FAISCEAUX LISSES ET ISOCRISTAUX: FINITUDE ET COMPAGNONS

GROUPE DE TRAVAIL D'APRÈS
T. ABE, T.ABE - H. ESNAUT, P. DELIGNE, V. DRINFELD, H. ESNAUT - M. KERZ, K.S. KEDLAYA, L. LAFFORGUE

1. Introduction

L'objectif de ce groupe de travail est d'étudier certains résultats de finitude et d'existence de compagnons pour les $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceaux lisses en caractéristique positive. Le point de départ est une conjecture de Deligne [D80, Conj. 1.2.10], démontrée (sauf pour les aspects p-adiques) dans le cas des courbes par L. Lafforgue, comme conséquence de la correspondance de Langlands pour GL_r [L02].

Soit $\mathbb{F}_q$ un corps fini de caractéristique p, $\mathbb{F}$ une clôture algébrique de $\mathbb{F}_q$ et ℓ un nombre premier distinct de p. Soit X_0 un schéma normal, de type fini et geometriquement connexe sur $\mathbb{F}_q$. On note $X := X_0 \times_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}$ et $|X_0|$ l'ensemble des points fermés de X_0. On note également $||X_0||$ l'ensemble des morphismes $\mathrm{spec}(F) \to X_0$, où F est une extension finie de $\mathbb{F}_q$. On notera que $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ agit sur $||X_0||$ par $n \cdot \mathrm{spec}(F) \to X_0 = \mathrm{spec}(F_n) \to \mathrm{spec}(F) \to X_0$, où F_n est l'unique extension de degré n de F. On a des applications canoniques $|X_0| \hookrightarrow ||X_0||$ et $||X_0|| \to |X_0|$.

Pour un entier $r \geq 1$, on notera

- $\mathcal{L}_{\ell,r}(X_0)$ (resp. $\mathcal{W}_{\ell,r}(X_0)$) la catégorie des $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceaux (resp. de Weil) lisses de rang r modulo isomorphisme et semisimplification sur X_0; $\mathcal{L}_{\ell,r}(X_0)$ est une sous-catégorie pleine de $\mathcal{W}_{\ell,r}(X_0)$;
- $P_r \simeq \mathbb{G}_m^r/\mathcal{S}_r$ le schéma des polynômes de degré r à racines $\neq 0$. $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ agit sur P_r par élévation à la puissance n des racines;
- $L_{\ell,r}(X_0)$ l'ensemble des applications $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-equivariantes $||X_0|| \to P_r(\overline{\mathbb{Z}}_\ell)$.

On a un plongement canonique (Cebotarev) $\mathcal{L}_{\ell,r}(X_0) \hookrightarrow L_{\ell,r}(X_0)$ qui à $\mathcal{F}$ associe l'application

$$|X_0| \hookrightarrow ||X_0|| \to P_r(\overline{\mathbb{Z}}_\ell),\ x \mapsto \chi_{x_0}^{\mathcal{F}},$$

où $\chi_{x_0}^{\mathcal{F}} := \det(TId - F_{x_0}, \mathcal{F}_x) \in \overline{\mathbb{Q}}_\ell[T]$ est le polynôme caractéristique du Frobenius géométrique en x_0 (et x un point géométrique quelconque au-dessus de x_0).

1.1. **Finitude faible et compagnons.** Rappelons d'abord l'énoncé de la conjecture de Deligne, dans Weil II. Soit $\mathcal{F} \in \mathcal{L}_{\ell,r}(X_0)$.

