Extension des scalaires

$\varphi : A \longrightarrow B$ morphisme d'anneaux.

M A-module. $\curvearrowright$ B-module $B \otimes_A M \,/\, \varphi^* M$.

N B-module

$\downarrow$

A-module $N|_A \,/\, \varphi_* N$

$A \times N \longrightarrow N$

$(a, n) \longmapsto a \cdot n = \varphi(a) \cdot n$

φ $A \times B \longrightarrow B$

$(a, b) \longmapsto a \cdot b = \varphi(a) b$

structure de B-module

$B \times B \otimes_A M \longrightarrow B \otimes_A M$

$(b_0, b \otimes m) \longmapsto b_0 \cdot (b \otimes m)$

$= (b_0 b) \otimes m$

$$\text{A-module} \underset{\longleftarrow}{\xrightarrow{B \otimes_A -}} \text{B-module}$$

On a une isomorphisme $|_A$ de $\mathbb{Z}$-modules

$$\mathrm{Hom}_A(M, N|_A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_B(B \otimes_A M, N)$$

$M \xrightarrow{f} N|_A \longrightarrow$ $B \otimes_A M \longrightarrow N$

$b \otimes m \longmapsto b f(m)$

$M \longrightarrow N|_A \longleftarrow B \otimes_A M \xrightarrow{f} N$

$m \longmapsto f(1 \otimes m)$

Extension des scalaires par

- Passage au quotient : $I \subset A$ idéal

$\varphi = p_I : A \longrightarrow A/I$

M A-module $A/I \otimes_A M \xrightarrow{\sim} M/IM$

$IM = \langle am \mid a \in I, m \in M \rangle < M$ s. A-modules

- Localisation : $S < A \setminus \{0\}$ partie multiplicative

$\varphi = i_S : A \longrightarrow S^{-1}A$

M A-module $S^{-1}A \otimes M$

M A-module. $S^{-1}\otimes_A M$

localisation d'un A-module M en une partie multiplicative $S \subset A\setminus\{0\}$.

On munit $S\times M$ de la relation $\sim$ définie

$$(s,m)\sim(s',m') \text{ si } \exists\, s''\in S \text{ tq } s''(s'm - sm') = 0$$

On vérifie que $\sim$ est une relation d'équivalence sur $S\times M$

<u>Rem</u> : Si M n'a pas de S-torsion ie $\forall s\in S$.

$$\left.\begin{array}{rl} s\cdot\; M & \longrightarrow M \\ m & \longmapsto sm \end{array}\right) \text{ est injective}$$

on peut simplement définir $\sim$ par $(s,m)\sim(s',m')$ si $s'm - sm' = 0$ $\qquad s'm = sm'$

$$\text{“} \quad \frac{m}{s} = \frac{m'}{s'} \quad \text{”}$$

Mais si M contient de la S-torsion on a besoin de pour assurer que $\sim$ est transitive.

On note $S^{-1}M = S\times M/\sim$ et

$$\left.\begin{array}{rl} -/- : S\times M & \longrightarrow S\times M/\sim \\ (s,m) & \longmapsto \frac{m}{s} = s^{-1}m \end{array}\right)$$

On vérifie que

$$+ : S^{-1}M\times S^{-1}M \longrightarrow S^{-1}M \qquad \cdot\; S^{-1}A\times S^{-1}M \longrightarrow S^{-1}M$$

$$\left(\frac{m}{s},\frac{m'}{s'}\right)\longmapsto \frac{s'm+sm'}{ss'} \qquad \left(\frac{a}{s},\frac{m'}{s'}\right)\longmapsto\frac{am'}{ss'}$$

munit $S^{-1}M$ d'une structure de $S^{-1}A$-modules tq

$$i_S : A \longrightarrow S^{-1}A$$

$$\left.\begin{array}{rl} i_S : M & \longrightarrow S^{-1}M|_A = i_{S*}(S^{-1}M) \\ m & \longmapsto \frac{m}{1} \end{array}\right) \text{ morphisme de A-modules}$$

qui a la propriété universelle suivante ;

