Weil I

20-21/04/17

I. L'hypothèse de Riemann.

th. Soit $f_0 : X_0 \longrightarrow Y_0 \;/\mathbb{F}_q$ ~~projective~~ lisse.

Alors $\forall k$, $(R^k f_* \mathbb{Q}_\ell)_{\ell \neq p}$ forment un système compatible.

Si $y \in |Y|$, $(R^k f_* \mathbb{Q}_\ell)_y \underset{\uparrow}{=} H^k(X_y, \mathbb{Q}_\ell)$ donc le théorème est équivalent à :

cdb propre

« Soit $X_0/\mathbb{F}_q$ ~~projective~~ lisse. Alors les vp de $F^* \circlearrowright H^k(X, \mathbb{Q}_\ell)$, comptées avec multiplicité, ne dépendent pas de ℓ ».

Cet énoncé suit de :

th (Hypothèse de Riemann, Deligne) : les vp de $F^* \circlearrowright H^k(X, \mathbb{Q}_\ell)$ sont des nombres algébriques dont tous les conjugués complexes ont $|\cdot| = q^{k/2}$

Preuve :

$$\begin{tikzcd}
\prod_{x \in |X_0|} \left(1 - t^{\deg x}\right)^{-1} =: Z(X_0, t) \arrow[r, equal, "\text{formule des traces}"'] \arrow[d, "t \frac{d}{dt} \ln"] & \prod_k \det\left(1 - tF^* \mid H^k(X, \mathbb{Q}_\ell)\right)^{(-1)^{k+1}} \arrow[d, "t \frac{d}{dt} \ln"] \\
\sum_{n > 0} \# X_0(\mathbb{F}_{q^n})\, t^n & \sum_{n > 0} \sum_k (-1)^k \mathrm{Tr}\left(F^{n*} \mid H^k(X, \mathbb{Q}_\ell)\right) t^n
\end{tikzcd}$$

Ainsi $Z(X_0, t) \in \mathbb{Q}[[t]] \cap \mathbb{Q}_\ell(t) = \mathbb{Q}(t)$.

Par Riemann, il n'y a pas de simplification dans le produit de droite. Ainsi les vp de F^* sur $H^k(X, \mathbb{Q}_\ell)$ sont <u>exactement</u> les inverses des zéros ou pôles de $Z(X_0, t)$ dont les conjugués cx ont $|\cdot| = q^{-k/2}$.

II Réductions

① Qpsq X projective.

Par le lemme de Chow + altérations de de Jong, $\exists\, X'_0 \xrightarrow{\pi} X_0$, [propre surjectif génériquement fini]
et $H^k(X, \mathbb{Q}_\ell) \hookrightarrow H^k(X', \mathbb{Q}_\ell)$. proj. lisse

② On peut remplacer $\mathbb{F}_q$ par $\mathbb{F}_{q^n}$:

En effet, F est remplacé par $(F \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^n})^{\circ n}$, donc ses vp. sont élevés à la puissance n.

③ On peut supposer X géométriquement intègre, de dimension d (par ②).

④ On peut supposer $k \leq d$

$$H^k(X, \mathbb{Q}_\ell) \times H^{2d-k}(X, \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow H^{2d}(X, \mathbb{Q}_\ell) \simeq \mathbb{Q}_\ell(-d)$$

$\circlearrowleft F^*$ agit par $\deg(F) = q^d$.

Ainsi si (α_i) vp de F^* sur H^k, $\left(\frac{q^d}{\alpha_i}\right)$ vp de F^* sur H^{2d-k}.

⑤ Qpsq $k = d$.

Soit $\underset{\text{dim}=k}{Y_0} \subseteq X_0$ l'intersection de $d-k$ hyp. amples générales.

Alors $H^k(X, \mathbb{Q}_\ell) \hookrightarrow H^k(Y, \mathbb{Q}_\ell)$ par Lefschetz faible.

⑥ Il suffit de montrer : "si d pair, α vp de $F^* \circlearrowleft H^d$, alors α algébrique et ses conjugués cx de $q^{d/2 - 1/2} \leq |\alpha| \leq q^{d/2 + 1/2}$".

