Examen 2018/2019
MAT556 'Modules et groupes finis'
Anna Cadoret

Avertissement.

Sont autorisés: le polycopié du cours, les notes manuscrites du cours et des exercices traités en cours, les dictionnaires de langues papier.

Les réponses peuvent être rédigées en français ou *en anglais*. Les r ´ponges doivent être soigneusement justifiées.

Attention: La question (3) de l'Exercice 3 utilise la notion de puissance alternée introduite dans l'Exercice 1 (notamment *via* la question (6)). La question est cependant formulée de sorte que vous pouvez y répondre même si vous n'avez pas traiter l'Exercice 1.

Si G est un groupe fini et p un nombre premier, on note $\mathcal{S}_p(G)$ l'ensemble des p-Sylow de G et $N_p(G) := |\mathcal{S}_p(G)|$.

Exercice 1 (Puissances extérieures)

Soit A un anneau commutatif unitaire et M, N des A-modules. Pour tout entier $r \geq 1$, une application $f : M^r \to N$ est dite A-r-multilinéaire alternée si elle est A-r-multilinéaire et si $f(m_1, \dots, m_r) = 0$ dès que $m_i = m_j$ pour un couple $1 \leq i \neq j \leq r$.

(1) Montrer qu'il existe un A-module Λ muni d'une application A-r-multilinéaire alternée $p : M^r \to \Lambda$ tels que pour toute application $f : M^r \to N$ A-r-multilinéaire alternée $f : M^r \to N$ il existe un unique morphisme de A-modules $\tilde{f} : \Lambda \to N$ tel que $f = \tilde{f} \circ p$. On pourra observer que si $p : M^r \to \Lambda$ existe il se factorise *via* un morphisme de A-modules $M^{\otimes r} := M \otimes_A \cdots \otimes_A M \to \Lambda$

$$\begin{tikzcd} M^r \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\pi"'] & \Lambda \\ M^{\otimes r} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

où $\pi : M^r \to M^{\otimes r}$ est l'application r-A-multlinéaire universelle définissant le produit tensoriel. Montrer que Λ est engendré comme A-modules par les $m_1 \wedge \cdots \wedge m_r := p(m_1, \dots, m_r)$. On note $\Lambda := \bigwedge^r M$ et on dit que $p : M^r \to \bigwedge^r M$ est la r-ième puissance extérieure de M.

(2) Montrer que si $f : M \to N$ est un morphisme de A-modules il existe un unique morphisme de A-modules $\wedge^r f : \bigwedge^r M \to \bigwedge^r N$ tel que $f(m_1 \wedge \cdots \wedge m_r) = f(m_1) \wedge \cdots \wedge f(m_r)$. Montrer que si $f : M \to N$, $g : N \to P$ sont des morphismes de A-modules, $\wedge^r(g \circ f) = \wedge^r(g) \circ \wedge^r(f)$.

(3) Montrer que pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_r$ on a $m_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge m_{\sigma(r)} = \epsilon(\sigma) m_1 \wedge \cdots \wedge m_r$ (où $\epsilon : \mathcal{S}_r \to \{\pm 1\}$ est le morphisme signature).

Supposons maintenant que $A = k$ est un corps. Soit M un k-espace vectoriel de dimension finie r et $\mu_1, \dots, \mu_r$ une k-base de M.

(4) Montrer que $\bigwedge^n M = 0$ pour $n > r$. Si $n \leq r$, montrer que $\bigwedge^r M$ est un k-espace vectoriel de base $\mu_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mu_{i_n}$, $1 \leq i_1 < \cdots < i_n \leq r$ (donc que la k-dimension de $\bigwedge^r M$ est $\binom{r}{n}$). On pourra considérer l'application

$$M^n \to M^{\otimes n},\ (m_1, \cdots, m_n) \to \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\sigma) m_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes m_{\sigma(n)}$$

et montrer qu'elle se factorise en un morphisme injectif de k-espaces vectoriels $\bigwedge^n M \hookrightarrow M^{\otimes n}$.

(5) Soit G un groupe fini et M un $k[G]$-module. On dispose donc d'automorphismes $g\cdot : V \tilde{\to} V$, $g \in G$. Montrer que $G \to GL(\bigwedge^n M)$, $g \to \wedge^n(g\cdot)$ est un morphisme de groupes (autrement dit, $\bigwedge^n M$ est naturellement un $k[G]$-module pour la structure $g \cdot (m_1 \wedge \cdots \wedge m_n) = (g \cdot m_1) \wedge \cdots \wedge (g \cdot m_n)$). Supposons $n = 2$. Notons χ_M le caractère de M et χ celui de $\bigwedge^2 M$. Montrer que

$$2\chi(g) = \chi_M(g)^2 - \chi_M(g^2).$$

Exercice 2 (Groupe simple d'ordre 180**)**

On veut montrer qu'il n'existe pas de groupe simple d'ordre 180. Supposons l'inverse. Soit donc G un groupe simple d'ordre 180.