$\forall$ $S^{-1}A$-module N
et pour $\forall$ morphisme de A-modules

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_S"'] & i_{S*} N = N|_A \\ S^{-1}M \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

$\exists !\ S^{-1}f$: morphisme de $S^{-1}A$-modules

$$S^{-1}f\left(\frac{m}{s}\right) = \frac{f(m)}{s}$$

Preuve :

– Unicité ss réserve d'existence

Si $S^{-1}f$ existe alors $S^{-1}f\left(\frac{m}{s}\right) = S^{-1}f\left(s^{-1} \cdot \underset{\frac{m}{1}}{i_S(m)}\right)$

$S^{-1}f$ morphisme de $S^{-1}A$-modules $\longrightarrow$ $= s^{-1} \cdot \underbrace{S^{-1}f \circ i_S(m)}_{f}$

$= s^{-1} f(m)$

– Existence $\left(\begin{array}{l} S \times M \xrightarrow{F} N \\ (s,m) \longmapsto \frac{f(m)}{s} \end{array}\right)$

$(s,m) \sim (s',m')$ $\exists\, s'' \in S$ tq $s''(s'm - sm') = 0$

$$s''s'm = s''sm'$$

$$f(s''s'm) = f(s''sm')$$

f morphisme de A-modules

$$s''s' f(m) = s''s f(m')$$

$$s''(s'f(m) - sf(m')) = 0.$$

$$\frac{f(m)}{s} = \frac{f(m')}{s'}$$

donc on a une factorisation

$$\begin{tikzcd} S \times M \arrow[r, "F"] \arrow[d] & N \\ S^{-1}M \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$\exists !\ \overline{F} = S^{-1}f$

On vérifie sur la construction que $\overline{F}$ ainsi construit est bien un morphisme de $S^{-1}A$-modules tq $\overline{F} \circ i_S = f$.

On peut écrire cette propriété universelle en disant que l'application

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}M, N) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Hom}_A(M, i_{S*}N) \\
S^{-1}f & \longleftarrow & f \\
f : S^{-1}M \to N & \longmapsto & f : M \to N \\
 & & \quad m \mapsto f(\frac{m}{1})
\end{array}$$

est bijective

On retrouve la propriété d'adjonction de $S^{-1}A \otimes_A -$

$$\mathrm{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}A \otimes_A M, N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(M, (i_{S*})N)$$

d'où un isomorphisme

$$\begin{tikzcd}
 & M \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
S^{-1}A \otimes_A M \arrow[rr, "\sim"] & & S^{-1}M
\end{tikzcd}$$

$$m \mapsto 1 \otimes m, \qquad m \mapsto \frac{m}{1}$$

$$\frac{a}{s} \otimes m \longmapsto \frac{am}{s}.$$

<u>Preuve</u> "à la main" de $\sim$

$$\left.\begin{array}{ccc}
S^{-1}A \times M & \longrightarrow & S^{-1}M \\
(\frac{a}{s}, m) & \longmapsto & \frac{a}{s} \cdot \frac{m}{1}
\end{array}\right) \quad A\text{-bilinéaire}$$

$$\begin{tikzcd}
S^{-1}A \times M \arrow[r] \arrow[d] & S^{-1}M \\
S^{-1}A \otimes_A M \arrow[ur, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{ccc}
S \times M & \xrightarrow{\psi} & S^{-1}A \otimes_A M. \\
(s, m) & \longmapsto & s^{-1} \otimes_A m
\end{array}$$

$$\frac{(s,m)}{\frac{m}{s}}$$

$$(s,m) \sim (s',m') \Rightarrow \psi(s,m) = \psi(s',m')$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \| \qquad\qquad \|$$

$$\exists\, s'' \in S \text{ tq } \qquad s^{-1} \otimes m \qquad s'^{-1} \otimes m'.$$

