Examen 2018/2019 - Correction
MAT556 'Modules et groupes finis'
Anna Cadoret

Exercice 1 (Puissances extérieures)

(1) Si $p : M^r \to \Lambda$ existe, par propriété universelle du produit tensoriel, il existe un unique morphisme de A-module $\hat{p} : M^{\otimes r} \to \Lambda$ tel que $\hat{p}(m_1 \otimes \cdots \otimes m_r) = p(m_1, \cdots, m_r)$. De plus, par la définition de alternée, les éléments de la forme $m_1 \otimes \cdots \otimes m_r$ tels que $m_i = m_j$ pour un couple $1 \leq i \neq j \leq r$ sont dans le noyau de $\hat{p} : M^{\otimes r} \to \Lambda$. Notons donc $S \subset M^{\otimes r}$ le sous-A-module engendré par les éléments de cette forme et posons

$$p : M^r \stackrel{\pi}{\to} M^{\otimes r} \stackrel{p_S}{\to} M^{\otimes r}/S =: \Lambda.$$

Puisqu'on sait que $M^{\otimes r}$ est engendré comme A-module par les $m_1 \otimes \cdots \otimes m_r$, Λ est engendré comme A-module par les $p_S(m_1 \otimes \cdots \otimes m_r) = p(m_1, \ldots, m_r) =: m_1 \wedge \cdots \wedge m_r$. En particulier, la condition $f = \tilde{f} \circ p$ impose $\tilde{f}(p_S(m_1 \otimes \cdots \otimes m_r)) = f(m_1, \ldots, m_r)$. Donc si $\tilde{f} : \Lambda \to N$ existe, il est unique. Il reste à montrer l'existence de $\tilde{f} : \Lambda \to N$. Mais par propriété universelle du produit tensoriel, il existe un unique morphisme de A-modules $\hat{f} : M^{\otimes r} \to N$ tel que $\hat{f} \circ \pi = f$ et par la définition de alternée, $S \subset \ker(\hat{f})$ donc par propriété universelle du noyau, il existe un unique morphisme de A-modules $\tilde{f} : \Lambda = M^{\otimes r}/S \to N$ tel que $\tilde{f} \circ p_S = \hat{f}$ donc $\tilde{f} \circ p = \tilde{f} \circ p_S \circ \pi = \hat{f} \circ \pi = f$. Cela montre l'existence.

(2) Soit $f : M \to N$ un morphisme de A-modules. On vérifie immédiatement que l'application $\phi : M^r \stackrel{f^r}{\to} N^r \stackrel{p}{\to} \bigwedge^r N$ est r-A-multilinéaire alternée donc par la propriété universelle de (1), il existe un unique morphisme de A-modules $\wedge^r f : \bigwedge^r M \to \bigwedge^r N$ tel que $\wedge^r f(m_1 \wedge \cdots \wedge m_r) = f(m_1) \wedge \cdots \wedge f(m_r)$. Si $f : M \to N$, $g : N \to P$ sont des morphismes de A-modules, $\wedge^r(g \circ f) : \bigwedge^r M \to \bigwedge^r N$ et $\wedge^r(g) \circ \wedge^r(f) : \bigwedge^r M \to \bigwedge^r N$ sont deux morphismes de A-modules $\bigwedge^r M \to \bigwedge^r N$ tels que $m_1 \wedge \cdots \wedge m_r \to g \circ f(m_1) \wedge \cdots \wedge g \circ f(m_r)$ donc ils sont égaux.

(3) Puisque $\mathcal{S}_n$ est engendré par les transpositions, il suffit de montrer l'assertion pour les transpositions. Or si $\tau = (i, j) \in \mathcal{S}_n$ on a $m_1 \wedge \cdots \wedge (m_i + m_j) \wedge \cdots \wedge (m_i + m_j) \wedge \cdots \wedge m_r = 0$, où $m_i + m_j$ est placé en indice i et j. On conclut en utilisant la r-A-multilinéarité et le fait que $m_1 \wedge \cdots \wedge m_i \wedge \cdots \wedge m_i \wedge \cdots \wedge m_r = m_1 \wedge \cdots \wedge m_j \wedge \cdots \wedge m_j \wedge \cdots \wedge m_r = 0$.