(1) (a) Montrer que dans un groupe fini tout sous-groupe d'indice 2 est normal.

(b) En faisant agir G par conjugaison sur ses 5-Sylow, montrer que $N_5(G) \neq 6$.

(c) Montrer que $N_5(G) = 36$.

(2) Montrer que $N_3(G) = 10$.

(3) Montrer qu'un groupe d'ordre 9 est abélien et qu'un groupe d'ordre 18 admet un unique 3-Sylow.

(4) Soit $S \neq S' \in \mathcal{S}_3(G)$. En considérant les ordres possibles pour le centralisateur d'un élément $g \in S \cap S'$, montrer que $g = 1$.

(5) Conclure.

Exercice 3 (Table des caractères de $\mathcal{A}_5$)

On note $\mathcal{S}_5$ le groupe symétrique d'ordre 120 et $\mathcal{A}_5 \subset \mathcal{S}_5$ le groupe alterné *i.e.* le noyau du morphisme signature $\epsilon : \mathcal{S}_5 \to \pm 1$. On se fixe une transposition $\tau \in \mathcal{S}_5$ et un 5-cycle $c \in \mathcal{S}_5$.

(1) Donner le nombre de classes de conjugaison de $\mathcal{S}_5$ et pour chaque classe de conjugaison, donner le cardinal de la classe et un représentant.

(2) Soit $V := \oplus_{1 \leq i \leq r} \mathbb{C} e_i$ muni de l'action naturelle de $\mathcal{S}_5$ par permutation *i.e.* $\sigma e_i = e_{\sigma(i)}$, $i = 1, \ldots, 5$, $\sigma \in \mathcal{S}_5$. Vérifier que l'hyperplan $W \equiv x_1 + \cdots + x_5 = 0 \subset V$ est un sous $\mathbb{C}[\mathcal{S}_5]$-module. Calculer les caractères χ_V de V et χ_W de W. Montrer que la restriction $W|_{\mathcal{A}_5}$ de W à $\mathbb{C}[\mathcal{A}_5]$ est simple.

(3) On note χ_Λ le caractère du $\mathbb{C}[\mathcal{S}_5]$-module $\Lambda := \bigwedge^2 W$ (*cf.* Exercice 1, (5)). En utilisant que pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_5$,

$$\chi_\Lambda(\sigma) = \frac{\chi_W(\sigma)^2 - \chi_W(\sigma^2)}{2}.$$

montrer que Λ est un $\mathbb{C}[\mathcal{S}_5]$-module simple.

(4) Montrer que $\Lambda|_{\mathcal{A}_5} = \Lambda' \oplus \Lambda''$ pour Λ', Λ'' deux $\mathbb{C}[\mathcal{A}_5]$-modules simples non-isomorphes et que $\chi_{\Lambda''} = \chi_{\Lambda'}(\tau - \tau)$.

(5) On fait opérer $\mathcal{S}_5$ par conjugaison sur l'ensemble $C_{(5)}$ de ses 5-cycles. Montrer que le stabilisateur de c sous $\mathcal{S}_5$ est le groupe cyclique $\langle c \rangle$ engendré par c. En déduire que $C_{(5)}$ est la réunion disjointe de deux classes de conjugaison $C_{(5),1}$, $C_{(5),2}$ de $\mathcal{A}_5$ de représentants respectifs c et $\tau c \tau$. Montrer que c et c^2 ne sont pas conjugués dans $\mathcal{A}_5$ mais que c et c^{-1} le sont.

(6) En déduire le nombre de classes de conjugaison de $\mathcal{A}_5$ et, pour chaque classe de conjugaison, donner le cardinal de la classe et un représentant.

(7) Déterminer le nombre et la dimension des $\mathbb{C}[\mathcal{A}_5]$-modules simples.

(8) Tracer la table des caractères de $\mathcal{A}_5$.

(9) Soit G un groupe fini et $\chi \in \widehat{G}$. Montrer que $\ker(\chi) := \{\sigma \in G \mid \chi(\sigma) = \chi(1)\} \subset G$ est un sous-groupe normal de G puis que tout sous-groupe normal de G est de la forme $\cap_{\chi \in A} \ker(\chi)$ pour un certain sous-ensemble $A \subset \widehat{G}$. En utilisant la table des caractères, justifier que $\mathcal{A}_5$ est simple.

anna.cadoret@imj-prg.fr
IMJ-PRG- Sorbonne Université.