$$s''(sm' - s'm) = 0$$

$$s''(s'\otimes m - s\otimes m')$$
$$= (s''s')\otimes_A m - (s''s)\otimes_A m'$$
$$= 1\otimes_A s''s'm - 1\otimes_A s''s m'$$
$$= 1\otimes_A (\underbrace{s''s'm - s''s m'}_{=0})$$
$$= 0.$$

donc ds $S^{-1}A\otimes_A M$ $s'\otimes m = s\otimes m'$

$\iff s^{-1}\otimes m = s'^{-1}\otimes m'$

$\Psi(s,m)$ $\Psi(s',m')$

donc Ψ se factorise en

$$\begin{array}{ccc} S\times M & \longrightarrow & S^{-1}A\otimes_A M \\ \downarrow & \exists!\,\psi \nearrow & \\ S\times M/\sim & & s^{-1}\otimes_A m \\ \frac{m}{s} & \nearrow & \end{array}$$

et on vérifie que $\psi\circ\varphi = \mathrm{Id}$, $\varphi\circ\psi = \mathrm{Id}$.

Exemple : M A-module

- $S = A\setminus A^\times$ en part. si A est intègre $S = A\setminus\{0\}$
  $\curvearrowright S^{-1}A = \mathrm{Frac}(A)$.
- $S = \{a^n \mid n\geq 0\}$ $a\in A$ non nilpotent
  $\curvearrowright S^{-1}A = A_a$ $S^{-1}M = M_a$
- $S = A\setminus\mathfrak{p}$ $\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}(A)$
  $\curvearrowright S^{-1}A = A_\mathfrak{p}$: anneau local dont l'unique idéal maximal est $\mathfrak{p}$.
  $S^{-1}M = M_\mathfrak{p}$

Exercice

A anneau principal

M A-module de type fini

Par thm. de structure $M \simeq A^{\oplus r} \oplus \bigoplus_{\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(A)} \bigoplus_{n \geq 0} (A/\mathfrak{q}^n)^{\oplus \alpha_{\mathfrak{q},n}(M)}$

① Déterminer $M_{\mathfrak{p}}$ en fonction de ses invariants i.e r, $\alpha_{\mathfrak{q},n}(M)$

$$M_{\mathfrak{p}} = A_{\mathfrak{p}} \otimes_A M$$

$$\simeq A_{\mathfrak{p}} \otimes_A \left(A^{\oplus r} \oplus \bigoplus_{\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(A)} \bigoplus_{n \geq 0} (A/\mathfrak{q}^n)^{\oplus \alpha_{\mathfrak{q},n}(M)} \right)$$

$A_{\mathfrak{p}} \otimes_A (\bigoplus_{i \in I} M_i) \simeq \bigoplus_{i \in I} (A_{\mathfrak{p}} \otimes_A M_i)$

$$\simeq A_{\mathfrak{p}} \otimes_A (A^{\oplus r}) \oplus \bigoplus_{\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(A)} \bigoplus_{n \geq 0} A_{\mathfrak{p}} \otimes_A \left((A/\mathfrak{q}^n)^{\oplus \alpha_{\mathfrak{q},n}(M)} \right)$$

$$\simeq \underbrace{(A_{\mathfrak{p}} \otimes_A A)}_{\simeq A_{\mathfrak{p}}}^{\oplus r} \oplus \bigoplus_{\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(A)} \bigoplus_{n \geq 0} (A_{\mathfrak{p}} \otimes_A A/\mathfrak{q}^n)^{\oplus \alpha_{\mathfrak{q},n}(M)}$$

$\alpha \otimes a \mapsto \alpha a$

$$A_{\mathfrak{p}} \otimes_A (A/\mathfrak{q}^n) = A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{q}^n A_{\mathfrak{p}}$$

$$M \otimes_A A/I \simeq M/IM$$

Ecrire
$\mathfrak{p} = Ap$
$\mathfrak{q} = Aq \quad \mathfrak{q}^n = Aq^n$

- Si $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$ $\quad q \notin \mathfrak{p} \Rightarrow q^n \notin \mathfrak{p}$ ($\mathfrak{p}$ premier)
$\Rightarrow q^n \in (A_{\mathfrak{p}})^\times$
$\Rightarrow q^n A_{\mathfrak{p}} = A_{\mathfrak{p}}$.

