ALGÈBRE BILINÉAIRE

Contents

Sauf mention explicite du contraire, si k est un corps, tous les k-espaces vectoriels considérés sont de dimension finie.

On appellera corps pré-euclidien un corps k muni d'un ordre total[1] $\leq$ et on dira qu'il est euclidien si le morphisme de groupes $N_{Id} : k^\times \to k_{>0},\ \lambda \mapsto \lambda^2$ est surjectif et euclidien réellement clos si, de plus,

[1]On rappelle que cela signifie que k est muni d'un ordre total $\leq$ tel que $x \leq y \to x + z \leq y + z$ et $0 \leq x,\ 0 \leq y \to 0 < xy$. Si k est totalement ordonné, $(k, +)$ est sans torsion donc, en particulier, k est de caractéristique 0.

$k(\sqrt{-1}) = k[T]/T^2+1$ est algébriquement clos. En particulier, un polynôme irréductible sur un corps euclidien réellement clos est de degré 1 ou 2. Les corps $\mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{Q}}\cap\mathbb{R}$ par exemple sont euclidiens réellement clos. Tout sous-corps d'un corps euclidien est pré-euclidien.

On appellera corps pré-hermitien un corps k muni d'une involution $\tau \neq Id_k$ tel que le corps des invariants $k^\tau \subset k$ (on rappelle que $[k : k^\tau] = 2$ - *cf.* Lemme 0.1 ci-dessous) est pré-euclidien *viz* muni d'un ordre total $\leq$ et que l'image du morphisme de groupes (appelé norme de k/k^τ) $N_\tau : k^\times \to k^{\tau\times}$, $\lambda \mapsto \lambda\tau(\lambda)$ est contenue dans $k^\tau_{>0} \subset k^{\tau\times}$; on dira qu'il est hermitien si $N_\tau : k^\times \to k^\tau_{>0}$ est surjectif. Les corps $\mathbb{C}$ et $\overline{\mathbb{Q}}$ munis de la conjugaison complexe τ par exemple sont hermitiens. Tout sous-corps d'un corps hermitien est pré-hermitien.

Lemme 0.1. *Soit k un corps muni d'une d'une involution $\tau \neq Id_k$. Alors $[k : k^\tau] = 2$ et il existe $\iota \in k \setminus k^\tau$ tel que $\iota^2 \in k^\tau$ (donc $\tau(\iota) = -\iota$).*

Proof. On admettre que $[k : k^\tau] = 2$ (la preuve utilise un peu de théorie de Galois - *cf. e.g.* [L93, VI, Thm. 1.8]). Si $\alpha \in k \setminus k^\tau$ est quelconque, comme $[k : k^\tau] = 2$, on a $k = k^\tau(\alpha)$; en particulier, le polynôme minimal $P(T) \in k^\tau[T]$ de α sur k^τ est de degré exactement 2. En l'écrivant $P(T) = T^2 + aT + b$ et en notant $\alpha, \beta \in k$ ses racines, on vérifie comme d'habitude que

$$\Delta = a^2 - 4a = (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta = (\alpha-\beta)^2$$

est un carré dans k et que

$$\{\alpha, \beta\} = \{\frac{-a-\sqrt{\Delta}}{2}, \frac{-a+\sqrt{\Delta}}{2}\}$$

donc $\iota := \sqrt{\Delta} \in k \setminus k^\tau$ convient. □

Rem: Sous les hypothèses et avec les notations du Lemme 0.1, les éléments $x \in k \setminus k^\tau$ tels que $x^2 \in k^\tau$ sont alors ceux de $k^{\tau\times}\iota$.

1. Définitions, premières propriétés

1.1. **Formes k-m-linéaires.** Soit k un corps et $V_1, \ldots, V_m, W$ des k-espaces vectoriels. On rappelle que l'ensemble $W^{V_1\times\cdots\times V_m}$ des applications $V_1 \times \cdots \times V_m \to W$ est naturellement muni d'une structure de k-espace vectoriel; on note

$$\mathcal{L}_k(V_1 \times \cdots \times V_m, W) \subset W^{V_1\times\cdots\times V_m}$$

le sous-ensemble des *applications k-multilinéaires viz* des $\varphi : V_1 \times \cdots \times V_m \to W$ telles que pour tout $1 \leq i \leq m$ et pour tout $\underline{v} := (v_j)_{1\leq j\neq i\leq m} \in \prod_{1\leq j\neq i\leq m} V_j$, l'application

$$\varphi_{\underline{v}} : V_i \to W,\ \ v_i \mapsto \varphi_{\underline{v}}(v_i) := \varphi(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_m)$$

est k-linéaire. On vérifie immédiatement que $\mathcal{L}_k(V_1 \times \cdots \times V_m, W)$ est un sous-k-espace vectoriel de $W^{V_1\times\cdots\times V_m}$.

Exercice 1.1. Calculer la dimension de $\mathcal{L}_k(V_1 \times \cdots \times V_m, W)$.

Lorsque $V_1 = V_2 = \cdots = V_m = V$ et $W = k$, on parle de formes k-m-linéaires sur V et on notera $\mathcal{L}_{m,k}(V) := \mathcal{L}_k(V \times \cdots \times V, k)$ pour simplifier. Lorsque $m = 1$, on retrouve les formes k-linéaires usuelles et on notera en général $V^\vee := \mathcal{L}_{1,k}(V)$.

Le groupe symétrique $\mathcal{S}_m$ agit naturellement sur k de deux façons:

(1) par l'action triviale: $\sigma \cdot \lambda = \lambda$ (ce qui correspond au morphisme de groupes $\mathbf{1} : \mathcal{S}_m \to \{1\} \subset k^\times$);
(2) par la signature: $\sigma \cdot \lambda = \epsilon(\sigma)\lambda$ (ce qui correspond au morphisme de groupes $\epsilon : \mathcal{S}_m \to \{\pm 1\} \subset k^\times$).