En effet, par Künneth, $H^d(X, \mathbb{Q}_\ell)^{\otimes 2k} \subseteq H^{2kd}(X^{2k}, \mathbb{Q}_\ell)$ donc α^{2k} vp de $F^* \circlearrowleft H^{2kd}(X^{2k})$. Ainsi $q^{kd - 1/2} \leq |\alpha|^{2k} \leq q^{kd + 1/2}$

$$\Big\downarrow k \to \infty$$

$$|\alpha| = q^{d/2}$$

III Pinceaux de Lefschetz

A Généralités.

$X_0/\mathbb{F}_q$ proj. lisse géométriquement intègre de dim d paire. Récurrence sur d ($d=0$ Ok).

On choisit un pinceau de Lefschetz sur X_0 : Soit H/X_0 assez ample, $F, G \in H^0(X_0, H)$ généraux tq $\{F=G=0\} \subseteq X_0$ lisse de codim. 2, avec éclaté $\tilde{X}_0 \longrightarrow X_0$, et tq $\tilde{X}_0 \xrightarrow{[F:G]=f} \mathbb{P}^1$ ait fibres lisses ou avec un unique point double ordinaire

$$u \in U_0 \overset{j}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^1 \ni p_1, \dots, p_k = \text{fibres singulières.}$$

lieu de lissité de f : U_0

- Par calcul de la cohomologie d'un éclaté, $H^k(X, \mathbb{Q}_\ell) \hookrightarrow H^k(\tilde{X}, \mathbb{Q}_\ell)$
- Par Leray, $E_2^{p,q} = H^p(\mathbb{P}^1, R^q f_* \mathbb{Q}_\ell) \Rightarrow H^{p+q}(\tilde{X}, \mathbb{Q}_\ell)$.

Il suffit donc d'obtenir les vp de F^* sur $E_2^{0,d}$, $E_2^{1,d-1}$ et $E_2^{2,d-2}$

(B) Etude locale ~~Les faisceaux $R^q f_* \mathbb{Q}_\ell$~~

$$p \in \mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{F}}_q), \qquad \begin{tikzcd} \tilde{X}_p \arrow[r, hook, "i"] & \tilde{X}_T \arrow[d] & \tilde{X}_{\bar\eta} \arrow[l, hook', "\bar{j}"'] \\ & T = \mathcal{O}^{sh}_{\mathbb{P}^1, p} & \end{tikzcd} \leftarrow \text{de point générique } \eta$$

Sur $\tilde{X}_p$, $\quad \mathbb{Q}_\ell \xrightarrow{sp} i^* R\bar{j}_* \mathbb{Q}_\ell \longrightarrow \Phi := \mathrm{Cone}(sp) \xrightarrow{+1}$

cohomo

$$\cdots \to H^k(\tilde{X}_p, \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow H^k(\tilde{X}_x, i^* R\bar{j}_* \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow H^k(\tilde{X}_p, \Phi) \to \cdots$$

$$\| \text{ chb propre}$$

$$H^k(\tilde{X}_T, R\bar{j}_* \mathbb{Q}_\ell)$$

$$\|$$

$$H^k(\tilde{X}_{\bar\eta}, \mathbb{Q}_\ell)$$

Le calcul de Φ (cycles évanescents) est local sur $\tilde{X}_p$.

- Si $x \in \tilde{X}_p$ est lisse, $\Phi_x = 0$ (chgt de base lisse).

Ainsi, si $p \in U$, $\Phi = 0$ et $H^k(\tilde{X}_p, \mathbb{Q}_\ell) \underset{sp}{\xrightarrow{\sim}} H^k(\tilde{X}_{\bar\eta}, \mathbb{Q}_\ell)$

donc $R^k f_* \mathbb{Q}_\ell$ localement constant sur U.

- Si $x \in \tilde{X}_{p_i}$ point double ordinaire, $\Phi_x = \mathbb{Q}_\ell(-\frac{d}{2})[-d+1]$ (calcul local).

Il vient : $0 \to H^{d-1}(\tilde{X}_p, \mathbb{Q}_\ell) \to H^{d-1}(\tilde{X}_{\bar\eta}, \mathbb{Q}_\ell) \xrightarrow{\partial} \mathbb{Q}_\ell(-\frac{d}{2}) \to H^d(\tilde{X}_p, \mathbb{Q}_\ell) \to H^d(\tilde{X}_{\bar\eta}, \mathbb{Q}_\ell) \to 0$

et $H^k(\tilde{X}_p, \mathbb{Q}_\ell) \xrightarrow{\sim} H^k(\tilde{X}_{\bar\eta}, \mathbb{Q}_\ell)$ autrement.