$$A_{\mathfrak{p}} \otimes_A (A/\mathfrak{q}^n) = 0.$$

- Si $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^n A_{\mathfrak{p}} \\ A/\mathfrak{p}^n \arrow[ur, "\varphi"] & \end{tikzcd}$$

$\bar{a} \mapsto \overline{\frac{a}{1}}$

c'est un isomorphisme

$$A \longrightarrow A/\mathfrak{p}^n$$
$$a \longmapsto \bar{a}$$

or si $a \in A \setminus \mathfrak{p}$ $\quad \bar{a} \in (A/\mathfrak{p}^n)^\times$ car :

a premier avec p $\Longrightarrow$ a premier avec p^n

$\Longleftrightarrow \exists\, u, v \in A$ tq

$$ua + vp^n = 1$$

donc dans A/p^n

$$\bar{u}\bar{a} = \bar{1}$$

d'où une factorisation

$$\begin{array}{ccccc} & a \longmapsto \bar{a} & & & \\ A & \longrightarrow & A/\mathfrak{p}^n & & \\ \downarrow & \nearrow & \bar{b}^{-1}\bar{a} & \nwarrow & \\ A_\mathfrak{p} & \frac{a}{b} & \longrightarrow & & A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^n A_\mathfrak{p} \end{array}$$

et on a $\mathfrak{p}^n A_\mathfrak{p} \subset \ker (A_\mathfrak{p} \to A/\mathfrak{p}^n)$ d'où

Donc on a construit

$$\begin{array}{ccc} A/\mathfrak{p}^n & \longrightarrow & A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^n A_\mathfrak{p} \\ \bar{a} & \longmapsto & \overline{\left(\frac{a}{1}\right)} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^n A_\mathfrak{p} & \longrightarrow & A/\mathfrak{p}^n \\ \overline{b^{-1}a} & \longmapsto & \bar{b}^{-1}\bar{a} \end{array}$$

qui sont inverses l'une de l'autre

$$A_\mathfrak{p} \otimes_A \Big(\overbrace{A^{\oplus r} \oplus \bigoplus_{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(A)} \bigoplus_{n \geq 0} (A/\mathfrak{q}^n)^{\oplus \alpha_{\mathfrak{q},n}}}^{M} \Big) \simeq M_\mathfrak{p}$$

$$\simeq \underbrace{A_\mathfrak{p}^{\oplus r}} \oplus \bigoplus_{n \geq 0} \underbrace{(A/\mathfrak{p}^n)}^{\oplus \alpha_{\mathfrak{p},n}}$$

$\llcorner$ parne mon $\qquad M(\mathfrak{p})$ composante $\mathfrak{p}$-primaire de M "

② Déterminer $(A\setminus\{0\})^{-1} M = K \otimes_A M$

$$K = \mathrm{Frac}(A)$$

$$K \otimes_A \left(A^{\oplus r} \oplus \bigoplus_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)} \bigoplus_{n \geq 0} \left(A/\mathfrak{p}^n\right)^{\oplus \alpha_{p,n}(M)} \right)$$

$$\simeq \underbrace{(K \otimes_A A)^{\oplus r}}_{\cong K^{\oplus r}} \oplus \bigoplus_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)} \bigoplus_{n \geq 0} \left(K \otimes_A A/\mathfrak{p}^n\right)^{\oplus \alpha_{p,n}(M)}$$

$$K \otimes_A \left(A/\mathfrak{p}^n\right) = 0 \qquad \underset{= p^n p^{-n}}{1} \otimes_A \bar{1} = 0 = p^{-n} \otimes_A \overline{p^n} = 0 \; (\overline{p^n} = \bar{0})$$

$$\left(\alpha \otimes_A \bar{a} = \alpha a \otimes \bar{1} = (\alpha a) \cdot 1 \otimes \bar{1} \right)$$