(4) On sait déjà que $\bigwedge^r M$ est engendré comme k-espace vectoriel par les éléments de la forme $\mu_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mu_{i_n}$, $1 \leq i_1, \cdots, i_n \leq r$. De plus, comme pour toute transposition $\tau \in \mathcal{S}_n$ on a $\mu_{i_{\tau(1)}} \wedge \cdots \wedge \mu_{i_{\tau(n)}} = -\mu_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mu_{i_n}$, $\bigwedge^r M$ est en fait engendré comme k-espace vectoriel par les éléments de la forme $\mu_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mu_{i_n}$, $1 \leq i_1 < \cdots < i_n \leq r$. Si $n > r$, $\bigwedge^r M$ est donc trivial. Il reste à voir que si $n \leq r$, les $\mu_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mu_{i_n}$, $1 \leq i_1 < \cdots < i_n \leq r$ sont k-libres. Suivons l'indication et introduisons l'application

$$\phi : M^n \to M^{\otimes n},\ (m_1, \cdots, m_n) \to \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\sigma) m_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes m_{\sigma(n)},$$

qui est clairement r-k-multilinéaire. Elle est aussi alternée car si $m_i = m_j$, en notant $\tau = (i, j)$ on a

$$\begin{aligned} \phi(m_1, \ldots, m_n) &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n/\langle\tau\rangle} \epsilon(\sigma) m_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes m_{\sigma(n)} + \epsilon(\sigma\tau) m_{\sigma\tau(1)} \otimes \cdots \otimes m_{\sigma\tau(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n/\langle\tau\rangle} (\epsilon(\sigma) + \epsilon(\sigma\tau)) m_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes m_{\sigma(n)} = 0. \end{aligned}$$

Par propriété universelle de la $n$ième puissance extérieure on a donc un unique morphisme de k-espaces vectoriels $\tilde{\phi} : \bigwedge^n M \to M^{\otimes n}$ tel que $\phi(m_1 \wedge \cdots \wedge m_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\sigma) m_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes m_{\sigma(n)}$.

Vérifions que les images des $\mu_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mu_{i_n}$, $1 \le i_1 < \cdots < i_n \le r$ par $\tilde{\phi}$ sont k-libres. Soit
$$\sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_n \le r} a_{\underline{i}} \tilde{\phi}(\mu_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mu_{i_n}) = 0$$
une relation de dépendance linéaire. On a donc
$$0 = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_n \le r} a_{\underline{i}} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\sigma) \mu_{i_{\sigma(1)}} \otimes \cdots \otimes \mu_{i_{\sigma(n)}} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_n \le r} a_{\underline{i}} \epsilon(\sigma) \mu_{i_{\sigma(1)}} \otimes \cdots \otimes \mu_{i_{\sigma(n)}}.$$
Mais les $(i_{\sigma(1)}, \cdots, i_{\sigma(n)}$ pour $1 \le i_1 < \cdots < i_n \le r$, $\sigma \in \mathcal{S}_n$ sont tous distincts donc k-libres dans $M^{\otimes n}$.