1.1.1. **Conjecture** (Deligne, [D80, Conj. 1.2.10]) *Supposons $\mathcal{F}$ irréductible et de déterminant fini. Alors,*
- *(1.1.1.1) $\mathcal{F}$ est pur de poids 0.*
- *(1.1.1.2) Il existe un corps de nombres $E := E_{\mathcal{F}} \subset \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ tel que pour tout $x_0 \in |X|$, $\chi_{x_0} \in E[T]$.*
- *(1.1.1.3) Pour tout non-archimédienne λ' de E au dessus d'une place ℓ' de $\mathbb{Q}$*
  - *(1.1.1.3.1) Si $\ell' \neq p$, $\mathcal{F}$ admet un ℓ'-compagnon.*
  - *(1.1.1.3.2) Si $\ell' = p$, $\mathcal{F}$ admet un ℓ'-compagnon.*

Si $\ell' \neq p$, on appelle ℓ'-compagnon de $\mathcal{F}$ tout $\overline{\mathbb{Q}}_{\ell'}$-faisceau $\mathcal{F}'$ tel que pour tout $x_0 \in X_0$

$$\chi_{x_0}^{\mathcal{F}'} = \chi_{x_0}^{\mathcal{F}}.$$

De même, si $\ell' = p$, on appelle ℓ'-compagnon de $\mathcal{F}$ tout F-isocristal $(\mathcal{E}', \Phi)$ sur $\overline{\mathbb{Q}}_p$ tel que pour tout $x_0 \in X_0$

$$\det(TId - \Phi_{x_0}^{[k(x_0):\mathbb{F}_q]}, \mathcal{E}'_{x_0}) = \chi_{x_0}^{\mathcal{F}}).$$

La formalisation de la notion de compagnon cristallin est due à Crew [Cr92, Conj. 4.13].

Pour X_0 une courbe (1.1.1.1), (1.1.1.2), (1.1.1.3.1) ont été démontrés par L. Lafforgue [L02, Thm. VII.6] comme corollaire de la correspondance de Langlands ℓ-adique pour GL_r, qui fournit une bijection naturelle entre

(1) Objets irréductibles $\mathcal{F}$ de $\mathcal{W}_{\ell,r}(X_0)$ de determinant fini
(2) Représentations automorphes cuspidales π de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A})$ dont le caractère central est d'ordre fini et non ramifiées en dehors de ∂X_0, où $\mathbb{A}$ est l'anneau des adèles de la compactification lisse X_0^{cpt} de X_0 et ∂X_0 l'ensemble des places à l'infini.

caractérisée par l'égalité en chaque $x_0 \in |X_0|$ des facteurs locaux des fonctions L attachées à $\mathcal{F}$ et π. (1.1.1.3.2) a été démontré par Abe [A13, thm. 4.4.1], là aussi comme corollaire de la correspondance de Langlands crystalline pour GL_r [A13, Thm. 4.2.2]. La formulation de cette dernière est essentiellement la même que pour la correspondance ℓ-adique, la catégorie des F-isocristaux surconvergents remplaçant $\mathcal{W}_{\ell,r}(X_0)$ et la preuve d'Abe s'inspire de[1] celle de L. Lafforgue, la cohomologie rigide y jouant le rôle de la cohomologie ℓ-adique.

Lorsque X_0 est de dimension ≥ 2, la partie 'automorphe' de la correspondance de Langlands n'existe pas. On est donc conduit à tenter de réduire la Conjecture 1.1.1 en dimension ≥ 2 au cas de la dimension 1 par des méthodes géométriques.