$$\simeq K^{\oplus r}$$

$A = \mathbb{Z} \qquad 3 | 6 | 12 \qquad M = \mathbb{Z}/12 \oplus \mathbb{Z}/6 \oplus \mathbb{Z}/3$

$$\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \left(\mathbb{Z}/12 \oplus \mathbb{Z}/6 \oplus \mathbb{Z}/3 \right) = 0$$

$$\mathbb{Z}_{2\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \left(\text{———} \right) = \mathbb{Z}_{2\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \left(\mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \cancel{(\mathbb{Z}/3)^{\oplus 3}} \right)$$

$$\simeq \mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/2$$

$$\mathbb{Z}/12 \simeq \mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/3$$

$$\mathbb{Z}/6 \simeq \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/3$$

reste Chinois

$$\mathbb{Z}_{3\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \left(\text{———} \right) \simeq (\mathbb{Z}/3)^{\oplus 3}$$

$$\mathbb{Z}_{p\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \left(\text{———} \right) \simeq 0 \qquad p \neq 2,3$$

$\ulcorner \; \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M = 0$

$$M_{\mathfrak{p}} = \begin{cases} \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2 & \mathfrak{p} = 2\mathbb{Z} \\ (\mathbb{Z}_3)^{\oplus 3} & \mathfrak{p} = 3\mathbb{Z} \\ 0 & \mathfrak{p} \neq 2\mathbb{Z}, 3\mathbb{Z} \end{cases}$$

<u>Rem</u> : A anneau principal
M A-module de type fini
Si on connait $M_{\mathfrak{p}}$, $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ (<u>rem</u> : $\mathfrak{p} = \langle 0 \rangle$
$M_{\langle 0 \rangle} = (A \setminus \{0\})^{-1} M = K \otimes_A M$)

on connait M car

$$\left.\begin{array}{l} M_{\langle 0 \rangle} \simeq K^{\oplus r} \\ M_{\mathfrak{p}} \simeq A_{\mathfrak{p}}^{\oplus r} \oplus M(\mathfrak{p}) \end{array}\right\} \quad M \simeq A^{\oplus r} \oplus \bigoplus_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)} \underbrace{M_{\mathfrak{p}} / A_{\mathfrak{p}}^{\oplus r}}_{\substack{\wr\wr \\ M(\mathfrak{p})}}$$

<u>Propriété locale</u> : On dit qu'une propriété (P) d'un A-module est locale si
$\forall$ A-module M
M a la propriété $(P) \iff M_{\mathfrak{p}}$ a la propriété (P) $\forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$

<u>Exemple</u> : 1) $M = 0 \iff \forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ $M_{\mathfrak{p}} = 0$.
2) M A-plat $\iff \forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ $M_{\mathfrak{p}}$ $A_{\mathfrak{p}}$-plat

facile

2-1) Mq $\forall S \subset A \setminus \{0\}$ multiplicatif
$S^{-1}A$ A-module plat.
2-2) M, N A-modules, $\forall S \subset A \setminus \{0\}$ multiplicatif
on a isomorphisme canonique
$$S^{-1}M \otimes_{S^{-1}A} S^{-1}N \xrightarrow{\sim} S^{-1}(M \otimes_A N)$$

Produit tensoriel de A-algèbres :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi_B"] \arrow[d, "\varphi_C"'] & B \arrow[d, "i_B"] & b \mapsto 1\otimes b \\ C \arrow[r, "i_C"'] & C\otimes_A B & \end{tikzcd}$$

$C\otimes_A B$: A-module

$i_C : c \mapsto c\otimes 1$

2 A-algèbres. (commutatives)

$$\mu\big((c_1\otimes b_1)\otimes(c_2\otimes b_2)\big) = (c_1\otimes b_1)\cdot(c_2\otimes b_2) = (c_1c_2)\otimes(b_1b_2)$$