De plus $\partial(\alpha) = \alpha . \delta_i$ pour $\delta_i \in H^{d-1}(\tilde{X}_{\bar\eta}, \mathbb{Q}_\ell(\frac{d}{2} - 1))$ bien défini au signe près : le cycle évanescent.

Hypothèse [cas général, le plus difficile] : $\delta_i \neq 0$.

Alors $0 \to H^{d-1}(\tilde{X}_x, \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow H^{d-1}(\tilde{X}_{\bar{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell) \to \mathbb{Q}_\ell\left(-\frac{d}{2}\right) \to 0$

$$H^k(\tilde{X}_x, \mathbb{Q}_\ell) \xrightarrow{\sim} H^k(\tilde{X}_{\bar{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell) \text{ autrement.}$$

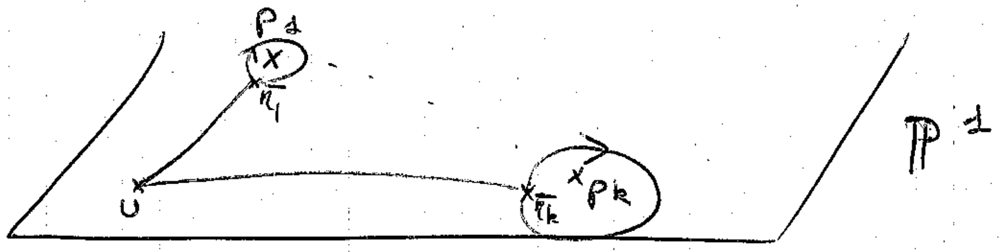
Ainsi, $R^{d-2}f_* \mathbb{Q}_\ell$ et $R^d f_* \mathbb{Q}_\ell$ sont localement constants sur $\mathbb{P}^1$, donc constants sur $\mathbb{P}^1$ simplement connexe.

- $$E_2^{0,d} = H^0(\mathbb{P}^1, R^d f_* \mathbb{Q}_\ell) \underset{\text{cott}}{=} H^d(X_U, \mathbb{Q}_\ell) \overset{\text{Lefschetz faible}}{\Uparrow} \underbrace{H^{d-2}(Y, \mathbb{Q}_\ell(-1))}_{\substack{\text{par HDR les vp de } F^* \text{ ici} \\ \text{sont algébriques avec } q^{d/2-1/2} \leq |\alpha| \leq q^{d/2+1/2}}}.$$

$Y \hookrightarrow X_U$ section hyperplane lisse (dim. $d-2$)

- $$E_2^{2,d-2} = H^2(\mathbb{P}^1, R^{d-2}f_* \mathbb{Q}_\ell) \underset{\text{cott + dualité}}{=} H^{d-2}(X_U, \mathbb{Q}_\ell(-1)) \overset{\text{Lefschetz faible}}{\longrightarrow} \underbrace{H^{d-2}(Y, \mathbb{Q}_\ell(-1))}_{\text{idem}}.$$

c) Cycles évanescents



$$\delta_i \in H^{d-1}\left(X_{\bar\eta_i}, \mathbb{Q}_\ell\left(\tfrac{d}{2}-1\right)\right) \underset{\text{choix}}{\simeq} H^{d-1}(X_u, \mathbb{Q}_\ell)$$

$$\circlearrowright$$

$$\sigma \in \mathrm{Gal}\left(\bar\eta_i/\eta_i\right) \xrightarrow{\mu_\ell} \mathbb{Z}_\ell(1)$$

<u>Picard-Lefschetz</u> : $\sigma(\alpha) = \alpha \underset{\text{dépend de } d}{\pm} \mu_\ell(\sigma)\, \underset{\text{cup-produit}}{(\alpha, \delta_i)}\, \delta_i$ $\Big\}$ transvections

En particulier $\pi_1(U,u) \circlearrowright H^{d-1}(X_u, \mathbb{Q}_\ell)$ est modérément ramifiée. Par spécialisation à $\mathbb{C}$, $\pi_1(U,u)^{\text{modéré}}$ est engendré par les ~~éléments ... classes~~ $\mathrm{Gal}(\bar\eta_i/\eta_i)$.
Ainsi, l'action de $\pi_1(U,u) \circlearrowright H^{d-1}(X_u)$ est engendrée par les ~~transvections~~ ci-dessus.

