Journée de rentrée de l'I.M.J.

17 octobre 2017

Anna Cadoret
Projet théorie des nombres

Géométrie arithmétique

Géométrie arithmétique

Géométrie algébrique Théorie des nombres Théorie des représentations

Géométrie arithmétique

Géométrie algébrique **Théorie des nombres** **Théorie des représentations**

Equations polynomiales k corps, $\underline{P} \in k[\underline{X}]$

$$V(k) := \{\underline{x} \in k^n \mid \underline{P}(\underline{x}) = 0\}$$

Géométrie arithmétique

Géométrie algébrique Théorie des nombres Théorie des représentations

Equations polynomiales k corps, $\underline{P} \in k[\underline{X}]$

$$V(k) := \{\underline{x} \in k^n \mid \underline{P}(\underline{x}) = 0\}$$

k : 'petit' mais arithmétiquement riche $(\pi_1(k) := \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ 'gros')
e.g. de type fini sur $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{F}_p(T)$

Géométrie arithmétique

Géométrie algébrique Théorie des nombres Théorie des représentations

Equations polynomiales k corps, $\underline{P} \in k[\underline{X}]$

$$V(k) := \{\underline{x} \in k^n \mid \underline{P}(\underline{x}) = 0\}$$

k : 'petit' mais arithmétiquement riche ($\pi_1(k) := \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ 'gros')
e.g. de type fini sur $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{F}_p(T)$

$V(k)$: objet très 'compliqué' !

Géométrie arithmétique

Géométrie algébrique Théorie des nombres Théorie des représentations

Equations polynomiales k corps, $\underline{P} \in k[\underline{X}]$

$$V(k) := \{\underline{x} \in k^n \mid \underline{P}(\underline{x}) = 0\}$$

k : 'petit' mais arithmétiquement riche ($\pi_1(k) := \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ 'gros')
e.g. de type fini sur $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{F}_p(T)$

$V(k)$: objet très 'compliqué' !

$$P = Z^N - X^N - Y^N,\ k = \mathbb{Q}$$

Géométrie arithmétique

Géométrie algébrique Théorie des nombres Théorie des représentations

Equations polynomiales k corps, $\underline{P} \in k[\underline{X}]$

$$V(k) := \{\underline{x} \in k^n \mid \underline{P}(\underline{x}) = 0\}$$

k : 'petit' mais arithmétiquement riche ($\pi_1(k) := \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ 'gros')
e.g. de type fini sur $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{F}_p(T)$

$V(k)$: objet très 'compliqué' !

Géométrie arithmétique

Géométrie algébrique Théorie des nombres Théorie des représentations

Equations polynomiales k corps, $\underline{P} \in k[\underline{X}]$

$$V(k) := \{\underline{x} \in k^n \mid \underline{P}(\underline{x}) = 0\}$$

k : 'petit' mais arithmétiquement riche ($\pi_1(k) := \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ 'gros')
e.g. de type fini sur $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{F}_p(T)$

$V(k)$: objet très 'compliqué' !

↳ Considérer les solutions sur tous les surcorps de k 'simultanément'

Géométrie arithmétique

Géométrie algébrique Théorie des nombres Théorie des représentations

Equations polynomiales k corps, $\underline{P} \in k[\underline{X}]$

$$V(k) := \{\underline{x} \in k^n \mid \underline{P}(\underline{x}) = 0\}$$

k : 'petit' mais arithmétiquement riche ($\pi_1(k) := \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ 'gros')
e.g. de type fini sur $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{F}_p(T)$

$$V(k) \text{ : objet très 'compliqué' !}$$

$\hookrightarrow$ Considérer les solutions sur tous les surcorps de k 'simultanément'

Variétés algébriques

$$V : A\ k\text{-algèbre} \to V(A) := \{\underline{a} \in A^n \mid \underline{P}(\underline{a}) = 0\}$$

Géométrie arithmétique

Géométrie algébrique Théorie des nombres Théorie des représentations

Equations polynomiales k corps, $\underline{P} \in k[\underline{X}]$

$$V(k) := \{\underline{x} \in k^n \mid \underline{P}(\underline{x}) = 0\}$$

k : 'petit' mais arithmétiquement riche ($\pi_1(k) := \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ 'gros')
e.g. de type fini sur $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{F}_p(T)$

$V(k)$: objet très 'compliqué' !

↳ Considérer les solutions sur tous les surcorps de k 'simultanément'

Variétés algébriques

$$V : A\ k\text{-algèbre} \to V(A) := \{\underline{a} \in A^n \mid \underline{P}(\underline{a}) = 0\}$$

↳ $V(\overline{k})$: objet géométrique

Géométrie arithmétique

Géométrie algébrique Théorie des nombres Théorie des représentations

Equations polynomiales k corps, $\underline{P} \in k[\underline{X}]$

$$V(k) := \{\underline{x} \in k^n \mid \underline{P}(\underline{x}) = 0\}$$

k : 'petit' mais arithmétiquement riche ($\pi_1(k) := \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ 'gros')
e.g. de type fini sur $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{F}_p(T)$

$V(k)$: objet très 'compliqué' !