On peut munir $C\otimes_A B$ d'une structure de A-algèbre naturelle

$$\begin{tikzcd} \mu_B : B\times B \arrow[r] \arrow[d] & B \\ B\otimes_A B \arrow[ur, "\tilde\mu_B"'] & \end{tikzcd} \qquad (b_1,b_2)\mapsto b_1b_2$$

A-bilinéaire

de m. $$\begin{tikzcd} \mu_C : C\times C \arrow[r] \arrow[d] & C \\ C\otimes_A C \arrow[ur, "\tilde\mu_C"'] & \end{tikzcd}$$

A-bilinéaire

$$\begin{tikzcd} (C\otimes_A B)\otimes_A(C\otimes_A B) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\cong"] \arrow[dddd, bend right, "\mu"'] & B\otimes_A C \\ C\otimes_A(B\otimes_A C)\otimes_A B \arrow[d, phantom, "\cong"] & \\ C\otimes_A(C\otimes_A B)\otimes_A B \arrow[d, phantom, "\cong"] & \\ (C\otimes_A C)\otimes_A(B\otimes_A B) \arrow[uuur, "\tilde\mu_B\otimes\tilde\mu_C"'] & \\ & \end{tikzcd}$$

On vérifie que
$$C\otimes_A B \times C\otimes_A B \longrightarrow C\otimes_A B$$
$$(c_1\otimes b_1),(c_2\otimes b_2) \longmapsto \mu(c_1\otimes b_1\otimes c_2\otimes b_2) = (c_1c_2)\otimes(b_1b_2)$$

munit bien $C\otimes_A B$ d'une structure de A-algèbre (commutative)

On a la propriété universelle suivante : $\forall$ A-algèbre

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\psi_B"] \arrow[d, "\psi_C"'] & B \arrow[d, "i_B"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] \arrow[ddr, bend left, "\psi"] & \\
C \arrow[r, "i_C"'] \arrow[drr, bend right, "\varphi"'] & C \otimes_A B \arrow[dr, dashed, "\exists ! f"] & \\
 & & D
\end{tikzcd}
$$

$A \xrightarrow{\psi} D$

$\forall\ \varphi : B \to D$, $\psi : C \to D$ morphismes de A-algèbre.

$\exists !\ f : C \otimes_A D \to D$ morphisme de A-algèbres tq

$f \circ i_B = \psi$

$f \circ i_C = \varphi$

<u>Preuve</u> : exercice

$$f(c \otimes b) = f(\underbrace{c \otimes 1}_{i_C(c)})\, f(\underbrace{1 \otimes b}_{i_B(b)}) = \varphi(c)\psi(b)$$

$$c \otimes b = (c \otimes 1) \cdot (1 \otimes b)$$

<u>Exercices</u>

1) $I, J \subset A$ idéaux $\quad \boxed{A/I \otimes_A A/J \xrightarrow{\sim} A/I+J}$ isomorphisme de A-algèbre.

$$
\begin{tikzcd}
(a_1, a_2) \arrow[r, mapsto] & \overline{a_1 a_2} \\
A \times A \arrow[r] \arrow[d] & A/_{I+J} \\
A/_I \times A/_J \arrow[ur] \arrow[d] & (\bar{a}_1, \bar{a}_2) \mapsto \overline{a_1 a_2} \quad A\text{-bilinéaire} \\
A/_I \otimes_A A/_J \arrow[uur] & \bar{a}_1 \otimes \bar{a}_2 \mapsto \overline{a_1 a_2}
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d] & A/_I \otimes_A A/_J \\
a \arrow[r, mapsto] & \bar{a} \otimes_A \bar{1} = \bar{1} \otimes_A \bar{a} \\
A/_{I+J} \arrow[uur] \quad \bar{a} \arrow[ur, mapsto] &
\end{tikzcd}
$$

$a = \underset{\substack{\uparrow \\ I}}{\alpha} + \underset{\substack{\uparrow \\ J}}{\beta}$

$\overline{\alpha + \beta} \otimes_A 1 = \bar{\beta} \otimes_A 1$

$= 1 \otimes \underset{0}{\underset{\shortparallel}{\bar{\beta}}}$

$= 0$.