Pour X_0 connexe, normal, (1.1.1.1) a été démontré par Deligne, corrigeant un argument de L. Lafforgue [D12, §1.5-1.9]. Le résultat principal de [D12] est l'extension de (1.1.1.2) à X_0 connexe, normal arbitraire; [D12] contient déjà plusieurs des idées qui conduiront à la version forte 1.2.1 de (1.1.1.2) lorsque X_0 est supposée lisse. Enfin, Drinfeld [Dr12] a montré que (1.1.1.2) impliquait (1.1.1.3.1) pour X_0 lisse, connexe; il semble que ce soit dans [Dr12] qu'apparaît le concept de 2-squelette, qui sera formalisée dans [EK12] et rendra plus naturelle la construction des espaces de modules de [D11], [EK12]. Le résultat principal de [Dr12] ([Dr12, Thm. 2.5]) peut s'interpréter comme un résultat de 'reconstruction' des éléments de $L_{\ell,r}(X_0)$ à partir de leur restriction aux courbes $C_0 \to X_0$ (c'est l'ensemble de ces restrictions qui constitue en gros le 2-squelette d'un élément de $L_{\ell,r}(X_0)$). Les preuves de [D12], [Dr12] reposent sur des variantes des théorèmes de Bertini et d'irréductibilité de Hilbert inspirées de Jouanolou, Wiesend, Kerz-Schmidt et, bien sûr, sur le résultat de L. Lafforgue. Pour (1.1.1.3.2), Abe et Esnault ont prouvé une variante du théorème de Bertini pour les F-isocristaux surconvergents [AE16, Thm. 0.3], dont ils déduisent que tout F-isocristal surconvergent est ι-mixte ([AE16, Thm. 2.6]). La preuve d'Abe-Esnault reposent sur un raffinement du critère de surjectivité tannakien et des arguments cohomologiques. Kedlaya montre que tout F-isocristal surconvergent est ι-mixte [Ke17, Thm. 4.1] par une méthode différente. Il en déduit ensuite, par un argument inspiré de Deligne dans [D80] (il utilise notamment un argument déquidistribution des traces de Frobenius), une variante du théorème de Bertini pour les F-isocristaux surconvergents [Ke17, Cor. 4.5]. Dans les deux cas - [AE16, Thm. 0.3] ou [Ke17, Cor. 4.5]) - permettent, *via* le théorème de reconstruction de Drinfeld, de prouver que tout F-isocristal surconvergent irréductible de déterminant fini admet un (unique) compagnon ℓ-adique [AE16, Thm. 4.2].

Par contre, on ne dispose pas pour l'instant de l'analogue cristallin du théorème de reconstruction de Drinfeld [Dr12, Thm. 2.5]; c'est là l'obstruction à montrer l'existence du compagnon cristallin en dimension ≥ 2. La méthode de Kedlaya permet d'aller un peu plus loin dans l'existence de companions p-adiques (*cf.* [Ke17, Thm. 1.4]).

Rem.: On peut aussi mentionner un premier résultat - [Sh16] - des énoncés ci-dessus dans le cadre des schémas arithmétiques.

L'une des conséquences frappantes de 1.1.1 est le théorème de ℓ-indépendance de Chin.

1.1.2. **Théorème** (Chin, [Ch04, Thm. 1.4]) *Soit $\mathcal{F}_\ell$, $\ell \neq p$ un système compatbles de faisceaux lisses, semisimples, et purs de poids w sur X_0. Notons G_ℓ la clôture de Zariski de l'image de la représentation $\pi_1(X_0) \to \mathrm{GL}(\mathcal{F}_{\ell,x})$. Alors il existe une extension finie E de $\mathbb{Q}$, un groupe réductif connexe scindé G sur*

[1] Mais nécessite de développer un formalisme élaboré - *cf.* **??**Rem. 3.5]Ked2

E et une représentation E-rationnelle $G \to \mathrm{GL}(V)$ tels que pour toute place $\lambda \not| p$ de E, $G_\ell^\circ \otimes E_\lambda \simeq G \otimes E_\lambda$ et, modulo cet isomorphisme, les représentations $\mathcal{F}_x \otimes E_\lambda$ et $V \otimes E_\lambda$ s'identifient.

Une forme faible de 1.1.2 avait été obtenue par Larsen-Pink [LaP95, Thm. 2.4], comme conséquence des la théorie des poids de Deligne et du fait qu'un groupe algébrique semisimple (connexe) sur un corps algébriquement clos de caractéristique 0 est déterminé à isomorphisme (non-canonique) près par la dimension de ses invariants tensoriels [LaP90]. Chin utilise que [L02, Thm. VII.6] s'obtient en fait en montrant que $\mathcal{F}$ est motivique *i.e.* apparait commme sous-quotient d'un twist de $\mathrm{H}^*(Y_{\overline{\eta}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ pour un certain schéma $Y \to X$ de type fini (Chtoukas). L'autre ingrédient [Ch04, Thm. 6.7], est que la classe d'isomorphisme d'un groupe réductif connexe scindé en caractéristique 0 est déterminée pas son anneau de représentations. Ces idées sont reprises dans [Dr16], où [Ch04, Thm. 6.7] est remplacé par une extension des résultats de [KaLV14]. Dans le cas où X_0 est une courbe, [Dr16] étend également ces résultats de ℓ-indépendance au cadre cristallin, en utilisant [A13].