↳ Considérer les solutions sur tous les surcorps de k 'simultanément'

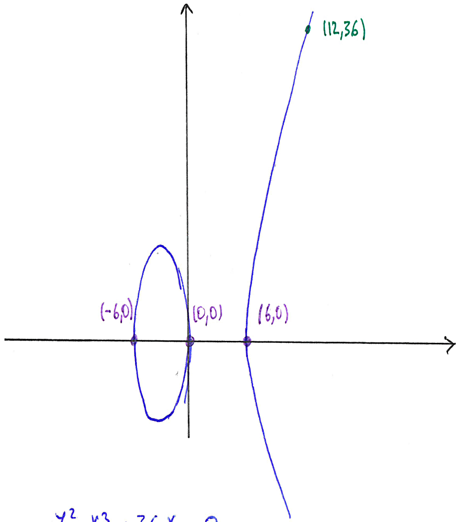
Variétés algébriques

$$V : A \ k\text{-algèbre} \to V(A) := \{\underline{a} \in A^n \mid \underline{P}(\underline{a}) = 0\}$$

↳ $V(\overline{k})$: objet géométrique

↳ $\pi_1(k) \curvearrowright V(\overline{k})$ et

$$V(k) = V(\overline{k})^{\pi_1(k)}$$



$$Y^2 - X^3 + 36X = 0$$

$$X(\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/_2 \times \mathbb{Z}/_2$$

"la géométrie contrôle l'arithmétique"

"la géométrie contrôle l'arithmétique"

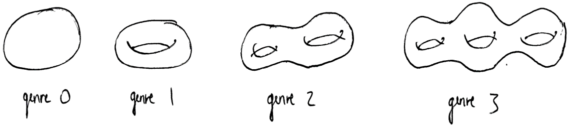
Courbe

"la géométrie contrôle l'arithmétique"

Courbe $V \rightsquigarrow g_V \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ genre géométrique

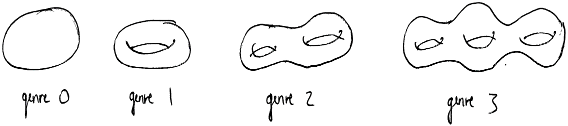
"la géométrie contrôle l'arithmétique"

Courbe $V \rightsquigarrow g_V \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ genre géométrique



"la géométrie contrôle l'arithmétique"

Courbe $V \rightsquigarrow g_V \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ genre géométrique

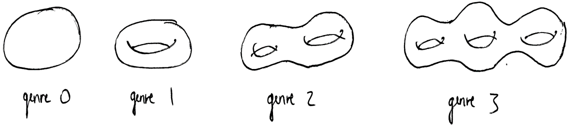


Thm (Conj de Mordell ; Faltings, 1983) *k de type fini sur* $\mathbb{Q}$,

$$g_V \geqslant 2 \Rightarrow |V(k)| < +\infty$$

"la géométrie contrôle l'arithmétique"

Courbe $V \rightsquigarrow g_V \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ genre géométrique



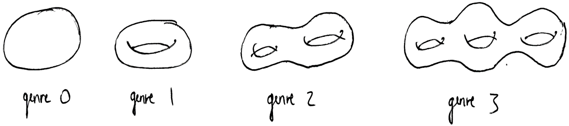
Thm (Conj de Mordell ; Faltings, 1983) *k de type fini sur $\mathbb{Q}$,*

$$g_V \geqslant 2 \Rightarrow |V(k)| < +\infty$$

- Si $g_V = 0$, $V(k) \neq \varnothing \Rightarrow V(k) \simeq \mathbb{P}^1(k)$
- Si $g_V = 1$, $V(k) \neq \varnothing \Rightarrow V(k)$ groupe abélien de type fini (courbe elliptique)

"la géométrie contrôle l'arithmétique"

Courbe $V \rightsquigarrow g_V \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ genre géométrique



Thm (**Conj de Mordell** ; Faltings, 1983) *k de type fini sur $\mathbb{Q}$,*

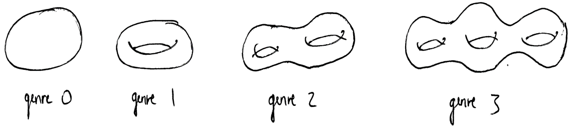
$$g_V \geqslant 2 \Rightarrow |V(k)| < +\infty$$

- Si $g_V = 0$, $V(k) \neq \varnothing \Rightarrow V(k) \simeq \mathbb{P}^1(k)$
- Si $g_V = 1$, $V(k) \neq \varnothing \Rightarrow V(k)$ groupe abélien de type fini (courbe elliptique)

Dimension supérieure ?