Le groupe symétrique $\mathcal{S}_m$ agit également naturellement sur V^m par permutation des coordonnées:

$$\sigma \cdot \underline{v} = (v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(m)}).$$

On en déduit une action naturelle de $\mathcal{S}_m$ sur $\mathcal{L}_{m,k}(V)$:

$$\sigma \cdot \varphi : V^m \to k,\ \ \underline{v} \mapsto \varphi(v_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, v_{\sigma^{-1}(m)}).$$

On note
$$\mathcal{L}^{Id}_{m,k}(V) \subset \mathcal{L}_{m,k}(V)$$
le sous-k-espace vectoriel des *formes k-m-linéaires symétriques viz* qui sont $\mathcal{S}_m$-équivariante lorsque l'on munit k de l'action (1), et
$$\mathcal{L}^{\epsilon}_{m,k}(V) \subset \mathcal{L}_{m,k}(V)$$
le sous-k-espace vectoriel des *formes k-m-linéaires antisymétriques viz* qui sont $\mathcal{S}_m$-équivariante lorsque l'on munit k de l'action (2). Explicitement, pour tout $\varphi \in \mathcal{L}_{m,k}(V)$,
$$\varphi \in \mathcal{L}^{Id}_{m,k}(V) \Leftrightarrow \varphi(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(m)}) = \varphi(\underline{v}),\ \ \sigma \in \mathcal{S}_m,\ \underline{v} \in V^m$$
et
$$\varphi \in \mathcal{L}^{\epsilon}_{m,k}(V) \Leftrightarrow \varphi(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(m)}) = \epsilon(\sigma)\varphi(\underline{v}),\ \ \sigma \in \mathcal{S}_m,\ \underline{v} \in V^m.$$

Rem.: (HP):

(1) L'importance des formes k-bilinéaires vient de leur lien avec le produit tensoriel, qui est une construction universelle fondamentale en algèbre commutative. En fait,
$$\mathcal{L}_k(V_1 \times \cdots \times V_m, W) = Hom_k(V_1 \otimes_k \cdots \otimes_k V_m, W) \simeq V_1^{\vee} \otimes_k \cdots \otimes_k V_m^{\vee} \otimes_k W.$$

(2) L'action de $\mathcal{S}_m$ sur $\mathcal{L}_{m,k}(V)$ est par automorphismes k-linéaires *i.e.* $\mathcal{L}_{m,k}(V)$ est une représentation k-linéaire du groupe $\mathcal{S}_m$. Si k est de caractéristique 0, la théorie des représentations linéaires des groupes finis assure que $\mathcal{L}_{m,k}(V)$ se décompose en la somme directe de ses composantes isotypiques *viz* on a un isomorphisme $\mathcal{S}_m$-équivariant
$$\mathcal{L}_{m,k}(V) \simeq \oplus_{I \in Irr_k(\mathcal{S}_m)} I^{\oplus m_I},$$
où on a noté $Irr_k(\mathcal{S}_m)$ un système de représentants des classes d'isomorphismes de représentations k-linéaires simples de $\mathcal{S}_m$. Le sous-k-espace vectoriel $\mathcal{L}^{Id}_{m,k}(V) \subset \mathcal{L}_{m,k}(V)$ peut aussi s'interpréter comme la composant isotypique correspondant à la représentation triviale et le sous-k-espace vectoriel $\mathcal{L}^{\epsilon}_{m,k}(V) \subset \mathcal{L}_{m,k}(V)$ comme la composant isotypique correspondant à la représentation donnée par la signature (ce sont les deux seules représentations k-linéaires irréductibles de dimension 1 de $\mathcal{S}_m$).

1.2. **Formes k-bilinéaires.** Lorsque $m = 2$ on dit forme k-bilinéaire plutôt que forme k-2-linéaire. Dans ce cas,
$$\mathcal{L}^{Id}_{2,k}(V) := \{\varphi \in \mathcal{L}_{2,k}(V) \mid \varphi(v_2, v_1) = \varphi(v_1, v_2)\},\ \ \mathcal{L}^{\epsilon}_{2,k}(V) := \{\varphi \in \mathcal{L}_{2,k}(V) \mid \varphi(v_2, v_1) = -\varphi(v_1, v_2)\}$$
Si k est muni d'une involution $Id \neq \tau$, on dispose d'un troisième type d'applications 2-$k$linéaires distinguées, les *formes τ-hermitiennes*:
$$\mathcal{L}^{\tau}_{2,k}(V) := \{\varphi \in \mathcal{L}_{2,k^{\tau}}(V) \mid \varphi(v_1, -) \in \mathcal{L}_{1,k}(V),\ v_1 \in V,\ \ \varphi(v_2, v_1) = \tau(\varphi(v_1, v_2))\} \subset \mathcal{L}_{2,k}(V \times {}^{\tau}V, k).$$
Ici, il faut prendre garde au fait que la structure de k-espace vectoriel sur la deuxième composante n'est pas celle de V (not.: $\lambda \cdot v$) mais le twist de celle-ci par τ (not.: $\lambda \cdot_{\tau} v$) [2] *viz*
$$\lambda \cdot_{\tau} v = \tau(\lambda) \cdot v,\ \ \lambda \in k,\ v \in V.$$
On note ${}^{\tau}V$ le groupe additif $(V, +)$ muni de la loi extérieure $\cdot_{\tau} : k \times V \to V$. Si V' est un autre k-espace vectoriel, on dit parfois que les morphismes de k-espaces vectoriels $f : V' \to {}^{\tau}V$ sont les applications τ-semilinéaires $f : V' \to V$. Dans tous les cas, ça veut simplement dire que
$$f(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot_{\tau} f(v) = \tau(\lambda) \cdot f(v)...$$
En pratique, on sera surtout dans la situation où $k \subset \mathbb{C}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$ stable sous la conjugaison complexe $\tau := \overline{(-)}$ et la principale raison (dans le cade de l'Agreg) pour laquelle on introduit les formes τ-hermitiennes est que sur $\mathbb{C}$, ce sont les bons objets à considérer si l'on veut définir une notion de produit scalaire sur les $\mathbb{C}$-espaces vectoriels.