1.2. **Finitude forte.** Fixons une compactification normale $X_0 \subset X_0^{cpt}$ et un diviseur de Cartier effectif D sur X_0^{cpt} à support dans $X_0^{cpt} \setminus X_0$. Notons $\mathcal{W}_{\ell,r}(X_0, D) \subset \mathcal{W}_{\ell,r}(X_0)$ la sous-catégorie des faisceaux à ramification sauvage bornée par D. On a alors

1.2.1. **Théorème** (Deligne, [EK12]) *Supposons X_0 lisse sur $\mathbb{F}_q$. Modulo twist par les éléments de $\mathcal{W}_{1,\ell}(\mathbb{F}_q)$, il n'y a qu'un nombre fini d'objets irréductibles dans $\mathcal{W}_{\ell,r}(X_0, D)$.*

Cet énoncé est en fait un cas particulier d'un énoncé plus général sur les 2-squelettes $\mathcal{V}_{\ell,r}(X_0, D)(\supset \mathcal{W}_{\ell,r}(X_0, D) \supset \mathcal{L}_{\ell,r}(X_0, D))$. Il renforce en particulier (1.1.1.2) lorsque X_0 est lisse mais n'en fournit pas une nouvelle preuve car les arguments de Deligne utilisent (1.1.1.2) *via*, notamment, (1.1.1.3.1), ce qui explique aussi la restriction au cas où X_0 est lisse. La stratégie consiste à construire un schéma $L_r(X_0, D)$ réduit de type fini sur $\mathbb{Q}$ dont les $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-points sont en bijection avec $\mathcal{V}_{\ell,r}(X_0, D)$ et dont les composantes irréductibles sont en bijections avec les uplets $\mathcal{L}_1, \dots \mathcal{L}_s$ d'objets irréductibles de $\mathcal{V}_{\ell,r}(X_0, D)$ tels que $\sum_i \mathrm{rank}(\mathcal{L}_i) = r$.

Le théorème 1.2.1 a été étendu par Esnault au cas où X_0 est normal [E16, Thm. 3.1].

Le Théorème 1.2.1 combiné au théorème d'existence de compagnons ℓ-adiques par Abe-Esnault / Kedlaya implique automatiquement la finitude des F-isocristaux surconvergents irréductibles de rang et ramification bornés [AE16, Cor. 4.3].

2. Proposition de plan pour les exposés

Les propositions pour la durée des exposés ne sont qu'indicatives.

Bloc 1: Introduction.

(1) [2:00] Présentation du programme du groupe de travail. On pourra reprendre en les détaillant les explications ci-dessus.

Bloc 2: Formalisme des $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceaux

L'objectif du bloc 2 est d'introduire les notations et définitions qui seront utilisées dans la suite du groupe de travail.

(1) [1:30] ([D80, 1.1]) $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceaux lisses et $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceaux de Weil lisses; lien avec les représentations du groupe fondamental et du groupe de Weil.

(2) [1:30] ([D80, 1.2-1.3]) poids; lien entre $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceaux étales et $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceaux de Weil (*cf.* aussi [D12, 0.4]).

(3) [2:00] ([S68], [LaP92]) compagnons ℓ-adiques, systèmes compatibles (on rappellera notamment l'uncité du compagnon ℓ-adique modulo semisimplification). (*e.g.* [S81a], [S81b]) Premières conséquences (échauffement 1.1.2): ℓ-indépendance du caractère formel des tores de Frobenius, du rang réductif et du groupe des composantes connexes de $G_{0,\ell}$.

Bloc 3: Conjectures de Weil et conséquences

Ce bloc ne peut être qu'en grande partie culturel; il s'agit de passer en revu les résultats de [D80, 3.4] et certaines de leurs conséquences.