"la géométrie contrôle l'arithmétique"

Courbe $V \rightsquigarrow g_V \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ genre géométrique



Thm (Conj de Mordell; Faltings, 1983) *k de type fini sur $\mathbb{Q}$,*

$$g_V \geqslant 2 \Rightarrow |V(k)| < +\infty$$

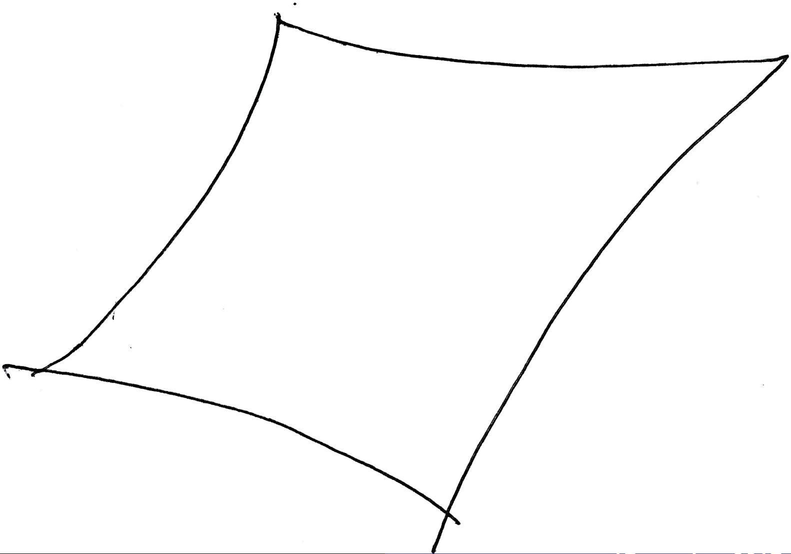
- Si $g_V = 0$, $V(k) \neq \varnothing \Rightarrow V(k) \simeq \mathbb{P}^1(k)$
- Si $g_V = 1$, $V(k) \neq \varnothing \Rightarrow V(k)$ groupe abélien de type fini (courbe elliptique)

Dimension supérieure ? genre $\leftrightarrow$ dimension de Kodaira

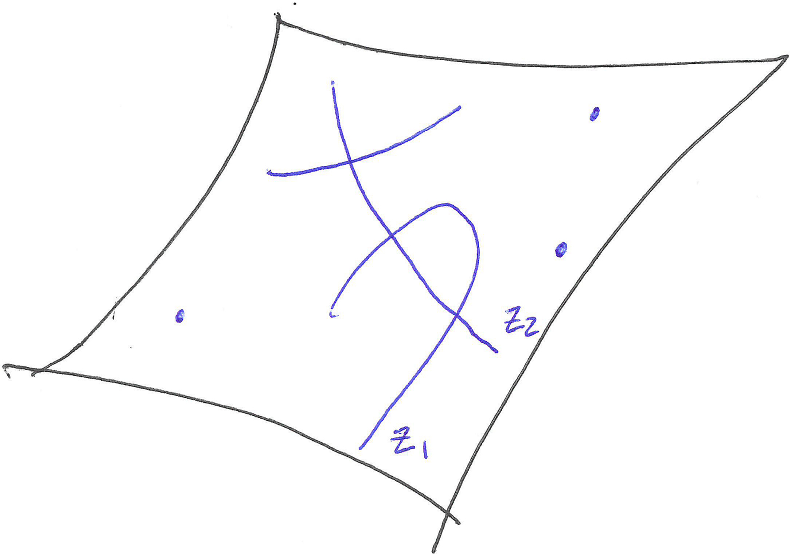
Conj de Mordell $\leftrightarrow$ Conj. de Lang

Invariants ‘abéliens‘

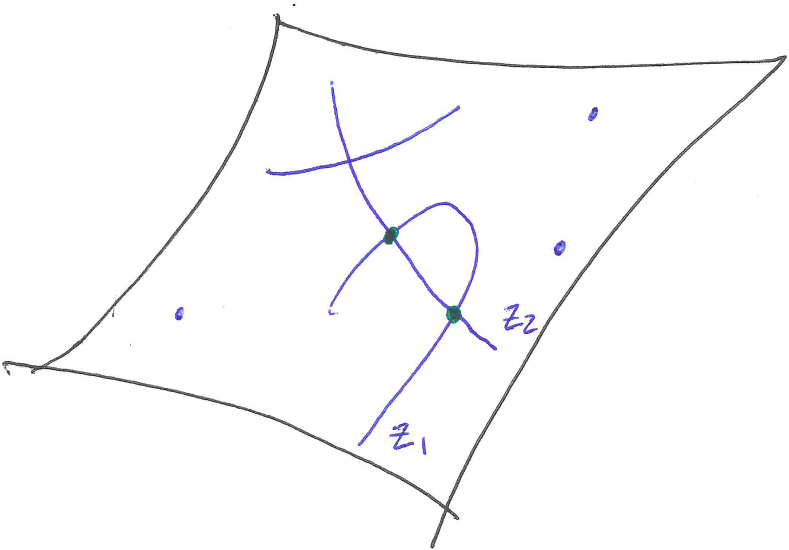
Invariants 'abéliens'