[2] En effet, pour tout $\varphi \in \mathcal{L}^{\tau}_{2,k}(V)$ et pour tout $v_1 \in k$
$$\varphi(v_1, \lambda v_2) = \tau(\varphi(\lambda v_2, v_1)) = \tau(\lambda \varphi(v_2, v_1)) = \tau(\lambda)\tau^2(\varphi(v_1, v_2)) = \tau(\lambda)\varphi(v_1, v_2),\ \ v_2 \in V,\ \lambda \in k.$$

Rem.: (Formes k-bilinéaires antisymétriques *vs* formes k-bilinéaires alternées). Notons

$$V \overset{v\mapsto (v,v)}{\tilde{\to}} \Delta_V \subset V\times V$$

les sous-k-espace vectoriel diagonal. On peut également considéré le sous-k-espace vectoriel

$$\mathcal{A}_{2,k}(V) := \ker(-|_{\Delta_V} : \mathcal{L}_{2,k}(V)\to k^V) = \{\varphi\in\mathcal{L}_{2,k}(V) \mid \varphi(v,v)=0,\ v\in V\}\subset \mathcal{L}_{2,k}(V)$$

des *formes k-bilinéaires alternées.* On a toujours $\mathcal{A}_{2,k}(V)\subset\mathcal{L}^{\epsilon}_{2,k}(V)$ car pour tout $\varphi\in\mathcal{A}_{2,k}(V)$ et $v_1,v_2\in V$, on a

$$0=\varphi(v_1+v_2,v_1+v_2)=\varphi(v_1,v_1)+\varphi(v_1,v_2)+\varphi(v_2,v_1)+\varphi(v_2,v_2)=\varphi(v_1,v_2)+\varphi(v_2,v_1).$$

Inversement, pour tout $\varphi\in\mathcal{L}^{\epsilon}_{2,k}(V)$ et $v\in V$, on a $\varphi(v,v)=-\varphi(v,v)$ *viz* $2\varphi(v,v)=0$. Donc, si k est de caractéristique $\neq 2$, on a $\mathcal{A}_{2,k}(V)=\mathcal{L}^{\epsilon}_{2,k}(V)$. Par contre, si k est de caractéristique 2, l'inclusion $\mathcal{A}_{2,k}(V)\subset\mathcal{L}^{\epsilon}_{2,k}(V)$ est stricte en général (*cf.* Sous-section 1.2.2 (0)).

L'objet de l'algèbre bilinéaire est l'étude des formes k-bilinéaires. Le cas où k est de caractéristique 2 présente des pathologies particulières, notamment dans l'étude des formes k-bilinéaires symétriques. **Dans ce cours, on se limitera presque toujours au cas où k est de caractérique** $p\neq 2$. On notera $\mathcal{L}^{\#}_{2,k}(V)$ si on ne veut pas distinguer $\#=Id,\epsilon,\tau$. On note également $k^{\#}=k$, ${}^{\#}=V$ si $\#=Id,\epsilon$ et $k^{\#}:=k^{\tau}$, ${}^{\#}={}^{\tau}V$ si $\#=\tau$. Le groupe $GL_k(V)$ agit naturellement sur $\mathcal{L}^{\#}_{2,k}(V)$ par

$$u\cdot\varphi : V\times V\to k,\ \ (v_1,v_2)\mapsto\varphi(u^{-1}(v_1),u^{-1}(v_2)).$$

La première question que l'on peut se poser est celle de la classification des orbites $\mathcal{L}^{\#}_{2,k}(V)/GL_k(V)$ et, pour un élément $\varphi\in\mathcal{L}^{\#}_{2,k}(V)$, la détermination du *groupe orthogonal* de φ *viz* du stabilisateur

$$O_k(\varphi) := Stab_{GL_k(V)}(\varphi)\subset GL_k(V).$$

Plutôt que de se fixer un k-espace vectoriel V et un objet $\varphi\in\mathcal{L}^{\#}_{2,k}(V)$ il est parfois plus pratique de considérer les paires (V,φ); elles formes les objets d'une catégorie $\mathcal{C}^{\#}_k$ dont les morphisms $f:(V,\varphi)\to(V',\varphi')$ sont les isométries *viz* les applications k-linéaires $f:V\to V'$ telles que

$$\varphi'(f(v_1),f(v_2))=\varphi(v_1,v_2),\ \ v_1,v_2\in V.$$

On dit que $\mathcal{C}^{\#}_k$ est la catégorie des *k-espaces symétriques ou quadratiques* si $\#=Id$, *antisymétriques ou symplectiques* si $\#=\epsilon$, *τ-hermitiens* si $\#=\tau$. Avec ce point de vue, $O_k(\varphi)$ est le groupe des automorphismes de (V,φ) dans $\mathcal{C}^{\#}_k$.

1.2.1. *Interpétation matricielle.* Soit $\underline{\epsilon}=\epsilon_1,\dots,\epsilon_r$ une k-base de V. Pour tout $\varphi)\in\mathcal{L}_{2,k}(V)$, notons

$$\Phi := (\varphi)_{\underline{\epsilon}} := (\varphi(\epsilon_i,\epsilon_j))_{1\leq i,j\leq r}\in M_r(k).$$

Pour tout $v_i=\sum_{1\leq j\leq r} v_{i,j}\epsilon_j\in V$, avec $V_i:=(v_i)_{\underline{\epsilon}}=(v_{i,j})_{1\leq j\leq r}\in M_{r,1}(k)$ $i=1,2$, on a

$$\varphi(v_1,v_2)={}^tV_1\Phi V_2 \text{ avec } \begin{array}{l} {}^t\Phi=\Phi \text{ ssi } \varphi\in\mathcal{L}^{Id}_{2,k}(V);\\ {}^t\Phi=-\Phi \text{ ssi } \varphi\in\mathcal{L}^{\epsilon}_{2,k}(V);\\ {}^t\Phi=-\Phi \text{ et les termes diagonaux de } \Phi \text{ sont 0 ssi } \varphi\in\mathcal{L}^{\epsilon}_{2,k}(V).\end{array}$$