Soit $E := \langle \delta_i \rangle \subseteq H^{d-1}(X_u, \mathbb{Q}_\ell)$. E est stable sous la monodromie (sous $\pi_1(U,u)$) donc correspond à un système local $\mathcal{E} \hookrightarrow R^{d-1}f_*\mathbb{Q}_\ell$ sur U.
Car il est canonique, il est même stable sous $\pi_1(U_0, u)$, donc correspond à
$$\mathcal{E}_0 \hookrightarrow R^{d-1}f_*\mathbb{Q}_\ell \text{ sur } U_0$$

<u>Hypothèse</u> [conjecture de Lefschetz fort [SGA VII$_2$ 5.6.10] $\Leftarrow$ conj de Weil [Weil II, 4.1]] : $(\cdot,\cdot)$ est non dégénérée sur $\mathcal{E}$ | E.
sinon : dévisser $0 \to \mathcal{E}\cap\mathcal{E}^\perp \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}/(\mathcal{E}\cap\mathcal{E}^\perp) \to 0$

Alors $R^{d-1}f_*\mathbb{Q}_\ell|_U = \mathcal{E} \oplus \mathcal{E}^\perp$ — ici, action triviale de $\pi_1(U,u)$.

$$R^{d-1}f_*\mathbb{Q}_\ell = j_*\left(R^{d-1}f_*\mathbb{Q}_\ell|_U\right) = j_*\mathcal{E} \oplus \underbrace{j_*\mathcal{E}^\perp}_{\text{constant sur } \mathbb{P}^1}$$

$$E_1^{1,d-1} = H^1(\mathbb{P}^1, R^{d-1}f_*\mathbb{Q}_\ell) = H^1(\mathbb{P}^1, j_*\mathcal{E}).$$

IV. Etude du faisceau des cycles évanescents

$u \in U_0 \overset{j_0}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^1$ $\quad \mathcal{E}_0 / U_0$ le système local des cycles évanescents

- $\mathcal{E}_0 \otimes \mathcal{E}_0 \xrightarrow[\text{parfait}]{\text{cup } (\cdot,\cdot)} \mathbb{Q}_\ell(-d+1)$
- $\underset{\text{Picard-Lefschetz}}{\pi_1(U,u) \circlearrowright} \mathcal{E}_u = E = \langle \delta_1, \dots, \delta_k \rangle$
- Th : les δ_i sont conjugués sous $\pi_1(U,u)$.

But = vp de $F^* \circlearrowright H^1(\mathbb{P}^1, j_* \mathcal{E})$.

Etapes = (i) $\mathrm{Im}\left[\pi_1(U,u) \xrightarrow{\rho} Sp(E,(\cdot,\cdot))\right]$ est ouverte (pour la topologie l-adique)
[grosse monodromie] [Kazhdan-Margulis].

(ii) $\forall x \in |U_0|$, $\det(1 - F_x^* t, \mathcal{E})$ est à coefficients rationnels
[rationalité locale]

(iii) $\forall x \in |U_0|$, les vp de F_x^* sur $\mathcal{E}$ sont des nb algébriques
[valeurs propres locales]
dont les conjugués cx ont $|\cdot| = q_x^{d/2 - 1/2}$

(iv) les vp de $F^* \circlearrowright H^1(\mathbb{P}^1, j_* \mathcal{E})$ sont
$q^{d/2 - 1/2} \leq |\cdot| \leq q^{d/2 + 1/2}$.

Preuves = (i) théorie de Picard-Lefschetz

(ii) lien avec $Z(\tilde{X}_x, t)$ qui est à coeffs rationnels + utilisation de Čebotarev

(iii) & (iv) formule des traces.