Invariants 'abéliens'



Invariants 'abéliens'



Invariants 'abéliens'

Cycles

$CH(V)$
Anneaux
configuration d'intersection
des ss-variétés

Invariants ‘abéliens‘

Cycles		Cohomologie
$CH(V)$	$\longrightarrow$	$H(V)$
Anneaux		F-algèbre dim finie
configuration d’intersection		+ structures
des ss-variétés		

Invariants 'abéliens'

Cycles		Cohomologie	
$CH(V)$ Anneaux configuration d'intersection des ss-variétés	$\longrightarrow$	$H(V)$ F-algèbre dim finie + structures	Groupe de Galois motivique
		cat.tannakienne $\hookrightarrow$	$G_H(V) \subset \mathrm{GL}(H(V))$ groupe algébrique $/F$ mesure la complexité de V

Invariants 'abéliens'

Cycles		Cohomologie	
$CH(V)$ Anneaux configuration d'intersection des ss-variétés	$\longrightarrow$	$H(V)$ F-algèbre dim finie + structures	Groupe de Galois motivique
		cat.tannakienne $\hookrightarrow$	$G_H(V) \subset \mathrm{GL}(H(V))$ groupe algébrique $/F$ mesure la complexité de V

e.g. H_ℓ : cohomologie ℓ-adique ($\ell \nmid car(k)$)

$H_\ell(V)$: $F = \mathbb{Q}_\ell$-algèbre + action continue de $\pi_1(k)$

$G_\ell(V)$: clôture de Zariski de $Im(\pi_1(k) \rightharpoonup H_\ell(V))$

Invariants 'abéliens'

Cycles		Cohomologie	
$CH(V)$	$\longrightarrow$	$H(V)$	
Anneaux		F-algèbre dim finie	Groupe de Galois
configuration d'intersection		+ structures	motivique
des ss-variétés			
		cat.tannakienne $\hookrightarrow$	$G_H(V) \subset \mathrm{GL}(H(V))$
			groupe algébrique $/F$
			mesure la complexité de V

e.g. H_ℓ : cohomologie ℓ-adique ($\ell \nmid car(k)$)

$H_\ell(V)$: $F = \mathbb{Q}_\ell$-algèbre + action continue de $\pi_1(k)$

$G_\ell(V)$: clôture de Zariski de $Im(\pi_1(k) \rightharpoonup H_\ell(V))$

V courbe elliptique :

$$G_\ell(V) \subset \mathrm{GL}_{2\mathbb{Q}_\ell} \quad \begin{array}{l} \text{tore de rang 2 (CM)} \\ \mathrm{GL}_{2\mathbb{Q}_\ell} \text{ (sans CM)} \end{array}$$

$$0 \to V(k) \otimes \mathbb{Q}_\ell \to CH(V) \otimes \mathbb{Q}_\ell \xrightarrow{\gamma_V} \mathbb{Q}_\ell^2 \to 0$$

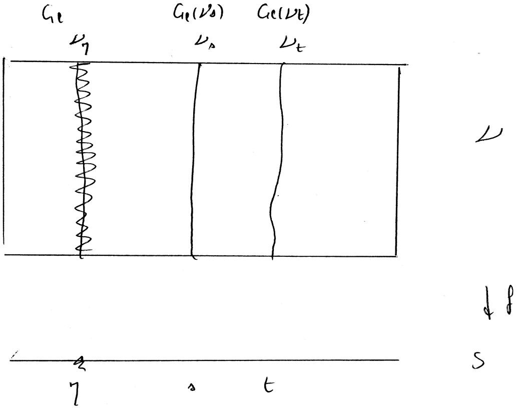
Variation en famille

Variation en famille

S variété $/k$, $f : \mathcal{V} \to S$ famille (projective, lisse) de variétés sur S

$$\mathcal{V}_s := f^{-1}(s)$$

Comment varient $G_\ell(\mathcal{V}_s)$ avec $s \in S$?



Variation en famille

S variété $/k$, $f : \mathcal{V} \to S$ famille (projective, lisse) de variétés sur S

$$\mathcal{V}_s := f^{-1}(s)$$

Comment varient $G_\ell(\mathcal{V}_s)$ avec $s \in S$?