De même, si $\varphi\in\mathcal{L}^{\tau}_{2,k^{\tau}}(V)$, on a

$$\varphi(v_1,v_2)={}^tV_1\Phi{}^{\tau}V_2 \text{ avec } {}^t\Phi={}^{\tau}\Phi.$$

Autrement dit, l'isomorphisme de k-espaces vectoriels $(-)_{\underline{\epsilon}}:\mathcal{L}_{2,k}(V)\tilde{\to}M_r(k)$ identifie $\mathcal{L}^{Id}_{2,k}(V)\subset\mathcal{L}_{2,k}(V)$ au sous-k-espace vectoriel des matrices symétriques (${}^t\Phi=\Phi$), $\mathcal{L}^{\epsilon}_{2,k}(V)\subset\mathcal{L}_{2,k}(V)$ au sous-k-espace vectoriel des matrices antisymétriques (${}^t\Phi=-\Phi$) et $\mathcal{L}^{\tau}_{2,k^{\tau}}(V)\subset\mathcal{L}_{2,k}(V)$ au sous-k^{τ}-espace vectoriel des matrices τ-hermitiennes (${}^t\Phi={}^{\tau}\Phi$). Pour tout $u\in GL_k(V)$, avec $U:=(u)_{\underline{\epsilon}}$, on a

$$(u\cdot\varphi)_{\underline{\epsilon}}={}^tU^{-1}\Phi U^{-1}.$$

En particulier, l'isomorphisme de groupes $(-)_{\underline{\epsilon}} : GL_k(V)\tilde{\to}GL_r(k)$ identifie $O_k(\varphi) \subset GL_k(V)$ au sous-groupe

$$O_k(\Phi) := \{U \in GL_r(k) \mid {}^tU^{-1}\Phi U^{-1} = \Phi\} = \{U \in GL_r(k) \mid {}^tU\Phi U = \Phi\} \subset GL_r(k) \text{ si } \# = Id, \epsilon,$$

et au sous-groupe

$$O_k(\Phi) := \{U \in GL_r(k) \mid {}^tU^{-1}\Phi^\tau U^{-1} = \Phi\} = \{U \in GL_r(k) \mid {}^tU\Phi^\tau U = \Phi\} \subset GL_r(k) \text{ si } \# = \tau.$$

Exercice 1.2. Calculer les k-dimensions de $\mathcal{L}^{Id}_{2,k}(V)$ et $\mathcal{L}^{\epsilon}_{2,k}(V)$, et montrer que $\mathcal{L}_{2,k}(V) = \mathcal{L}^{Id}_{2,k}(V)\oplus\mathcal{L}^{\epsilon}_{2,k}(V)$.

1.2.2. *Exemples.*

(0) En utilisant la description matricielle, il est facile de construire des éléments de $\mathcal{L}^{\#}_{2,k^\#}(k^r)$. Par exemple, si k est de caractéristique 2, pour tout $\alpha \in k$ la forme

$$\varphi_\alpha : k^2 \times k^2 \to k,\ \ ((x_{1,1}, x_{2,1}), (x_{1,2}, x_{2,2})) \mapsto x_{1,1}x_{1,2} + \alpha(x_{1,1}x_{2,2} - x_{2,1}x_{1,2}) + x_{2,1}x_{2,2}$$

est antisymétrique (et symétrique si $\alpha = 1$) mais elle n'est pas alternée car, dans la base canonique $\underline{\epsilon} = ((1, 0), (0, 1))$,

$$(\varphi)_{\underline{\epsilon}} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix}$$

(par exemple $\varphi_\alpha((1, 0), (1, 0)) = 1$).

(1) Si V est un k-espace vectoriel de dimension r et $\underline{\epsilon}$ est une k-base de V, le déterminant

$$det_{\underline{\epsilon}} : V^r \to k \in \mathcal{L}^{\epsilon}_{r,k}(V).$$

En particulier, pour $r = 2$, on obtient un élément de $\mathcal{L}^{\epsilon}_{2,k}(V)$. Dans k^2 muni de la base canonique $\underline{\epsilon} = ((1, 0), (0, 1))$, on a explicitement

$$det_{\underline{\epsilon}} : k^2 \times k^2 \to k,\ \ (x_{1,1}, x_{2,1}), (x_{1,2}, x_{2,2})) \mapsto x_{1,1}x_{2,2} - x_{1,2}x_{2,1};$$

la matrice correspondante est

$$(det_{\underline{\epsilon}})_{\underline{\epsilon}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) (Traces) Pour tout k-espace vectoriel V, on a

$$End_k(V) \times End_k(V) \to k,\ \ (f, g) \mapsto Tr(g \circ f) \in \mathcal{L}^{Id}_{2,k}(End_k(V))$$

En termes matriciels, on a

$$M_r(k) \times M_r(k) \to k,\ \ (M, N) \mapsto Tr(MN) \in \mathcal{L}^{Id}_{2,k}(M_r(k)).$$

On peut modifier un peu la définition pour construire

$$M_r(k) \times M_r(k) \to k,\ \ (M, N) \mapsto Tr(M^\tau N) \in \mathcal{L}^{\tau}_{2,k^\tau}(M_r(k)).$$

(3) (Intégrales) Pour tout sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel V de $\mathbb{R}$-dimension finie des applications continues $[0, 1] \to \mathbb{R}$ (*e.g.* $V = \mathbb{R}_{\leq r}[T]$, $V = \mathbb{R}Id \oplus \mathbb{R}sin(-) \oplus \mathbb{R}cos(-)$ *etc*), on a

$$V \times V \to \mathbb{R},\ \ (f, g) \mapsto \int_{[0,1]} f(t)g(t)dt \in \mathcal{L}^{Id}_{2,\mathbb{R}}(V).$$

De même, pour tout sous-$\mathbb{C}$-espace vectoriel V de $\mathbb{C}$-dimension finie des applications continues $[0, 1] \to \mathbb{C}$, on a

$$V \times V \to \mathbb{C},\ \ (f, g) \mapsto \int_{[0,1]} f(t)\overline{g(t)}dt \in \mathcal{L}^{\overline{(-)}}_{2,\mathbb{R}}(V).$$