Preuve de (i)

$$\begin{cases} G = \mathrm{Im}(\rho) \subseteq Sp(E) & \text{est compact donc un groupe de Lie } \ell\text{-adique} \\ \mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{sp}(E) & \text{son algèbre de Lie.} \end{cases}$$

- Par Picard-Lefschetz, $\mathfrak{g}$ est engendrée par $\left[e \longmapsto \underbrace{(e,\delta_i)\delta_i}_{= T(\delta_i)(e)}\right]_{1\leq i\leq k}$

  Par ailleurs $\mathfrak{sp}(E)$ est engendré par les $T(\delta) : e \longmapsto (e,\delta)\delta$

  Notons $\Delta = \{\delta \in E \mid T(\delta) \in \mathfrak{g}\}$

- ↳ $\delta_i \in \Delta$

  ↳ Δ stable par homothétie

  ↳ si $\delta, \delta' \in \Delta$, $\underbrace{[T(\delta), T(\delta')]}_{\in \mathfrak{g}} : e \longmapsto (\delta,\delta')(e, \delta - \delta')$

Ainsi, si $\delta, \delta' \in \Delta$ non orthogonaux, $\mathbb{Q}_\ell \delta \oplus \mathbb{Q}_\ell \delta' \subseteq \Delta$

On déduit $\Delta = \bigcup \Delta_j$ ← ss-espaces linéaires 2 à 2 orthogonaux.

Mais chaque Δ_j est stable par les $T(\delta_i)$ donc par $\mathfrak{g}$.

Or $\mathfrak{g} \curvearrowright E$ est irréductible $\Rightarrow \Delta_j = \Delta = E \Rightarrow \mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(E)$

↳ Il faut voir $G \curvearrowright E$ irréductible

Soit $F \subseteq E$ G-stable et $0 \neq f \in F$.

Soit δ_i tq $(f, \delta_i) \neq 0 \Longrightarrow \delta_i \in F$

$\Longrightarrow$ tous les $\delta_i \in F$ (conjugués)

$\Longrightarrow E = F$.

Preuve de (ii)

• $x \in |U_0|$ $\quad Z(\tilde{X}_x, t) = \prod_i \det(1 - F_x^* t \mid R^i f_* \mathbb{Q}_{\ell\, x})^{(-1)^{i+1}}$

$$= \underbrace{\prod_{i \neq d-1} \text{———} \times \det(1 - F_x^* t \mid \mathcal{E}_x^{\perp})}_{} \times \det(1 - F_x^* t \mid \mathcal{E}_x)$$

tous ces termes sont associés à des faisceaux localement constants sur U_0 constants sur U, donc associés à une rep. de $\hat{\mathbb{Z}} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}_q}/\mathbb{F}_q)$

$\Rightarrow$ il existe des unités ℓ-adiques $\alpha_i \neq \beta_j \in \overline{\mathbb{Q}_\ell}$ tq $\forall x \in |U_0|$

$$\mathbb{Q}(t) \ni Z(\tilde{X}_x, t) = \frac{\prod (1 - \alpha_i^{\deg x} t)}{\prod (1 - \beta_j^{\deg x} t)} \det(1 - F_x^* t \mid \mathcal{E}_x)$$

• Montrons (β_j) défini sur $\mathbb{Q}$.

* il existe un nb fini d'entiers K tq si $k \nmid n$, $k \in K$, $(1 - \beta_j^{\deg x} t) \nmid (1 - \alpha_i^{\deg x} t)$
* il existe un ens. L ~~d'entiers de d~~ de x de densité 1 tq si $x \in L$, $(1 - \beta_j^{\deg x} t) \nmid \det(1 - F_x^* t \mid \mathcal{E}_x)$ [Chebotarev]

Si $K \subseteq \mathbb{N}_{\geq 2}$ fini assez grand, $L \subseteq |U_0|$, assez petit de densité 0, dans

$$\prod (1 - \beta_j^{\deg x} t) = \text{dénominateur de } Z(\tilde{X}_x, t) \text{ pour } \begin{cases} x \notin L \\ k \nmid \deg x \end{cases}$$

Mais il existe une unique famille (β_j) d'éléments de $\overline{\mathbb{Q}}$ vérifiant cela, donc elle est stable sous $\mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{Q}_\ell})$ donc définie sur $\mathbb{Q}$.

en effet si (β_j) et (γ_ℓ), supposons que $\forall j, \ell$ $\beta_j \neq \gamma_\ell$. Alors soit $x \notin L$ tq $k \nmid \deg x$ $n_{j,\ell} \nmid \deg x$ mais absurde ! $\Rightarrow \exists j \exists \ell$, et on les vire et on recommence.