E.g. courbe elliptique universelle $f : \mathcal{V} = \mathcal{E} \to S = \mathbb{P}^1 \backslash \{3\mathrm{pts}\}$

Question : *Que peut-on dire du lieu exceptionnel*

$$Exc_\ell := \{s \in S \mid \mathcal{E}_s \ \mathrm{CM}\}??$$

Variation en famille

S variété $/k$, $f : \mathcal{V} \to S$ famille (projective, lisse) de variétés sur S

$$\mathcal{V}_s := f^{-1}(s)$$

Comment varient $G_\ell(\mathcal{V}_s)$ avec $s \in S$?

E.g. courbe elliptique universelle $f : \mathcal{V} = \mathcal{E} \to S = \mathbb{P}^1 \backslash \{3\text{pts}\}$

Question : *Que peut-on dire du lieu exceptionnel*

$$Exc_\ell := \{s \in S \mid \mathcal{E}_s \text{ CM}\}??$$

Exc_ℓ infini,

Variation en famille

S variété $/k$, $f : \mathcal{V} \to S$ famille (projective, lisse) de variétés sur S

$$\mathcal{V}_s := f^{-1}(s)$$

Comment varient $G_\ell(\mathcal{V}_s)$ avec $s \in S$?

E.g. courbe elliptique universelle $f : \mathcal{V} = \mathcal{E} \to S = \mathbb{P}^1 \backslash \{3\text{pts}\}$

Question : *Que peut-on dire du lieu exceptionnel*

$$Exc_\ell(\leqslant d) := \{s \in S \mid \mathcal{E}_s \ \mathrm{CM}, \ [k(s) : k] \leqslant d\}??$$

Exc_ℓ infini, $Exc_\ell(\leqslant d)$ fini

Variation en famille

S variété $/k$, $f : \mathcal{V} \to S$ famille (projective, lisse) de variétés sur S

$$\mathcal{V}_s := f^{-1}(s)$$

Comment varient $G_\ell(\mathcal{V}_s)$ avec $s \in S$?

$H_\ell(\mathcal{V}_s) \simeq H_\ell(\mathcal{V}_\eta) \simeq H_\ell$
$G_\ell(\mathcal{V}_s) \subset G_\ell := G_\ell(\mathcal{V}_\eta) \subset \mathrm{GL}(H_\ell)$

Variation en famille

S variété $/k$, $f : \mathcal{V} \to S$ famille (projective, lisse) de variétés sur S

$$\mathcal{V}_s := f^{-1}(s)$$

Comment varient $G_\ell(\mathcal{V}_s)$ avec $s \in S$?

$H_\ell(\mathcal{V}_s) \simeq H_\ell(\mathcal{V}_\eta) \simeq H_\ell$
$G_\ell(\mathcal{V}_s) \subset G_\ell := G_\ell(\mathcal{V}_\eta) \subset \mathrm{GL}(H_\ell)$

Question : *Que peut-on dire du lieu exceptionnel*

$$Exc_\ell := \{s \in S \mid G_\ell(\mathcal{V}_s) \subsetneq G_\ell\}??$$

Variation en famille

S variété $/k$, $f : \mathcal{V} \to S$ famille (projective, lisse) de variétés sur S

$$\mathcal{V}_s := f^{-1}(s)$$

Comment varient $G_\ell(\mathcal{V}_s)$ avec $s \in S$?

$H_\ell(\mathcal{V}_s) \simeq H_\ell(\mathcal{V}_\eta) \simeq H_\ell$
$G_\ell(\mathcal{V}_s) \subset G_\ell := G_\ell(\mathcal{V}_\eta) \subset \mathrm{GL}(H_\ell)$

Question : *Que peut-on dire du lieu exceptionnel*

$$Exc_\ell(\leqslant d) := \{s \in Exc_\ell \mid G_\ell(\mathcal{V}_s) \subsetneq G_\ell,\ [k(s) : k] \leqslant d\}??$$

Variation en famille

S variété $/k$, $f : \mathcal{V} \to S$ famille (projective, lisse) de variétés sur S

$$\mathcal{V}_s := f^{-1}(s)$$

Comment varient $G_\ell(\mathcal{V}_s)$ avec $s \in S$?