(4) (Pullbacks) Si $(V, \varphi) \in \mathcal{C}^{\#}_k$ et $f : W \to V$ est une application k-linéaire, on a encore $(W, f^*\varphi) \in \mathcal{C}^{\#}_k$, où

$$f^*\varphi) : W \times W \to k,\ (w_1, w_2) \mapsto \varphi(f(w_1), f(w_2)).$$

On peut combiner cette observation avec l'exemple (2) pour obtenir des exemples intéressants:

(i) (HP ?) Si K/k est une extension finie de corps, on a une application k-linéaire naturelle $L_- : K \to End_k(K)$ définie par $L_x(y) = xy$. La forme

$$Tr_{K/k} : K \times K \to k, \ \ (x_1, x_2) \mapsto Tr(L_{x_1} \circ L_{x_2}) \in \mathcal{L}^{Id}_{2,k}(K)$$

joue un rôle important en théorie algébrique des nombres (*cf.* *e.g.* [VI, §5, L93]).

(ii) (HP) Si $\mathfrak{g} \subset End_k(V)$ est une sous-k-algèbre de Lie *viz* un sous-k-espace vectoriel tel que pour tout $f, g \in \mathfrak{g}$, $[f, g] := g \circ f - f \circ g \in \mathfrak{g}$, on a une application k-linéaire naturelle $ad_- : \mathfrak{g} \to End_k(\mathfrak{g})$ définie par $ad_f(g) = [f, g]$. La forme

$$\kappa_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to k, \ \ (f_1, f_2) \mapsto \kappa(ad_{f_1} \circ ad_{f_2}) \in \mathcal{L}^{Id}_{2,k}(\mathfrak{g})$$

\- appelée forme de Killing de $\mathfrak{g}$ - joue un rôle important dans l'étude des k-algèbres de Lie.

(5) (HP) (Cohomologie milieu) Si X est une variété algébrique projective lisse géométriquement connexe de dimension d sur un corps k, on peut, pour l'étudier, lui associer de façon fonctorielle plusieurs "algèbres cohomologiques" qui sont des Q-algèbres graduées de la forme $H^\bullet(X) = \oplus_{1 \leq i \leq 2d} H^i(X)$ et vérifiant certaines symmétries (dualité de Poincaré, formules de Lefschetz *etc.*); ici Q est un corps de caractéristique 0 qui, selon le cas, est $\mathbb{Q}, \mathbb{Q}_p$, k (si k est de caractéristique 0). On dispose notamment d'une application trace $tr : H^{2d}(X)(d) \tilde{\to} Q$ qui permet de définir pour tout i, en utilisant le produit de $H^\bullet(X)$, un accouplement

$$H^i(X) \times H^{2d-i}(X)(i) \to H^{2d}(X)(d) \overset{tr}{\tilde{\to}} Q.$$

En degré milieu $i = d$, on a en particulier une forme Q-bilinéaire (oublier le "twist de Tate" "(d)"

$$H^d(X) \times H^d(X)(d) \to Q$$

qui est symétrique si d est paire et antisymétrique sinon. Cette forme joue un rôle absolument fondamental en géométrie algébrique.

1.2.3. *Noyau, rang, discriminant.* Pour tout $(V, \varphi) \in \mathcal{C}^{\#}_k$, on a deux applications k-linéaires:

$$L_\varphi : V \to {}^{\#}(V^\vee), \ \ v \mapsto \varphi(-, v), \ \ R_\varphi : V \to ({}^{\#}V)^\vee, \ \ v \mapsto \varphi(v, -),$$

dont les noyaux coincident. On dit que

$$\ker(\varphi) := \ker(L_\varphi) = \ker(R_\varphi)$$

est le *noyau de* φ et que

$$rang(\varphi) := dim_k(V) - dim_k(\ker(\varphi)) = rang(L_\varphi) = rang(R_\varphi) (\geq 0)$$

est le *rang de* φ.

Par définition de $\ker(\varphi)$, on a les diagrammes commutatifs canoniques de k-espaces vectoriels

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl] \arrow[d, "L_\varphi"] \\ V/\ker(\varphi) \arrow[r, hook, "\bar{v}\mapsto\varphi(-,v)"] \arrow[dr, dotted, "\simeq", "\bar{v}\mapsto\bar{\varphi}(-,\bar{v})"'] & {}^{\#}(V^\vee) \\ & {}^{\#}((V/\ker(\varphi))^\vee) \arrow[u, hook, "-\circ p_{\ker(\varphi)}"'] \end{tikzcd} \quad , \quad \begin{tikzcd} & V \arrow[dl] \arrow[d, "R_\varphi"] \\ V/\ker(\varphi) \arrow[r, hook, "\bar{v}\mapsto\varphi(v,-)"] \arrow[dr, dotted, "\simeq", "\bar{v}\mapsto\bar{\varphi}(\bar{v},-)"'] & ({}^{\#}V)^\vee \\ & ({}^{\#}(V/\ker(\varphi)))^\vee \arrow[u, hook, "-\circ p_{\ker(\varphi)}"'] \end{tikzcd}$$

et la forme k-bilinéaire induite

$$\bar{\varphi} : V/\ker(\varphi) \times {}^{\#}(V/\ker(\varphi)) \to k, \ \ (\bar{v}_1, \bar{v}_2) \mapsto \bar{\varphi}(\bar{v}_1, \bar{v}_2) = \bar{\varphi}(-, \bar{v}_2)(\bar{v}_1) = \bar{\varphi}(\bar{v}_1, -)(\bar{v}_2)$$

est encore un élément de $\mathcal{L}^{\#}_{2,k}(V/\ker(\varphi))$.