(5) La première partie de l'assertion résulte de (2) puisque $\wedge^n((gh)\cdot) = \wedge^n((g\cdot) \circ (h\cdot)) = \wedge^n g \cdot \circ \wedge^n h\cdot$. Pour la seconde partie, pour $g \in G$, on note $(\Sigma_{i,j})_{1 \le i,j \le r} \in GL_r(k)$ la matrice de l'image de g dans $\mu_1, \ldots, \mu_r$, on a
$$g\mu_i \wedge g\mu_j = (\sum_{1 \le k \le r} \Sigma_{k,i} \mu_k) \wedge (\sum_{1 \le k \le r} \Sigma_{k,j} \mu_k)$$
donc le coefficient correspondant à $\mu_i \wedge \mu_j$ est $\Sigma_{i,i}\Sigma_{j,j} - \Sigma_{j,i}\Sigma_{i,j}$. Par ailleurs,
$$\begin{aligned} \chi_W(g)^2 - \chi_W(g^2) &= (\textstyle\sum_{1 \le i \le r} \Sigma_{i,i})^2 - \sum_{1 \le i \le r} \sum_{1 \le j \le r} \Sigma_{i,j}\Sigma_{j,i} \\ &= \textstyle\sum_{1 \le i \le r, 1 \le j \le r} (\Sigma_{i,i}\Sigma_{j,j} - \Sigma_{i,j}\Sigma_{j,i}) \\ &= 2 \textstyle\sum_{1 \le i < j \le r} (\Sigma_{i,i}\Sigma_{j,j} - \Sigma_{i,j}\Sigma_{j,i}). \end{aligned}$$

Exercice 2 (Groupe simple d'ordre 180**)**

$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$. Comme G est simple, pour tout premier $p||G|$, $N_p(G) > 1$.

(1) $N_5(G) > 1$, $N_5(G) \equiv 1[5]$, $N_5(G)|36$ donc $N_5(G) = 6$ ou $N_5(G) = 36$ sont les deux seules possibilités. Si $N_5(G) = 6$, l'action par conjugaison de G sur $\mathcal{S}_6(G)$ induirait un morphisme $\phi : G \to \mathcal{S}_6$ non trivial donc injectif puisque G est simple. Puisque $\mathcal{A}_6 \cap G \subset G$ est un sous-groupe normal, on doit avoir $\mathcal{A}_6 \cap G = 1$ ou G. Mais $\mathcal{A}_6 \cap G = 1$ n'est évidemment pas possible car cela forcerait $|G| \le 2$! Donc $G \subset \mathcal{A}_6$ est d'indice 2 donc normal[1], ce qui contredit la simplicité de $\mathcal{A}_6$.

(2) $N_3(G) > 1$, $N_3(G) \equiv 1[3]$, $N_3(G)|20$ donc $N_3(G) = 4$ ou $N_3(G) = 10$. Si $N_3(G) = 4$ l'action par conjugaison de G sur $\mathcal{S}_3(G)$ induirait un morphisme $\phi : G \to \mathcal{S}_4$ non trivial donc injectif puisque G est simple, ce qui n'est pas possible puisque $|G| = 180 < 24 = |\mathcal{S}_4|$. Donc on a forcément $N_3(G) = 10$.

(3) Soit H un groupe d'ordre $9 = 3^2$. C'est donc un 3-groupe. Or on sait que $Z(H) \neq 1$ et que $H/Z(H)$ est soit trivial, soit non cyclique. On a donc forcément H abélien. Soit maintenant H un groupe d'ordre $18 = 2 \cdot 3^2$. On a $N_3(H) \equiv 1[3]$, $N_3(H)|2$ donc forcément $N_3(H) = 1$.

(4) Soit $S \neq S' \in \mathcal{S}_3(G)$ et $g \in S \cap S'$. Notons $C_G(g) \subset G$ le centralisateur de g dans G. Puisque $g \in S \cap S'$ et S, S' sont abéliens, on a $S \neq S' \subset C_G(g)$ donc $9||C_G(g)|$ et $|C_G(g)| > 9$. Les seules possibilités pour $|C_G(g)|$ sont donc 18, 36, 45, 90, 180. $|C_G(g)| = 36, 45, 90$ impliquerait que G contient un sous-groupe strict d'indice $[G : C_G(g)] \le 5$. En faisant agir G par translation sur les classes à gauche de $C_G(g)$ on obtiendrait alors un morphisme $\phi : G \to \mathcal{S}(G/C_G(g))$non-trivial donc injectif puisque G est simple, ce qui contredirait $|\mathcal{S}(G/C_G(g))| \le 5! = 120$. Donc $|C_G(g)| = 18$ ou 180. Si $|C_G(g)| = 18$, $C_G(g)$ possède un unique 3-Sylow. Or S, S' sont des 3-Sylow de $C_G(g)$, ce qui contredit $S \neq S'$. Donc $|C_G(g)| = 180$ *i.e.* $g \in Z(G) = 1$.