(1) [2:00] Si $f : Y_0 \to X_0$ est un morphisme propre et lisse, les $\mathbb{Q}_\ell$-faisceaux $R^i f_* \mathbb{Q}_\ell$, $\ell \neq p$ forment un système compatible rationnel pur de poids i ([D80, 3.4.11])

(2) [2:00] Si $\mathcal{F}_\ell \in \mathcal{L}_{\ell,r}(X_0)$ est pur, G_ℓ est semisimple ([D80, 3.4.13 et 1.3.9]) et si, de plus, $\mathcal{F}_\ell$ fait partie d'un système compatible rationnel, les données suivantes sont indépendantes de ℓ:
- ([LaP95, Prop. 2.1]) La dimension de $\mathcal{F}_{\ell,x}^{G_\ell}$;
- ([LaP95, Prop. 2.2]) Le groupe des composantes connexes de G_ℓ;
- ([LaP95, Thm. 2.4]) $G_\ell^\circ \times_{\mathbb{Q}_\ell} \mathbb{C}$.

(3) [2x1:30] ([D80, II et §3.5]) L'objectif de cet exposé est d'énoncer et expliquer [D80, Thm. (3.5.3)], qui est utilisé dans [Ke17]

On essaiera de donner une esquisse de la preuve de (1) selon [D74] (en s'inspirant par exemple des nombreux surveys déjà existants). On détaillera les preuves de (2) (à l'exception de [LaP90] (qui intervient dans [LaP95, Thm. 2.4]), dont on se contentera d'énoncer le résultat principal) et, dans la mesure du possible, celles de (3).

Bloc 4: Sur la conjecture de Deligne (sauf (1.1.1.3.2)) en dimension ≥ 2.

Il s'agit d'expliquer comment généraliser des énoncés (1.1.1.1), (1.1.1.2), (1.1.1.3.1) à X_0 de dimension supérieure selon [D12] et [Dr12].

(1) [2:00] (1.1.1.1) On expliquera la preuve de [E16, Thm. 8.1] en prenant le temps de rappeler les énoncés des théorèmes d'irréductibilité de Hilbert et de Bertini et de donner des indications sur leur preuve. *Cf.* aussi [D12, §1.5-1.9].

(2) (1.1.1.2) Les références principales sont [D12] et [EK12].
   (a) [3:00, à répartir en 2 exposés] Version effective de (1.1.1.2) pour X_0 une courbe. [D12, Prop. 2.6 (Variante 2.13)], qui est en fait un corollaire presque immédiat de [D12, Prop. 2.5 (Variante 2.12)]; *cf.* aussi [EK12, Thm. 5.1]. Le point clef est de montrer que le corps de nombre E est engendré par les traces des Frobenii attachés aux points $x \in X_0(\mathbb{F}_{q^n})$ pour n plus petit qu'une constante $B(X_0, \mathcal{F}) := B(g_{X_0}, Ram(\mathcal{F}))$ ne dépendant que du genre de X_0 et de la ramification de $\mathcal{F}$. On suivra [EK12, §3-5] - plus détaillé - et [D12, §2]. On pourra consacrer la 1ère partie de l'exposé à la théorie de la ramification comme exposé dans [EK12, §3] ([EK12, §3] se place en dimension quelconque mais nous aurons besoin de ce cadre plus général pour la preuve de 1.2.1).

   (b) [2:00] Passage à X_0 de dimension ≥ 2 [D12, §3]. Le principe de la preuve consiste à montrer que par un point fermé x de grand degré sur X_0 il passe une courbe C_0^x dont la constante $B(C_0^x, \mathcal{F}|_{C_0^x})$ est suffisamment petite.

(3) [3:00, à répartir en 2 exposés] (1.1.1.3.1) La référence principale est [Dr12]. Drinfeld réduit (1.1.1.3.1) pour X_0 de dimension ≥ 2 au cas des courbes grâce au théorème suivant, intéressant en lui-même.