Si $\ker(\varphi) = 0$ on dit que $\varphi \in \mathcal{L}^{\#}_{2,k}(V)$ est *non-dégénérée*; dans ce cas, $L_\varphi : V \to {}^{\#}(V^\vee)$ et $R_\varphi : V \to ({}^{\#}V)^\vee$ sont des isomorphismes de $k^{\#}$-espaces vectoriels. Par construction, la forme k-bilinéaire

$\bar{\varphi} : V/\ker(\varphi) \times {}^{\#}(V/\ker(\varphi)) \to k$ est non-dégénérée; on dira que c'est la *forme k-bilinéaire non-dégénérée associée à φ.*

Pour tout $u \in GL_k(V)$ on a $u(\ker(\varphi)) = \ker(u \cdot \varphi)$ donc $rang(u \cdot \varphi) = rang(\varphi)$; autrement dit, l'application rang se factorise en

$$\begin{tikzcd} \mathcal{L}^{\#}_{2,k}(V) \arrow[r, "rang"] \arrow[d] & \mathbb{Z}_{\geq 0} \\ \mathcal{L}^{\#}_{2,k}(V)/GL_k(V) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Si $\underline{\epsilon}^\vee = \epsilon_1^\vee, \dots, \epsilon_r^\vee$ est la k-base de $V^\vee$ duale de $\underline{\epsilon}$, on peut également interpréter $\Phi = (\varphi)_{\underline{\epsilon}}$ comme la matrice de $V \overset{v \mapsto \varphi(-,v)}{\to} V^\vee$ dans les bases $\underline{\epsilon}, \underline{\epsilon}^\vee$; en particulier,

$$rang(\varphi) = rang(\Phi).$$

Enfin, comme $det({}^tU\Phi U) = det(U)^2 det(\Phi)$ et $det({}^tU\Phi^\tau U) = det(U)\tau(det(U))\Phi = N_\tau(det(U))det(\Phi)$, pour toute k-base $\underline{\epsilon}$ de V, les applications *discriminants*

$$\delta := \delta_{\underline{\epsilon}} \mathcal{L}^{\#}_{2,k}(V) \overset{\varphi \mapsto det((\varphi)_{\underline{\epsilon}})}{\to} k \twoheadrightarrow k/(k^\times)^2, \ \ \# = Id, \epsilon$$

et

$$\delta := \delta_{\underline{\epsilon}} \mathcal{L}^{\tau}_{2,k}(V) \overset{\varphi \mapsto det((\varphi)_{\underline{\epsilon}})}{\to} k \twoheadrightarrow k/N_\tau(k^\times), \ \ \# = \tau$$

sont indépendantes de $\underline{\epsilon}$ et se factorisent respectivement en

$$\begin{tikzcd} \mathcal{L}^{\#}_{2,k}(V) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] & k/(k^\times)^2 \\ \mathcal{L}^{\#}_{2,k}(V)/GL_k(V) \arrow[ur] & \end{tikzcd}, \ \ \# = Id, \epsilon \ \text{ et } \ \begin{tikzcd} \mathcal{L}^{\tau}_{2,k}(V) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] & k/N_\tau(k^\times) \\ \mathcal{L}^{\tau}_{2,k}(V)/GL_k(V) \arrow[ur] & \end{tikzcd}, \ \ \# = \tau.$$

1.2.4. *φ-orthogonalité, isotropie.* Pour tout $(V, \varphi) \in \mathcal{C}^{\#}_k$, et sous-$k$-espace vectoriel $W \subset V$, on note

$$W^{\perp_\varphi} := \ker((-)|_W \circ L_\varphi : V \to {}^{\#}(W^\vee)) = \ker((-)|_W \circ R_\varphi : V \to ({}^{\#}W)^\vee)$$

le *sous-k-espace vectoriel φ-orthogonal à W*. Concrètement, c'est le sous-k-espace vectoriel des $v \in V$ tels que $\varphi(W, v) = 0$ (ou, de façon équivalente, $\varphi(v, W) = 0$). Par définition, on a des suites exactes de k-espaces vectoriels

$$0 \to W^{\perp_\varphi} \to V \overset{v \mapsto \varphi(-,v)|_W}{\to} {}^{\#}(W^\vee), \ \ 0 \to W^{\perp_\varphi} \to V \overset{v \mapsto \varphi(v,-)|_W}{\to} ({}^{\#}W)^\vee.$$

On dit que deux sous-k-espaces vectoriels $W, W' \subset V$ sont *φ-orthogonaux* s'ils vérifient les conditions équivalentes suivantes

(i) $W' \subset W^{\perp_\varphi}$;
(ii) $W \subset W'^{\perp_\varphi}$;
(iii) $\varphi(W, W') = 0$;

on notera alors $W \perp_\varphi W'$. Si $W \perp_\varphi W'$ et $W \oplus W'$, on notera $W \oplus^{\perp_\varphi} W'$. Plus généralement, on dira que des sous-k-espaces vectoriels $W_1, \dots, W_r \subset V$ sont *φ-orthogonaux* si $W_i \perp_\varphi W_j$, $1 \leq i \neq j \leq r$ et qu'ils sont *en somme directe φ-orthogonale* s'ils sont φ-orthogonaux et en somme directe, ce que l'on notera $\oplus^{\perp_\varphi}_{1 \leq i \leq r} W_i \subset V$. On dira qu'une famille de vecteurs $w_1, \dots, w_r \in V$ est *φ-orthogonale* si les kw_i, $1 \leq i \leq r$ sont φ-orthogonaux et que c'est une *k-base φ-orthogonale* si $V = \oplus^{\perp_\varphi}_{1 \leq i \leq r} kw_i$. Enfin, on dit qu'un sous-k-espace vectoriel $W \subset V$ est *φ-isotrope* si $W \perp_\varphi W$ et qu'un vecteur $v \in V$ est *φ-isotrope* si $kv \subset V$ est φ-isotrope. On notera

$$Iso(\varphi) := \{v \in V \mid \varphi(v, v) = 0\} \subset V$$

le sous-ensemble des vecteurs φ-isotropes; c'est un cône (*viz* est stable par l'action extérieure de k). Si $Iso(\varphi)=0$, on dit que (V,φ) est *anisotrope.*

Remarque 1.3. Tautologiquement $\ker(\varphi)\subset Iso(\varphi)$ mais l'inclusion est stricte en générale. Par exemple la forme k-bilinéaire symétrique (resp. antisymétrique) sur k^2 données par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \ \text{(resp.} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix})$$

est non-dégénérée mais son cône isotrope est $Iso(\varphi)=\{(x,\pm x)\mid x\in k\}$ (resp. $Iso(\varphi)=k^2$).