Ex : $\mathbb{Z}/_m \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/_n \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/\underbrace{m\mathbb{Z}+n\mathbb{Z}}_{m\wedge n\,\mathbb{Z}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/_{m\wedge n}$.

2) On a un isomorphisme canonique

$$A[X_1] \otimes_A A[X_2] \otimes_A \cdots \otimes_A A[X_r] \xrightarrow{\sim} A[X_1, \dots, X_r]$$

isomorphisme de A-algèbre.

3) $\varphi : A \longrightarrow B$ morphisme d'anneaux.

$P \in A[X]$.

$$B \otimes_A \left(A[X]/_{PA[X]} \right) \xrightarrow{\sim} B[X]/_{\varphi(P)B[X]}$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ A[X] \arrow[r, dashed, "\exists ! \varphi"'] & B[X] \end{tikzcd}$$

$$\sum_{n\geq 0} a_n X^n \longmapsto \sum_{n \geq 0} \varphi(a_n) X^n$$

$$\begin{array}{ccc} B \times A[X] & \longrightarrow & B[X]/_{\varphi(P)B[X]} \\ (b, Q) & \longmapsto & \overline{b\,\varphi(Q)} \\ \downarrow & & \\ B \times A[X]/_{PA[X]} & \nearrow \text{A-bilinéaire} & \\ \downarrow & \nearrow \text{morphisme de A-modules} & \\ B \otimes_A A[X]/_{PA[X]} & & \end{array}$$

$$B \longrightarrow B \otimes_A \left(A[X]/_{PA[X]} \right)$$
$$b \longmapsto b \otimes 1.$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \\ B[X] & X \longmapsto & 1\otimes \overline{X} \\ & \displaystyle\sum_{n\geq 0} b_n X^n \longmapsto & \displaystyle\sum_{n\geq 0} b_n \otimes \overline{X}^n \\ \downarrow & \nearrow & \\ B[X]/\varphi(P)B[X] & & \end{array}$$

et $\varphi(P)$ est dans le noyau x.

$$P = \sum_{n\geq 0} a_n X^n$$

$$\varphi(P) = \sum_{n\geq 0} \varphi(a_n) X^n$$

$$\downarrow$$

$$\sum_{n\geq 0} \underset{\substack{\parallel \\ a_n \cdot 1}}{\varphi(a_n)} \otimes_A \overline{X}^n$$

$$= \sum_{n\geq 0} 1 \otimes_A \overline{a_n X^n}$$

$$= 1 \otimes_A \overline{\sum_{n\geq 0} a_n X^n}$$

$$= 1 \otimes_A \overline{P} = 0.$$

$$B\otimes_A \left(A[X]/P \right) \xrightarrow{\sim} B[X]/\varphi(P)B[X]$$

<u>Exercice</u> : $\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}} \left(\mathbb{R}[X]/(X^2+1) \right)$

$$\cong$$

$$\mathbb{C}[X]/(X^2+1)\mathbb{C}[X]$$

$B = \mathbb{C}$

$A = \mathbb{R}$

$P = X^2+1$

$$X^2+1 = (X+i)(X-i) \quad \cong \longleftarrow \text{lemme chinois}$$

$$\mathbb{C}[X]/X+i \times \mathbb{C}[X]/X-i$$

$$\cong \qquad\qquad \cong$$

$$\mathbb{C} \quad\times\quad \mathbb{C}$$

$$\mathbb{Q}(i)\otimes \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}[X]/ \quad \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\sqrt{2})$$

$$B = \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \qquad A = \mathbb{Q} \qquad P = X^2+1$$

$$\downarrow 2$$

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2})[X] / (X^2+1)\mathbb{Q}(\sqrt{2})[X]$$

X^2+1 est encore irréductible dans $\mathbb{Q}(\sqrt{2})[X]$. Donc $\mathbb{Q}(i) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ est encore un corps extension de degré 2 de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$

(c'est $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$)