(5) Montrons qu'il y a trop d'éléments. Les 5-Sylow sont d'ordre premier 5 donc si $S, S' \in \mathcal{S}_5(G)$, $S \cap S' = 1$. Cela nous donne $36 \times 4 = 144$ éléments d'ordre 5. Les 3-Sylow eux, nous donne $10 \times 8 = 80$ éléments d'ordre 3 ou 9. Cela fait trop d'éléments...

Exercice 3 (Table des caractères de $\mathcal{A}_5$**)**

[1] Si G est un groupe fini et $H \subset G$ un sous-groupe d'indice 2, on a pour tout $g \in G \setminus H$, $G = H \sqcup gH = H \sqcup Hg$ donc $Hg = gH$.

(1) On indexe les classes par le type de la décomposition en cycles à support disjoint. On a

Classe	Cardinal
$C_0 := C_{(1)(1)(1)(1)(1)}$	1
$C_\tau := C_{(2)(1)(1)(1)}$	$\binom{5}{2} = 10$
$C_{(2)(2)(1)}$	$5 \times 3 = 15$
$C_{(3)(1)(1)}$	$2\binom{5}{3} = 20$
$C_{(3)(2)}$	$2\binom{5}{3} = 20$
$C_{(4)(1)}$	$5 \times 3! = 30$
$C_c := C_{(5)}$	$4! = 24$

(2) On vérifie immédiatement que $W \subset V$ est un sous-$\mathbb{C}[\mathcal{S}_5]$-module et que $V = W \oplus \mathbb{I}$, où $\mathbb{I} = \mathbb{C}(e_1 + \cdots + e_5)$ est la représentation triviale. Pour $\sigma \in \mathcal{S}_5$, $\chi_V(\sigma)$ est le nombre de points fixes de σ et $\chi_W(\sigma) = \chi_V(\sigma) - 1$. Autrement dit

Classe	χ_W
C_0	4
C_τ	2
$C_{(2)(2)(1)}$	0
$C_{(3)(1)(1)}$	1
$C_{(3)(2)}$	-1
$C_{(4)(1)}$	0
$C_c := C_{(5)}$	-1

De plus $(\chi_W, \chi_W)_{\mathcal{A}_5} = \frac{1}{60}(16 + 20 + 24) = 1$ donc $W|_{\mathcal{A}_5}$ est bien un $\mathbb{C}[\mathcal{A}_5]$-module simple.

(3) En utilisant la formule on a $(\chi_\Lambda, \chi_\Lambda)_{\mathcal{S}_5} = \frac{1}{120}(6^2 + 15 \times (-2)^2 + 24 \times 1^2) = 1$ donc Λ est bien un $\mathbb{C}[\mathcal{S}_5]$-module simple.