Pour tout $\varphi\in\mathcal{L}^{\#}_{2,k}(V)$ et sous-k-espace vectoriel $W\subset V$, la restriction $\varphi_W:=\varphi|_{W\times W}:W\times W\to k$ est encore un élément de $\mathcal{L}^{\#}_{2,k}(W)$. Si $V=\oplus_{1\leq i\leq r}W_i$ est une décomposition en somme directe de sous-k-espaces vectoriels et que pour chaque $i=1,\dots,r$ on se donne $\varphi_i\in\mathcal{L}^{\#}_{2,k}(W_i)$, l'application

$$\varphi:=\oplus_{1\leq i\leq r}\varphi_i:V\times V\to k$$

définie par

$$\varphi(v_1=\oplus_{1\leq i\leq r}w_{1,i},v_2=\oplus_{1\leq i\leq r}w_{2,i})=\sum_{1\leq i\leq r}\varphi_i(w_{1,i},w_{2,i})$$

est un élément de $\mathcal{L}^{\#}_{2,k}(V)$ tel que $\oplus^{\perp_\varphi}_{1\leq i\leq r}W=V$; on notera

$$(V,\varphi)=\oplus^{\perp}_{1\leq i\leq r}(W_i,\varphi_i).$$

la décomposition en somme directe φ-orthogonale correspondante. Pour classifier les espaces (V,φ), la première étape est de déterminer des décomposition en somme directe φ-orthogonale de V telles que les sous-espaces (W_i,φ_i), $i=1,\dots,r$ soient aussi simples que possible - idéalement $dim_k(W_i)=1$, $i=1,\dots,r$.

Le Lemme 1.4 est l'outil de base; il va permettre de ramener systématiquement la classification des objets de $\mathcal{C}^{\#}_k$ au cas non-dégénéré et de montrer que tout objet (V,φ) de $\mathcal{C}^{\#}_k$ se décompose comme somme directe φ-orthogonale de sous-k-espaces non-dégénérés minimaux.

Lemme 1.4. *Soit* $(V,\varphi)\in\mathcal{C}^{\#}_k$.

(1) Supposons donnée une décomposition $(V,\varphi)=\oplus^{\perp}_{1\leq i\leq r}(W_i,\varphi_i)$. *Alors,* $\ker(\varphi)=\oplus_{1\leq i\leq r}\ker(\varphi_i)$*; en particulier,* (V,φ) *est non dégénéré ssi* (W_i,φ_i) *est non dégénéré* $i=1,\dots,r$.

(2) ***Slogan:*** *Supposons que* (V,φ) *est non dégénéré. Pour tout sous-k-espace vectoriel* $W\subset V$,

$$dim_k(V)=dim_k(W)+dim_k(W^{\perp_\varphi}),$$

et les CSSE:

(i) $(W,\varphi|_{W\times W})$ *est non dégénéré;*

(ii) $V=W\oplus W^{\perp_\varphi}$*;*

(iii) $(W^{\perp_\varphi},\varphi|_{W^{\perp_\varphi}\times W^{\perp_\varphi}})$ *est non dégénéré.*

(3) Pour toute décomposition $V=\ker(\varphi)\oplus W$, *on a automatiquement* $\ker(\varphi)\perp_\varphi W$, $(W,\varphi|_{W\times W})$ *est non dégénéré, et si* $V=\ker(\varphi)\oplus W=\ker(\varphi)\oplus W'$ *sont deux telles décomposition, il existe une isométrie* $f:(W,\varphi|_{W\times W})\tilde{\to}(W',\varphi|_{W'\times W'})$.

Proof. (1) Pour tout $v_i=\oplus_{1\leq j\leq r}v_{i,j}$ avec $v_{i,j}\in W_j$, $j=1,\dots,r$ on a, par définition,

$$(*)\ \ \varphi(v_1,v_2)=\sum_{1\leq j\leq r}\varphi_j(v_{1,j},v_{2,j}).$$

En particulier, $\oplus_{1\leq j\leq r}\ker(\varphi_j)\subset\ker(\varphi)$. L'inclusion inverse s'obtient en appliquant $(*)$ à $v_2=V_{2,j}\in W_j$ arbitraire, $j=1,\dots,r$.

(2) Par symétrie, il suffit de montrer (i) $\Leftrightarrow$ (ii). Le fait que (V,φ) est non dégénéré implique que dans le diagramme canonique

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, "v\mapsto\varphi(-,v)|_W"] \arrow[d, "v\mapsto\varphi(-,v)"', "\simeq"] & & {}^{\#}(W^\vee) \\ {}^{\#}(V^\vee) \arrow[urr, two heads, "f\mapsto f|_W,"'] & & \end{tikzcd}$$

la flèche verticale est un isomorphisme de k-espaces vectoriels. Comme la flèche diagonale est surjective, on en déduit que la flèche horizontale est aussi surjective. En termes de dimension, on a donc

$$dim_k(V) = dim_k(W) + dim_k(W^{\perp_\varphi}).$$

Il suffit donc de montrer que (i) $\Leftrightarrow$ $W \cap W^{\perp_\varphi} = 0$. Mais, par définition du noyau, $W \cap W^{\perp_\varphi} = \ker(\varphi|_{W\times W})$.