• Racines (α_i) définies sur $\mathbb{Q}$

Soit $P(t) = \prod (1-\alpha_i^{\deg x} t) \det(1-F_x^* t \mid \mathcal{E}_x) \in \mathbb{Q}[t]$

Si (δ_ℓ) est tq $\dfrac{P(t)}{\prod(1-\delta_\ell^{\deg x} t)}$ polynôme $\forall x$ | hors de L assez grand / $\deg_x$ non div par $k < K$ assez grand

$\overset{\in}{\overline{\mathbb{Q}_\ell}}$ unités ℓ-adiques.

Lemme ci-dessus montre $\prod(1-\delta_\ell^{\deg x} t) \mid \prod(1-\alpha_i^{\deg x} t)$.

Ainsi, la collection de δ_ℓ de ~~@~~ grand cardinal est unique : (α_i), donc stable sous $\mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{Q}_\ell})$.

Construction : $\pi_1(U, u) \longrightarrow Sp(E)$

$\pi_1(U_0, u) \xrightarrow{\rho_0} GSp(E)$

$\pi_1(U_0, u) \xrightarrow{(\deg, \rho_0)} \hat{\mathbb{Z}} \times GSp(E)$

$\tilde{\rho}_0 \dashrightarrow H := \{(n, g) \mid \mu(g) = q^{-n}\} \subset \hat{\mathbb{Z}} \times GSp(E)$

Car $0 \to Sp(E) \to H \twoheadrightarrow \hat{\mathbb{Z}} \to 0$, + passe là,

on voit bien $\exists$ quotient fini de H tq le rang est dans $\mathrm{Im}\,\tilde{\rho}_0$

Si $\beta \in \overline{\mathbb{Q}_\ell}$ unité ℓ-adique, $M = \{(n,g) \in H \mid \beta^{\pm n}$ vp de $g\}$ a mesure (de Haar) nulle [fibre à fibre par — $\exists$ évident + Fubini]

Alors pour densité 1 de x, $\tilde{\rho}_0(F_x) \notin M$, i.e.

$(1-\beta t^{\deg x}) \nmid \det(1-F_x^* t \mid \mathcal{E}_x)$

Preuve de (iii)

Fix $k \geq 1$

$$\prod_{x \in |U_0|} \det\left(1 - F_x^* t^{\deg x} \mid \mathcal{E}_{\bar{x}}^{\otimes 2k}\right)^{-1} = Z(U_0, \mathcal{E}_0^{\otimes 2k}, t) \underset{\substack{\text{formule des} \\ \text{traces}}}{=} \prod_i \det\left(1 - F^* t \mid H^i_c(U, \mathcal{E}^{\otimes 2k})\right)$$

$$\begin{cases} H^0_c(U, \mathcal{E}^{\otimes 2k}) = 0 \quad (\text{évident}) \\ H^2_c(U, \mathcal{E}^{\otimes 2k}) = H^0(U, \check{\mathcal{E}}^{\otimes 2k}(1))^\vee \\ \qquad = \left(\left(E^{\vee \otimes 2k}(1)\right)^{\pi_1(U,0)}\right)^\vee \\ \qquad = \left[E^{\otimes 2k}(-1)\right]_{\pi_1(U,0)} \leftarrow \text{coinvariants} \\ \qquad \underset{\text{grosse monodromie}}{=} \left[E^{\otimes 2k}(-1)\right]_{Sp(E)} \end{cases}$$

Mais Weyl calcule ces coinvariants : si $\{1, \dots, 2k\} = \{a_1, b_1\} \cup \dots \cup \{a_k, b_k\}$

$$E^{\otimes 2k}(-1) \longrightarrow \mathbb{Q}_\ell(-k(d-1)-1)$$

$$x_1 \otimes \dots \otimes x_{2k} \longmapsto \prod_i (x_{a_i}, x_{b_i})$$

et $H^2_c(U, \mathcal{E}^{\otimes 2k}) = \mathbb{Q}_\ell(-k(d-1)-1)^N \leftarrow$ nombre de telles partitions.

$$\underbrace{\prod_{x \in |U_0|} \det\left(1 - F_x^* t^{\deg x} \mid \mathcal{E}_{\bar{x}}^{\otimes 2k}\right)^{-1}}_{} = \frac{\det\left(1 - F^* t \mid H^1_c(U, \mathcal{E}^{\otimes 2k})\right)}{\left(1 - q^{k(d-1)+1} t\right)^N}$$

par (ii), chaque terme est à coeffs $\in \mathbb{Q}_{\geq 0}$

Comme le produit cv pour $|t| < \frac{1}{q^{k(d-1)+1}}$,

c'est le cas de chaque terme individuel.

