Examen 2023/2024
4M003 - Algèbre commutative
Anna Cadoret

Durée: 3:00

Avertissement.

Sont autorisés: le polycopié du cours, les notes manuscrites du cours, les dictionnaires de langues papier. Tous les autres documents sont interdits, notamment les corrigés polycopiés et manuscrits des travaux dirigés et des annales des années antérieures.

Les réponses peuvent être rédigées en français ou en anglais. Prenez le temps de *justifier soigneusement* vos réponses. Vous pouvez bien sûr admettre certaines questions.

Sauf mention explicite du contraire, tous les anneaux sont commutatifs.

Exercice 1. Soit A un anneau et M un A-module de type fini. On dit qu'une famille génératrice $m_1, \ldots, m_r \in M$ de M comme A-module est minimale si pour tout $i = 1, \ldots, r$, $\sum_{1 \leq j \neq i \leq r} Am_j \subsetneq M$.

(1) Soit I un idéal de A. Montrer que si $M = IM$ alors il existe $a \in I$ tel que $(1 + a)M = 0$.

(2) Soit I un idéal de A contenu dans le radical de Jacobson J_A de A (on rappelle que J_A est l'intersection des idéaux maximaux de A). Montrer que si $M = IM$ alors $M = 0$.

(3) Dans cette question, on suppose de plus que A est local *i.e.* ne possède qu'un seul idéal maximal. Montrer que toutes les familles génératrices minimales de M comme A-module ont même cardinal.

(4) Montrer que A est local si et seulement si pour tout A-module N de type fini, toutes les familles génératrices minimales de N comme A-module ont même cardinal.

Exercice 2.

(1) Soit A un anneau principal

(a) Soit $a, b \in A$ tels que $a|b$.

(i) Montrer qu'on a un isomorphisme canonique de A-modules $A/a \tilde{\to} \mathrm{Hom}_A(A/b, A/a)$.

(ii) Montrer qu'on a un isomorphisme canonique de A-modules $\mathrm{Hom}_A(A/a, A/b) \tilde{\to} A/a$.

(b) Soit M un A-module de torsion et de type fini.

(i) On dit que M est cyclique s'il existe $m \in M$ tel que $M = Am$. Montrer que M est cyclique si et seulement si la suite de ses facteurs invariants est de longueur 1.

(ii) Calculer les facteurs invariants de $\mathrm{End}_A(M)$ en fonction de ceux de M.

(iii) Montrer qu'il existe une décomposition en somme directe de A-modules $\mathrm{End}_A(M) \simeq M \oplus M'$ et que $\mathrm{End}_A(M) \simeq M$ ssi M est cyclique.

(2) Soit k un corps et V un k-espace vectoriel de dimension finie. On rappelle que (c'est la propriété universelle de $k[T]$) tout $u \in \mathrm{End}_k(V)$ munit V d'une structure de $k[T]$-module V_u définie par $P(T) \cdot v = P(u)(v)$, $v \in V$, $P \in k[T]$. Pour tout $u \in \mathrm{End}_k(V)$ on note $C(u) := \{f \in \mathrm{End}_k(V) \mid fu = uf\} \subset \mathrm{End}_k(V)$ le commutant de u.

(a) Montrer que $C(u) = \mathrm{End}_{k[T]}(V_u)$.

(b) Montrer que $dim_k(C(u)) \geq dim_k(V)$ et $dim_k(C(u)) = dim_k(V)$ si et seulement si V_u est cyclique.

(c) Calculer $dim_k(C(u))$ en fonction du degré et du nombre de facteurs invariants de V_u.

(d) Supposons $dim_k(V) = 2n$ et soit $u \in End_k(V)$ dont la matrice dans une k-base de V est de la forme

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

où A, B sont deux matrices de taille $n \times n$ de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * & * \\ 0 & 2 & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & \cdots & n-1 & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$$

($i.e.$ triangulaire supérieure avec, sur la diagonale, $1, 2, 3, \cdots, n$). Calculer $dim_k(C(u))$ en fonction de n.

Exercice 3. Les questions (1) et (2) sont indépendantes. Soit A un anneau.

(1) On rappelle que si M est un A-module et $\mathfrak{p} \in \mathrm{spec}(A)$ un idéal premier, on note $M_\mathfrak{p}$ le localisé de M en la partie multiplicative $A \setminus \mathfrak{p}$. On définit le support $supp(M) \subset \mathrm{spec}(A)$ de M par

$$supp(M) := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{spec}(A) \mid M_\mathfrak{p} \neq 0\}$$

et l'idéal annulateur $Ann_A(M) \subset A$ par

$$Ann_A(M) := \{a \in A \mid aM = 0\}.$$

On note

$$V(Ann_A(M)) := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{spec}(A) \mid Ann_A(M) \subset \mathfrak{p}\}.$$

(a) Montrer que $supp(M) \subset V(Ann_A(M))$.

(b) Montrer que si M est un A-module de type fini, $supp(M) = V(Ann_A(M))$.

(c) Donner un contre-exemple à l'inclusion $supp(M) \supset V(Ann_A(M))$ lorsque M n'est pas de type fini.

(2) Soit M un A-module. On rappelle qu'on a vu en TD que pour toute suite exacte courte

$$0 \to N' \to N \to N'' \to 0$$

de A-modules la suite de A-modules

$$N' \otimes_A M \to N \otimes_A M \to N'' \otimes_A M \to 0$$

est encore exacte. On dit que M est plat si pour tout morphisme injectif de A-modules $u : N' \hookrightarrow N$, le morphisme $u \otimes Id : N' \otimes_A M \hookrightarrow N \otimes_A M$ est encore injectif (ou, de façon équivalente, si pour toute suite exacte courte de A-modules $0 \to N' \to N \to N'' \to 0$ la suite de A-modules

$$0 \to N' \otimes_A M \to N \otimes_A M \to N'' \otimes_A M \to 0$$

est encore exacte).

(a) Montrer qu'un A-module libre ($i.e.$ de la forme $A^{(I)}$) est plat.

(b) Montrer que tout A-module N s'insère dans une suite exacte courte de A-modules

$$0 \to K \to F \to N \to 0$$

où F est un A-module libre. On dit que $0 \to K \to F \to N \to 0$ est une présentation de N.

(c) Soit $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ une suite exacte courte de A-modules. On suppose M'' plat.

(i) Montrer que pour tout A-module N la suite de A-modules

$$0 \to M' \otimes_A N \to M \otimes_A N \to M'' \otimes_A N \to 0$$

est encore exacte (Ind: on pourra introduire une présentation de N et utiliser la question (2) (a).

(ii) Montrer que M est plat si et seulement si M' est plat.

anna.cadoret@imj-prg.fr
IMJ-PRG- Sorbonne Université.