$H_\ell(\mathcal{V}_s) \simeq H_\ell(\mathcal{V}_\eta) \simeq H_\ell$
$G_\ell(\mathcal{V}_s) \subset G_\ell := G_\ell(\mathcal{V}_\eta) \subset \mathrm{GL}(H_\ell)$

Question : *Que peut-on dire du lieu exceptionnel*

$$Exc_\ell(\leqslant d) := \{s \in Exc_\ell \mid G_\ell(\mathcal{V}_s) \subsetneq G_\ell,\ [k(s) : k] \leqslant d\}??$$

Thm *Si S est une courbe,* $|Exc_\ell(\leqslant d)| < +\infty$

C-Tamagawa, 2013 si $\mathrm{car}(k) = 0$
Ambrosi (Ph.D.), 2017 si $\mathrm{car}(k) > 0$ si $d = 1$

Stratégie ($d = 1$) - le groupe fondamental

Stratégie ($d = 1$) - le groupe fondamental

$\hookrightarrow$ $\rho : \pi_1(S) \to \mathrm{GL}(H_\ell)$ rep. du groupe fondamental étale

Stratégie ($d = 1$) - le groupe fondamental

↳ $\rho : \pi_1(S) \to \mathrm{GL}(H_\ell)$ rep. du groupe fondamental étale

↳ tour de revêtements étales (SMA)

$$\cdots S_{n+1} \to S_n \to S_n \cdots \to S$$

$$\text{tq}$$

$$\mathrm{Im}(\varprojlim S_n(k) \to S) = Exc_\ell(k)$$

Stratégie ($d = 1$) - le groupe fondamental

↳ $\rho : \pi_1(S) \to \mathrm{GL}(H_\ell)$ rep. du groupe fondamental étale

↳ tour de revêtements étales (SMA)

$$\cdots S_{n+1} \to S_n \to S_n \cdots \to S$$

$$\text{tq}$$

$$\mathrm{Im}(\varprojlim S_n(k) \to S) = Exc_\ell(k)$$

↳ $g_{S_n} \geqslant 2,\ n \gg 0$

Stratégie ($d = 1$) - le groupe fondamental

↳ $\rho : \pi_1(S) \to \mathrm{GL}(H_\ell)$ rep. du groupe fondamental étale

↳ tour de revêtements étales (SMA)

$$\cdots S_{n+1} \to S_n \to S_n \cdots \to S$$

$$\text{tq}$$

$$\mathrm{Im}(\varprojlim S_n(k) \to S) = Exc_\ell(k)$$

↳ $g_{S_n} \geqslant 2,\ n \gg 0$

↳ Mordell $\Rightarrow |S_n(k)| < +\infty,\ n \gg 0$

Stratégie ($d = 1$) - le groupe fondamental

$\hookrightarrow$ $\rho : \pi_1(S) \to \mathrm{GL}(H_\ell)$ rep. du groupe fondamental étale

DA $\hookrightarrow$ tour de revêtements étales (SMA)

$$\cdots S_{n+1} \to S_n \to S_n \cdots \to S$$

$$\text{tq}$$

$$\mathrm{Im}(\varprojlim S_n(k) \to S) = Exc_\ell(k)$$

DA $\hookrightarrow$ $g_{S_n} \geqslant 2,\ n \gg 0$

$\hookrightarrow$ Mordell $\Rightarrow |S_n(k)| < +\infty,\ n \gg 0$

Dictionnaire 'anabélien'

Th. des représentations	$\longleftrightarrow$	Géo. algébrique/Th. des nombres
ρ		SMA

Stratégie ($d = 1$) - le groupe fondamental

$\hookrightarrow$ $\rho : \pi_1(S) \to \mathrm{GL}(H_\ell)$ rep. du groupe fondamental étale

DA $\hookrightarrow$ tour de revêtements étales (SMA)

$$\cdots S_{n+1} \to S_n \to S_n \cdots \to S$$

$$\text{tq}$$

$$\mathrm{Im}(\varprojlim S_n(k) \to S) = Exc_\ell(k)$$

DA$\hookrightarrow$ $g_{S_n} \geqslant 2,\ n \gg 0$

$\hookrightarrow$ Mordell $\Rightarrow |S_n(k)| < +\infty,\ n \gg 0$

Dictionnaire 'anabélien'

Th. des représentations $\longleftrightarrow$ Géo. algébrique/Th. des nombres

ρ SMA

Stratégie ($d = 1$) - le groupe fondamental

↳ $\rho : \pi_1(S) \to \mathrm{GL}(H_\ell)$ rep. du groupe fondamental étale

DA ↳ tour de revêtements étales (SMA)

$$\cdots S_{n+1} \to S_n \to S_n \cdots \to S$$

$$\mathrm{tq}$$

$$\mathrm{Im}(\varprojlim S_n(k) \to S) = Exc_\ell(k)$$

DA↳ $g_{S_n} \geqslant 2,\ n \gg 0 \longleftrightarrow \mathrm{Lie}(\rho(\pi_1(S_{\overline{k}})))^{ab} = 0$ G.L.P

↳ Mordell $\Rightarrow |S_n(k)| < +\infty,\ n \gg 0$

Dictionnaire 'anabélien'