Théorème: ([Dr12, Thm. 2.5]) *Supposons X_0 lisse. Alors un élément $\mathcal{F} \in L_{\ell,r}(X_0)$ est dans $\mathcal{L}_{\ell,r}(X_0)$ si et seulement si*
- *(i) Pour toute courbe $\phi : C \to X_0$, $\phi^*\mathcal{F} \in \mathcal{L}_{\ell,r}(C)$*
- *(ii) Il existe un morphisme étale dominant $\pi : X_0' \to X_0$ tel que pour toute courbe lisse séparée $\phi : C \to X_0'$, $\phi^*\pi^*\mathcal{F} \in \mathcal{L}_{\ell,r}(C)$ est modérément ramifié à l'infini.*

Bloc 5: Le théorème de finitude fort (Deligne).

On suivra de près [EK12].

(1) [1:00] (optionnel) Le cas des structures de Hodge [D87]
(2) [2:00] Enoncer la version de 1.2.1 pour les 2-squelettes [EK12, Thm. 2.4]. Donner la stratégie de la preuve (notamment, énoncer [EK12, Thm. 7.1]) en introduisant les notations et faisant les rappels des exposés précédents (correspondant à [EK12, §3-5]) qui seront nécessaires à la preuve de [EK12, Thm. 7.1].
(3) [1:00] Construction de $L_r(X_0, D)$ pour X_0 une courbe [EK12, §6.2]
(4) [1:00] Construction de $L_r(X_0, D)$ pour X_0 de dimension ≥ 2 [EK12, §6.3]
(5) [1:00] Composantes connexes de $L_r(X_0, D)$; conclusions [EK12, §7]
(6) [1:00] Extension au cas où X_0 est normal [E16].

Bloc 6: ℓ-indépendance de la monodromie (Chin).

On suivra l'exposition de [Ch04]
(1) [1:00] ([Ch04, §1]) Enoncé des résultats; passage des courbes aux variétés de dimension supérieure
(2) [2:00] ([Ch04, §2-4]) Conséquences de la correspondance de Langlands [L02] pour les valeurs propres de Frobenius
(3) [2:00] ([Ch04, §5]) Tores de Frobenius
(4) [2:00] ([Ch04, §6], [Ch08]) Conclusion de la preuve
(5) [2:00] (optionnel) Généralisation [Dr16]

Bloc 7: Aspects p-adiques.

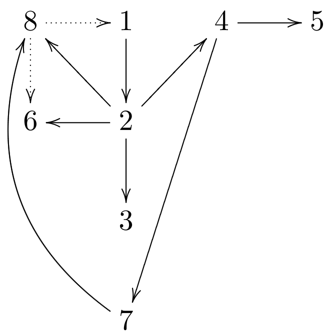
(1) [2x2:00] ([Ke16], [A13], [Cr92]) Introduction aux isocristaux. L'objectif de ces exposés est de définir la catégorie des F-isocristaux surconvergents et de passer en revue l'essentiel des propriétés utilisées dans [AE16] et [Ke17]. On suivra surtout [Ke16].
(2) [2x1:30] ([Ke17, §1-5])
(3) [2x1:30] ([AE16])
(4) [2:00] Analogue p-adique de Chin en utilisant Abe (Pal?)
(5) [2:00] (optionnel) [Ke17, §6-7]

Bloc 8: Aspects automorphes (L. Lafforgue, Abe)

Comme pour le Bloc 3, ces exposés ne peuvent être qu'en grande partie culturel. L'idée est de de présenter la structure générale des preuves de L. Lafforgue et Abe et les principaux ingrédients qui y interviennent.

(1) [2x2:00] ([L02]) Structure et ingredients de la preuve de la correspondance de Langlands ℓ-adique pour GL_r
(2) [2x1:30] ([A13]) Adaption de la preuve de L. Lafforgue au cadre rigide

3. Leitfaden



4. Prérequis

- Géométrie algébrique, cohomologie étale, groupe fondamental, catégories tannakiennes, notions de cohomologie cristalline.
- Théorie de Galois, groupes profinis, rudiments de théorie des représentations, notamment ℓ-adiques.
- Groupes algébriques (en caractéristique 0).