(4) On a par contre $(\chi_\Lambda, \chi_\Lambda)_{\mathcal{A}_5} = \frac{1}{60}(6^2 + 15 \times (-2)^2 + 24 \times 1^2) = 2$ donc $\Lambda|_{\mathcal{A}_5}$ n'est pas un $\mathbb{C}[\mathcal{S}_5]$-module simple. Si on écrit $\Lambda|_{\mathcal{A}_5} = \oplus_{U \in \widehat{\mathcal{A}}_5} U^{\oplus n_U}$, on doit avoir $2 = (\chi_\Lambda, \chi_\Lambda)_{\mathcal{A}_5} = \sum_{U \in \widehat{\mathcal{A}}_5} n_U^2$. Donc la seule possibilité est $\Lambda|_{\mathcal{A}_5} = \Lambda' \oplus \Lambda''$ pour Λ', Λ'' deux $\mathbb{C}[\mathcal{A}_5]$-modules simples non-isomorphes. Mais comme Λ est un $\mathbb{C}[\mathcal{S}_5]$-module simple, le morphisme de $\mathbb{C}[\mathcal{S}_5]$-modules $\Lambda' \oplus \tau\Lambda' = \mathbb{C}[\mathcal{S}_5] \otimes_{\mathbb{C}[\mathcal{A}_5]} \Lambda' \to \Lambda$ adjoint de l'inclusion de $\mathbb{C}[\mathcal{A}_5]$-modules $\Lambda' \hookrightarrow \Lambda|_{\mathcal{A}_5}$ est surjectif donc $2dim(\Lambda') \geq dim(\Lambda)$. De même, $2dim(\Lambda'') \geq dim(\Lambda)$. D'où on déduit $dim(\Lambda') = dim(\Lambda'') = dim(\Lambda)/2$ et donc

$$\Lambda' \oplus \tau\Lambda' = \mathbb{C}[\mathcal{S}_5] \otimes_{\mathbb{C}[\mathcal{A}_5]} \Lambda' \tilde{\to} \Lambda.$$

(Autrement dit, Λ est l'induite de Λ' (ou Λ'') de $\mathcal{A}_5$ à $\mathcal{S}_5$). En particulier, $\chi_{\Lambda''}(\sigma) = \chi_{\Lambda'}(\tau\sigma\tau)$, $\sigma \in \mathcal{A}_5$.

(5) Par définition d'une classe de conjugaison, $\mathcal{S}_5$ agit transitivement sur $C_{(5)}$ donc le stabilisateur de c est de cardinal $|\mathcal{S}_5|/|C_{(5)}| = 120/24 = 5$. Comme il contient $\langle c \rangle$, qui est déjà de cardinal 5, c'est $\langle c \rangle$. On a toujours $Stab_{\mathcal{A}_5}(c) = Stab_{\mathcal{S}_5}(c) \cap \mathcal{A}_5$ donc $Stab_{\mathcal{A}_5}(c) = \langle c \rangle$ et la classe de conjugaison de C'_c de c dans $\mathcal{A}_5$ est donc de cardinal $60/5 = 12$. Soit $c' \in C_{(5)} \setminus C'_c$. Puisque $\mathcal{S}_5$ est engendré par τ et $\mathcal{A}_5$, on peut écrire $c' = \sigma\tau c\tau\sigma^{-1}$ avec $\sigma \in \mathcal{A}_5$ donc quitte à remplacer c' par $\sigma^{-1}c\sigma$, on peut supposer que $c' = \tau c\tau$. Prenons $c = (12345)$ donc $c^2 = (13524) = \sigma c\sigma^{-1}$ avec $\sigma = (2354) \notin \mathcal{A}_5$ donc en écrivant $\sigma = \gamma\tau$ pour un certain $\gamma \in \mathcal{A}_5$, on voit que c et c^2 ne sont pas conjugués dans $\mathcal{A}_5$. En appliquant cela à c^2, on en déduit que c^2 et $c^4 = c^{-1}$ ne sont pas conjugués dans $\mathcal{A}_5$ donc c^{-1} est nécessairement conjugué à c.