Th. des représentations $\longleftrightarrow$ Géo. algébrique/Th. des nombres

ρ SMA

Pour résumer

Pour résumer

$$\rho : \pi_1(S) \to \mathrm{GL}_r(F)$$

- **Coefficients F :**
- **Applications :**
- **Défis :**

Pour résumer

$$\rho : \pi_1(S) \to \mathrm{GL}_r(F)$$

- **Coefficients** F **:** $\mathbb{Q}_\ell$
- **Applications :**
- **Défis :**

Pour résumer

$$\rho : \pi_1(S) \to \mathrm{GL}_r(F)$$

- **Coefficients F :** $\mathbb{Q}_\ell$
- **Applications :**
  - Variation en famille d'invariants motiviques (décrire de Exc_ℓ)
  - Bornes uniformes ($Exc_\ell = \varnothing$)
- **Défis :**

Pour résumer

$$\rho : \pi_1(S) \to \mathrm{GL}_r(F)$$

- **Coefficients F :** $\mathbb{Q}_\ell$
- **Applications :**
  - Variation en famille d'invariants motiviques (décrire de Exc_ℓ)
  - Bornes uniformes ($Exc_\ell = \varnothing$)
- **Défis :**
  - **Construction du dictionnaire anabélien**

Pour résumer

$$\rho : \pi_1(S) \to \mathrm{GL}_r(F)$$

- **Coefficients F :** $\mathbb{Q}_\ell$
- **Applications :**
  - Variation en famille d'invariants motiviques (décrire de Exc_ℓ)
  - Bornes uniformes ($Exc_\ell = \emptyset$)
- **Défis :**
  - **Construction du dictionnaire anabélien**
  - **Comprendre ρ**

Pour résumer

$$\rho : \pi_1(S) \to \mathrm{GL}_r(F)$$

- **Coefficients F :** $\mathbb{Q}_\ell$
- **Applications :**
  - Variation en famille d'invariants motiviques (décrire de Exc_ℓ)
  - Bornes uniformes ($Exc_\ell = \varnothing$)
- **Défis :**
  - **Construction du dictionnaire anabélien**
  - **Comprendre ρ, du moins im(ρ)** (Conj Grothendieck-Serre-Tate)

Pour résumer

$$\rho : \pi_1(S) \to \mathrm{GL}_r(F)$$

- **Coefficients** F **:** $\mathbb{Q}_\ell$
- **Applications :**
  - Variation en famille d'invariants motiviques (décrire de Exc_ℓ)
  - Bornes uniformes ($Exc_\ell = \varnothing$)

- **Défis :**
  - **Construction du dictionnaire anabélien**
  - **Comprendre** ρ, **du moins im**(ρ) (Conj Grothendieck-Serre-Tate)

  ↳ **Thm** (Deligne, 1980, Weil II) $\mathcal{F}$ $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceau lisse ι-pur
  $\mathcal{F}_{\overline{\eta}}$ $\pi_1(S_{\overline{k}})$-module semisimple ($\Rightarrow$ G.L.P.)

Parler de qqchose de plus récent

$$\rho : \pi_1(S) \to \mathrm{GL}_r(F)$$

- **Coefficients** F **:** $\mathbb{Q}_\ell \hookleftarrow \mathbb{Z}_\ell \twoheadrightarrow \mathbb{F}_\ell$
- **Applications :**
  - Variation en famille d'invariants motiviques (décrire de Exc_ℓ)
  - Bornes uniformes ($Exc_\ell = \varnothing$)
- **Défis :**
  - **Construction du dictionnaire anabélien**
  - **Comprendre** ρ, **du moins im**(ρ) (Conj Grothendieck-Serre-Tate)

  $\hookrightarrow$ **Thm** (Deligne, 1980, Weil II) $\mathcal{F}$ $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceau lisse ι-pur
  $\mathcal{F}_{\overline{\eta}}$ $\pi_1(S_{\overline{k}})$-module semisimple ($\Rightarrow$ G.L.P.)

Parler de qqchose de plus récent

$$\rho : \pi_1(S) \to \mathrm{GL}_r(F)$$

- **Coefficients** F **:** $\mathbb{Q}_\ell \hookleftarrow \mathbb{Z}_\ell \twoheadrightarrow \mathbb{F}_\ell$
- **Applications :**
  - Variation en famille d'invariants motiviques (décrire de Exc_ℓ)
  - Bornes uniformes ($Exc_\ell = \varnothing$)
- **Défis :**
  - **Construction du dictionnaire anabélien**
  - **Comprendre** ρ, **du moins im**(ρ) (Conj Grothendieck-Serre-Tate)

↳ **Thm** (C-Hui-Tamagawa, 16) $f : X \to S$ projectif lisse
$R^i f_{\star,\overline{\eta}}\mathbb{F}_\ell = \mathrm{H}^i(X_{\overline{\eta}}, \mathbb{F}_\ell)$ $\pi_1(S_{\overline{k}})$-module semisimple, $\ell \gg 0$