References

[A13] T. Abe, *Langlands correspondence for isocrystals and existence of crystalline companion for curves*, arXiv:1310.0528

[AE16] T. Abe and H. Esnault, *A Lefschetz theorem for overconvergent isocrystals with Frobenius structure*, arXiv:1607.07112

[Ch04] C.W. Chin, *Independence of monodromy groups*, J.A.M.S. **17**, 2004, p. 723–747.

[Ch08] C.W. Chin, *Determining a split connected reductive group from its irreducible representations*, Journal of Group Theory **11**, 2008, p. 799–812.

[Cr92] R. Crew, *F-isocrystals and their monodromy group*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. **25**, p.717–763, 1992.

[D74] P. Deligne, *La conjecture de Weil. I*, Publ. Math. IHÉS **43** (1974), 273-307.

[D80] P. Deligne, *La conjecture de Weil: II*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **52**, 1980, p. 137–252.

[D87] P. Deligne, *Un théorème de finitude pour la monodromie*, in *Discrete Groups in Geometry and Analysis*, Progress in Math. **67** 1987, p.1–19.

[D11] P. Deligne, *Letter to V. Drinfeld dated June 18, 2011*, 9 pages.

[D12] P. Deligne, *Finitude de l'extension de $\mathbb{Q}$ engendrée par des traces de Frobenius en caractéristique finie*, Volume dedicated to the memory of I. M. Gelfand, Moscow Math. J. **12**, 2012.

[Dr12] V. Drinfeld, *On a conjecture of Deligne*, Volume dedicated to the memory of I. M. Gelfand, Moscow Math. J. **12**, 2012.

[Dr16] V. Drinfeld, *On the pro-semisimple completion of the fundamental group of a smooth variety over a finite field*, Preprint 2016. Available as arXiv:1509.06059v5.

[E16] H. Esnault, *A remark on Deligne's finiteness theorem.* Int. Math. Res. Not., **00**, p. 1–9, 2016.

[E16] H. Esnault, *Survey on some aspects of Lefschetz theorems in algebraic geometry*, Preprint, 2016.

[EK12] H. Esnault et M. Kerz, *A finiteness theorem for Galois representations of function fields over finite fields (after Deligne)*, Acta Mathematica Vietnamica **37**, 2012, p. 531–562.

[KM74] N. Katz et W. Messing, *Some consequences of the Riemann hypothesis for varieties over finite fields*, Invent. Math. **23**, 1974, p. 73–77.

[KaLV14] D. Kazhdan, M. Larsen and Y. Varshavsky, *The Tannakian formalism and the Langlands conjectures.* Algebra Number Theory **8**, p. 243–256, 2014.

[Ke16] K.S. Kedlaya, *Notes on isocrystals.* Preprint, 2016.

[Ke17] K.S. Kedlaya, *Etale and crystalline companions.* Preprint, 2017.

[L02] L. Lafforgue, *Chtoucas de Drinfeld et correspondance de Langlands*, Invent. Math. **147**, 2002, p.1–241.

[LaP90] M. Larsen and R. Pink, *Determining representations from invariant dimensions*, Invent. Math. **102**, 1990, 377–398.

[LaP92] M. Larsen et R. Pink, *On ℓ-independence of algebraic monodromy groups in compatible systems of representations*, Inventiones Math. **107**, 1992, 603–636.

[LaP95] M. Larsen and R. Pink, *Abelian varieties, ℓ-adic representations, and ℓ-independence*, Math. Ann. **302**, 1995, p. 561–579.

[S68] J.P. Serre, *Abelian ℓ-adic representations and Elliptic curves*, W.A. Benjamin, 1968.

[S81a] J-P. Serre, *Letter to Ken Ribet (January, 1st, 1981)*, (1981).

[S81b] J-P. Serre, *Letter to Ken Ribet (January, 29th, 1981)*, (1981).

[Sh16] K. Shimizu, *Existence of compatible systems of lisse sheaves on arithmetic schemes.* Preprint, 2016.