(6) On a donc 2 classes de conjugaison de 5-cycles $C'_c, C'_{\tau c\tau}$. On a vu en cours que les 3-cycles restent conjugués dans $\mathcal{A}_5$. Rappelons l'argument. Si γ, γ' sont deux 3-cycles, il existe $\sigma \in \mathcal{S}_5$ tel que $\gamma' = \sigma\gamma\sigma^{-1}$. Si $\sigma \in \mathcal{A}_5$, on a gagné, sinon, comme le support de γ' est de longueur 3, il existe une transposition θ à support disjoint de γ' et donc, pour laquelle $\gamma' = \theta\sigma\gamma(\theta\sigma)^{-1}$. On a la classe de conjugaison de l'identité, C_0. Enfin, les double transpositions restent également conjuguées dans $\mathcal{A}_5$. Si γ, γ' sont deux double transpositions, il existe $\sigma \in \mathcal{S}_5$ tel que $\gamma' = \sigma\gamma\sigma^{-1}$.Si $\sigma \in \mathcal{A}_5$, on a

gagné, sinon, en écrivant $\gamma' = \theta\theta'$ comme produit de deux transpositions à supports disjoints, on a encore $\gamma' = \theta\gamma\theta = \theta\sigma\gamma(\theta\sigma)^{-1}$. En conclusion:

Classe	Cardinal
C_0	1
$C_2 := C_{(2)(2)(1)}$	15
$C_3 := C_{(3)(1)(1)}$	20
C'_c	12
$C_{\tau c\tau}$	12

(7) On a déjà le module trivial de dimension 1, le module W de dimension 4 et les modules Λ', Λ'', chacun de dimension 3. On doit avoir 5 modules en tout et, si d est la dimension du dernier, on doit avoir $60 = d^2 + 1 + 16 + 9 + 9$ donc $d = 5$.

(8) En utilisant que $\chi_3 = \chi_3(\tau - \tau)$, on dispose déjà des informations suivantes

	C_0	C_2	C_3	C_c	$C_{\tau c\tau}$
χ_1	1	1	1	1	1
$\chi_4 := \chi_W$	4	0	1	-1	-1
χ_5	5	a	b	c	d
$\chi_3 := \chi_\Lambda$	3	x	y	z	t
$\chi'_3 := \chi_{\Lambda'} = \chi_3(\tau - \tau)$	3	x	y	t	z

Par ailleurs, on connait χ_4 et on sait que $\chi_4(\sigma)^2 - \chi_4(\sigma^2) = 2(\chi_3 + \chi_3(\tau - \tau))$. On en déduit

$$0 - 4 = 2x, 1 - 1 = 2y, 1 + 1 = 2(t + z)$$

donc en particulier $x = -1$, $y = 0$, $t + z = 1$. L'orthogonalité entre les colonnes C_0 et C_2 donne $1 + 5a - 6 = 0$ donc $a = 1$. L'orthogonalité entre les colonnes C_0 et C_3 donne $1 + 4 + 5b = 0$ donc $b = -1$. A ce stade, on a

	C_0	C_2	C_3	C_c	$C_{\tau c\tau}$
χ_1	1	1	1	1	1
$\chi_4 := \chi_W$	4	0	1	-1	-1
χ_5	5	1	-1	c	d
$\chi_3 := \chi_\Lambda$	3	-1	0	$1 - t$	t
$\chi'_3 := \chi_{\Lambda'} = \chi_3(\tau - \tau)$	3	-1	0	t	$1 - t$

L'orthogonalité entre les lignes C_0, C_c donne $0 = 1 - 4 + 5c + 3$ donc $c = 0$. De même, $d = 0$. Enfin, l'orthogonalité entre les colonnes C_c, C_c donne $1 + 1 + (1 - t)^2 + t^2 = 5$ donc $t = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

(9) La première partie de la question est l'exercice 3.2.5 du cours, à la correction duquel on renvoie. On voit directement sur la table des caractères de $\mathcal{A}_5$ que pour tout $\chi_1 \neq \chi \in \widehat{\mathcal{A}}_5$, $\ker(\chi) = 1$.

anna.cadoret@imj-prg.fr
IMJ-PRG- Sorbonne Université.