1, \ldots, m_r \in M$ tels que

$$N = \bigoplus_{1 \leq i \leq s} Ad_i m_i \subset \bigoplus_{1 \leq i \leq r} Am_i = M.$$

(1) Justifier l'unicité (sous réserve d'existence).
(2) Notons $\mathcal{E}$ l'ensemble des $\lambda(N)$, $f \in \mathrm{Hom}_A(M, A)$. Montrer que $\mathcal{E}$ possède un élément maximal I pour l'inclusion.
(3) Fixons $f \in \mathrm{Hom}_A(M, A)$ tel que $I = f(N) = Ad_1$ et $n_1 \in N$ tel que $f(n_1) = d_1$. Montrer que pour tout $g \in \mathrm{Hom}_A(M, A)$, $g(n_1) \in I$.
(4) Montrer qu'il existe $m_1 \in M$ tel que $n_1 = d_1 m_1$. En déduire que $M = Am_1 \oplus \ker(f)$ et $N = Ad_1 m_1 \oplus \ker(f) \cap N$.
(5) Conclure par récurrence sur le rang de M.

Exercice 12: (Classes d'équivalence) On considère l'action de $\mathrm{GL}_n(A) \times \mathrm{GL}_m(A)$ sur $M_{n,m}(A)$ donnée par $(P, Q) \cdot M = PMQ^{-1}$. Montrer que l'ensemble des classes d'équivalence $M_{n,m}(A)/\mathrm{GL}_n(A) \times \mathrm{GL}_m(A)$ est classifié par les suites $Ad_1 \supset Ad_2 \supset \cdots \supset Ad_n$ d'idéaux de A. Noter que dans le cas où $A = k$ est un corps commutatif, on retrouve le thèorème de classification des classes d'équivalence par le rang de la matrice.

Exercice 13: Soit M un $\mathbb{Z}$-module libre de rang fini m et $\phi \in \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(M)$ tel que $\phi \otimes \mathbb{Q} \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(M \otimes \mathbb{Q})$ est inversible. Montrer que $\phi(M) \subset M$ est d'indice fini et calculer $[M : \phi(M)]$.