Si α vp de F_x^* sur $\mathcal{E}_{\bar{x}}$, α^{2k} vp de F_x^* sur $\mathcal{E}_{\bar{x}}^{\otimes 2k}$, donc $\frac{1}{|\alpha|^{2k}} \geq \frac{1}{q^{k(d-1)+1}}$

$\xrightarrow[k \to \infty]{} |\alpha| \leq q^{\frac{d-1}{2}}$.

La dualité parfaite $\mathcal{E}_{\bar{x}} \otimes \mathcal{E}_{\bar{x}} \to \mathbb{Q}_\ell(-d+1)$ fournit la minoration $|\alpha| \geq q^{\frac{d-1}{2}}$.

Preuve de (iv)

- $0 \longrightarrow j_! \mathcal{E} \longrightarrow j_* \mathcal{E} \longrightarrow j_*\mathcal{E}|_{j_!\mathcal{E}} \longrightarrow 0$

$$\wr H^1$$

on va noter que les vp de F^* ici sont dg et rajouter leurs ψ.| $\left\{ H^1_c(U, \mathcal{E}) \longrightarrow H^1(\mathbb{P}^1, j_* \mathcal{E}) \longrightarrow 0 \right.$

- $0 \longrightarrow H^1(\mathbb{P}^1, j_* \mathcal{E}) \xrightarrow{\text{leray}} H^1(U, \mathcal{E})$

$$\wr \text{dual}$$

de même, on rajoute les vp de F^* ici : $\left\{ H^1_c(U, \mathcal{E}^\vee(1)) \longrightarrow H^1(\mathbb{P}^1, j_* \mathcal{E})^\vee \longrightarrow 0 \right.$

On ne traite que le premier point (le second analogue)

$$\prod_{x \in |U_0|} \det(1 - F_x^* t^{\deg x} | \mathcal{E})^{-1} =: Z(U_0, \mathcal{E}_0, t) \underset{\text{formule des traces}}{=\!=} \prod_i \det\left(1 - F^* t \mid H^i_c(U, \mathcal{E})\right)^{(-1)^{i+1}}$$

$$\left[\begin{array}{l} H^0_c(U, \mathcal{E}) = 0 \quad (\text{évident}) \\ H^2_c(U, \mathcal{E})^\vee = H^0(U, \mathcal{E}^\vee(1)) \\ \qquad = (\mathcal{E}^\vee(1))^{\pi_1(U,u)} \\ \qquad = (\mathcal{E}^\vee(1))^{\mathcal{G}(\mathcal{E})} \underset{\text{grosse monodromie}}{=} 0 \end{array} \right.$$

$$= \det\left(1 - F^* t \mid H^1_c(U, \mathcal{E})\right)$$

$\in \mathbb{Q}[[t]]$ par (ii) $\qquad \qquad \in \mathbb{Q}_\ell[t]$

$$\longrightarrow \in \mathbb{Q}[t].$$

Soit α une vp de $F^* \curvearrowright H^1_c(U, \mathcal{E}) \Rightarrow \frac{1}{\alpha}$ racine de donc α algébrique.

Pour montrer que $|\alpha| \leq q^{\frac{d+1}{2}}$, il suffit de voir que

$$\prod_{x \in |U_0|} \det(1 - F_x^* t^{\deg x} | \mathcal{E}_0) \quad \text{converge absolument pour } |t| < q^{-\frac{d-1}{2}}$$

$$\| $$

$$\prod_{x \in |U_0|} \prod_{i=1}^{x} (1 - \alpha_{x,i} t^{\deg x}), \quad |\alpha_{x,i}| = q_x^{\frac{d-1}{2}} \text{ par (iii)}.$$

Soit $U_0 \xrightarrow{\delta : 1} \mathbb{A}^1$: il y a $\leq \delta q^n$ points de degré n dans U_0

$$\sum_{x,i} \left| \alpha_{x,i} t^{\deg x} \right| \leq \sum_n \delta q^n q^{n\left(\frac{d-1}{2}\right)} t^n \quad \text{cv pour } |t| < q^{\frac{d+1}{2}} \quad \blacksquare$$