Groupe de Grothendieck

$$K(A) = \frac{A\text{-modules de type fini}/\simeq}{[M] = [M'] + [M'']}$$

$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ ex

A : anneau principal

projectif $\iff$ libre

$$\begin{array}{ccc} A\text{-modules de type fini}/\simeq & \xrightarrow{r} & \mathbb{Z} \\ M & \longmapsto & \mathrm{rang}(M) \\ \downarrow [A] & \nearrow 1 \;\; \nearrow \sim & \\ K(A) & & \end{array}$$

est un isomorphisme de groupes

$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$

$$0 \to K \otimes M' \to K \otimes M \to K \otimes M'' \to 0$$

$$\begin{array}{ccc} \wr & \wr & \wr \\ K^{\mathrm{rang}\, M'} & K^{\mathrm{rang}\, M} & K^{\mathrm{rang}\, M''} \end{array}$$

$$K^{\mathrm{rang}\, M} \simeq K^{\mathrm{rang}\, M'} \oplus K^{\mathrm{rang}\, M''}$$

$$\mathrm{rang}\, M = \mathrm{rang}\, M' + \mathrm{rang}\, M''$$

En particulier, si M est un A-module de type fini de torsion $[M] = 0$ ds $K(A)$

$$M \simeq \bigoplus_{i=1}^{n} A/d_i$$

$\mathrm{rang}([M'] + \varepsilon[M'']) = \mathrm{rang}[M'] + \mathrm{rang}[M'']$.

$0 \to A \xrightarrow{d} A \to A/d \to 0$

$[A] = [A] + [A/d]$

$[A/d] = [A] - [A] = 0$.

$$M = A^{\oplus r} \oplus \bigoplus_{i=1}^{n} A/d_i$$

$$\downarrow$$

$$[M] = [A^{\oplus r}] = r[A]$$

A : K corps

$\mathbb{Z}$

$K[X]$

anneau valuation discrète

$A = \underline{k[G]}$ $\quad$ G : groupe fini

k : corps.

$$\bigoplus_{g \in G} kg \qquad \sum_{g\in G} a_g g \cdot \sum_{g \in G} b_g g = \sum_{g\in G}\Big(\sum_{h \in G} a_h b_{h^{-1}g}\Big) g$$

$k[G]$-module de k-dimension finie

= représentations k-linéaire de G de dimension finie

V : $k[G]$-module.

$$\rightsquigarrow \quad \chi_V : G \to k, \quad g \mapsto \mathrm{tr}\big(g : V \to V,\ v \mapsto g\cdot v\big)$$

caractère de V

$0 \to V' \to V \to V'' \to 0$. sec de $k[G]$-module

$(g : V' \to V')$ $\quad$ $\chi_V(g) = \chi_{V'}(g) + \chi_{V''}(g)$

$$\begin{pmatrix} & \\ 0 & \boxed{g : V'' \to V'} \end{pmatrix} \qquad \chi_V(g) \quad \chi_{V'}(g) \quad \chi_{V''}(g)$$

$$K(k[G]) \longrightarrow k^G \quad \text{est injectif}$$
$$[V] \longmapsto \chi_V$$

$$\chi_{V \oplus V'} = \chi_V + \chi_{V'}$$
$$\chi_{V \otimes V'} = \chi_V \cdot \chi_{V'}$$

$$G \overset{\varphi}{\hookrightarrow} GL_n(\mathbb{C}) = GL(V) \qquad V \simeq \mathbb{C}^n$$

$$g \in G$$

$$\int \quad G \times V \longrightarrow V$$
$$(g, v) \longmapsto \varphi(g)(v)$$

$$\mathbb{C}[G] \times V \longrightarrow V$$
$$\Big(\sum_{g \in G} a_g g \times v \Big) \longmapsto \Big(\sum_{g \in G} a_g \varphi(g) \Big)(v)$$

$$A = \mathbb{C}[G]\text{-module} \longleftrightarrow \text{représentations linéaires de } G$$

$$V, , \longmapsto G \to GL(V)$$
$$g \longmapsto V \to V$$