Parler de qqchose de plus récent

$$\rho : \pi_1(S) \to \mathrm{GL}_r(F)$$

- **Coefficients** F **:** $\mathbb{Q}_\ell \hookleftarrow \mathbb{Z}_\ell \twoheadrightarrow \mathbb{F}_\ell \longleftrightarrow$ coefficients ultraproduits
- **Applications :**
  - Variation en famille d'invariants motiviques (décrire de Exc_ℓ)
  - Bornes uniformes ($Exc_\ell = \emptyset$)
- **Défis :**
  - **Construction du dictionnaire anabélien**
  - **Comprendre** ρ, **du moins im**(ρ) (Conj Grothendieck-Serre-Tate)

  ↳ **Thm** (C-Hui-Tamagawa, 16) $f : X \to S$ projectif lisse
  $R^i f_{\star,\overline{\eta}}\mathbb{F}_\ell = \mathrm{H}^i(X_{\overline{\eta}}, \mathbb{F}_\ell)$ $\pi_1(S_{\overline{k}})$-module semisimple, $\ell \gg 0$

Parler de qqchose de plus récent

$$\rho : \pi_1(S) \to \mathrm{GL}_r(F)$$

- **Coefficients** F **:** $\mathbb{Q}_\ell \hookleftarrow \mathbb{Z}_\ell \twoheadrightarrow \mathbb{F}_\ell \longleftrightarrow$ coefficients ultraproduits
- **Applications :**
  - Variation en famille d'invariants motiviques (décrire de Exc_ℓ)
  - Bornes uniformes ($Exc_\ell = \varnothing$)
- **Défis :**
  - **Construction du dictionnaire anabélien**
  - **Comprendre** ρ, **du moins im**(ρ) (Conj Grothendieck-Serre-Tate)

    ↳ **Thm** (C, 17 'Weil II ultraproduits')
    $\mathcal{F}_\ell$, $\ell \nmid p$ syst. compatible de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceaux lisses ι-purs
    $\overline{\mathcal{F}}_{\ell,\overline{\eta}}$ $\pi_1(S_{\overline{k}})$-module semisimple, $\ell \gg 0$

Parler de qqchose de plus récent

$$\rho : \pi_1(S) \to \mathrm{GL}_r(F)$$

- **Coefficients** F **:** $\mathbb{Q}_\ell \hookleftarrow \mathbb{Z}_\ell \twoheadrightarrow \mathbb{F}_\ell \longleftrightarrow$ coefficients ultraproduits
- **Applications :**
  - Variation en famille d'invariants motiviques (décrire de Exc_ℓ)
  - Bornes uniformes ($Exc_\ell = \emptyset$)
  - Correspondance de Langlands pour les corps de fonctions
- **Défis :**
  - **Construction du dictionnaire anabélien**
  - **Comprendre** ρ, **du moins im**(ρ) (Conj Grothendieck-Serre-Tate)

↳ **Thm** (C, 17 'Weil II ultraproduits')
$\mathcal{F}_\ell$, $\ell \nmid p$ syst. compatible de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceaux lisses ι-purs
$\overline{\mathcal{F}}_{\ell,\overline{\eta}}$ $\pi_1(S_{\overline{k}})$-module semisimple, $\ell \gg 0$

Conclure

$$\rho : \pi_1(S) \to \mathrm{GL}_r(F)$$

- **Coefficients** F **:** $\mathbb{Q}_\ell \hookleftarrow \mathbb{Z}_\ell \twoheadrightarrow \mathbb{F}_\ell \longleftrightarrow$ coefficients ultraproduits
- **Applications :**
  - Variation en famille d'invariants motiviques (décrire de Exc_ℓ)
  - Bornes uniformes ($Exc_\ell = \emptyset$)
  - Correspondance de Langlands pour les corps de fonctions
- **Défis :**
  - **Construction du dictionnaire anabélien** en dimension supérieure
  - **Comprendre** ρ, **du moins im**(ρ) (Conj Grothendieck-Serre-Tate)

Conclure

$$\rho : \pi_1(S) \to \mathrm{GL}_r(F)$$

- **Coefficients** F **:** $\mathbb{Q}_\ell \hookleftarrow \mathbb{Z}_\ell \twoheadrightarrow \mathbb{F}_\ell \longleftrightarrow$ coefficients ultraproduits
- **Applications :**
  - Variation en famille d'invariants motiviques (décrire de Exc_ℓ)
  - Bornes uniformes ($Exc_\ell = \emptyset$)
  - Correspondance de Langlands pour les corps de fonctions
- **Défis :**
  - **Construction du dictionnaire anabélien** en dimension supérieure
    - Ramification (Mumford)
    - 'Sous-variétés spéciales' (variétés de Shimura)
    - p-adique (Kim)
  - **Comprendre** ρ, **du moins im**(ρ) (Conj Grothendieck-Serre-Tate)