(3) La première partie de l'assertion est tautologique. Pour la deuxième partie, soit $w_0 \in \ker(\varphi|_{W\times W})$, on a $\varphi(w_0,V) \subset \varphi(w_0,\ker(\varphi)) + \varphi(w_0,W) = 0$ donc $w_0 \in W \cap \ker(\varphi) = 0$. Pour la dernière partie, la projection canonique $p_W : V = \ker(\varphi) \oplus W \twoheadrightarrow W$ sur W parallèlement à $\ker(\varphi)$ se factorise en $\overline{p}_W : V/\ker(\varphi)\tilde{\to}W$, dont on vérifie sur les définitions que c'est une isométrie

$$\overline{p}_W : (V/\ker(\varphi),\overline{\varphi})\tilde{\to}(W,\varphi|_{W\times W}).$$

(En écrivant $v_1 = k_i + w_i$ avce $k_i \in \ker(\varphi)$, $w_i \in W$, $i = 1,2$, on a

$$\overline{\varphi}(\overline{v}_1,\overline{v}_2) \overset{\text{def}}{=} \varphi(v_1,v_2) = \varphi(w_1,w_2) \overset{\text{def}}{=} \varphi|_{W\times W}(p_W(v_1),p_W(v_2)))$$

□

Pour tout k-espace vectoriel V et $\varphi,\varphi' \in \mathcal{L}^{\#}_{2,k}(V)$, s'il existe $u \in GL_k(V)$ tel que $\varphi' = u\cdot\varphi$, on a $u(\ker(\varphi')) = \ker(\varphi)$ donc si $V = \ker(\varphi') \oplus W'$ est une décomposition en somme directe (automatiquement φ'-orthogonale), $V = \ker(\varphi) \oplus u(W')$ est une décomposition en somme directe (automatiquement φ-orthogonale) et la restriction $u : W' \to u(W')$ induit tautologiquement une isométrie

$$u : (W',\varphi'|_{W'\times W'})\tilde{\to}(u(W'),\varphi|_{u(W')\times u(W')}).$$

Au lieu de fixer V et de considérer l'action de $GL_k(V)$ sur $\mathcal{L}^{\#}_{2,k}(V)$ on peut ne fixer que la k-dimension r de V et considérer la relation d'équivalence $\sim$ "être isométriques" sur l'ensemble $\mathcal{C}^{\#}_k(r)$ des objets $(V,\varphi) \in \mathcal{C}^{\#}_k$ tels que le k-espace vectoriel sous-jacent V soit de k-dimension r. L'application canonique

$$\mathcal{L}^{\#}_{2,k}(V)/GL_k(V)\tilde{\to}\mathcal{C}^{\#}_k(r)/\sim,\ \ \varphi \mapsto [(V,\varphi)]$$

donc cela revient au même de classifier les orbites de $\mathcal{L}^{\#}_{2,k}(V)$ sous $GL_k(V)$ ou les classes déquivalences de $\sim$ sur $\mathcal{C}^{\#}_k(r)$. Avec le second point de vue, la discussion ci-dessus montre que:

Slogan: $(V,\varphi) \sim (V'\varphi')$ ssi $rang(\varphi) = rang(\varphi')$ et $(V/\ker(\varphi),\overline{\varphi}) \sim (V'/\ker(\varphi'),\overline{\varphi}')$.

Autrement dit, pour le problème de la classification, on peut se restreindre au cas des formes non-dégénérées. Une condition nécessaire pour que $(V,\varphi) \sim (V'\varphi')$ est que $rang(\varphi) = rang(\varphi')$, $\delta(\overline{\varphi}) = \delta(\overline{\varphi}')$. En général, cette condition n'est pas suffisante.

2. Structure des espaces symétriques et τ-hermitiens

2.1. Structure des espaces symétriques.

Dans cette section, on note simplement $\mathcal{C}_k := \mathcal{C}^{Id}_k$, $N := N_{Id} := (-)^2 : k^\times \to k^\times$.

2.1.1. *Existence de k-bases φ-orthogonales.* Pour les espaces symétriques on a toujours l'existence de k-bases φ-orthogonales. Commençons par observer que pour tout $(V,\varphi) \in \mathcal{L}^{Id}_{2,k}(V)$, on a[3]

Identité de polarisation:

$$\varphi(v_1,v_2) = \frac{1}{2}(\varphi(v_1+v_2,v_1+v_2) - \varphi(v_1,v_1) - \varphi(v_2,v_2)) = \frac{1}{4}(\varphi(v_1+v_2,v_1+v_2) - \varphi(v_1-v_2,v_1-v_2)).$$

En particulier, pour tout k-espace vectoriel V, si on note $\Delta_V := \{(v,v) \mid v \in V\} \subset V \times V$ la diagonale, l'application k-linéaire de restriction

$$(-)|_{\Delta_V} : \mathcal{L}^{Id}_{2,k}(V) \to k^V, \ \ \varphi \mapsto \varphi|_{\Delta_V}$$

est injective. En particulier, puisque par définition $(\varphi|_{\Delta_V})^{-1}(0) = Iso(\varphi) \subset V$, on a

$$\varphi \neq 0 \Leftrightarrow Iso(\varphi) \subsetneq V.$$

Proposition 2.1. *Pour tout $(V,\varphi) \in \mathcal{C}^{Id}_k$, il existe une k-base de V qui est φ-orthogonale.*

Proof. Si $\ker(\varphi) = V$, toute k-base de V est φ-orthogonale. Si $\ker(\varphi) \subsetneq V$, toute décomposition en somme directe $V = \ker(\varphi) \oplus W$ est automatiquement φ-orthogonale donc la concaténation $\underline{v} = (\underline{v}_0, \underline{w})$ d'une k-base $\underline{v}_0$ de $\ker(\varphi)$ et d'une k-base $\varphi|_{W\times W}$-orthogonale $\underline{w}$ de W donne une k-base φ-orthogonale de V. Il suffit donc de montrer l'énoncé pour (V,φ) non-dégénéré. On procède par récurrence sur $r := dim_k(V)$. Le cas $r = 1$ est vide. Supposons $r \geq 2$ et la proposition démontrée pour les k-espaces symétriques non-dégénérés de dimension $\leq r-1$. Comme $\varphi \neq 0$, il existe $v \in V$ tel que $\varphi(v,v) \neq 0$. Notons $W := kv$. Comme (V,φ) et $(W, \varphi|_{W\times W})$ sont non dégénérés, $V = W \oplus W^{\perp_\varphi}$ (Lemme 1.4 (2) (i) $\Rightarrow$ (ii)) avec $(W^{\perp_\varphi}, \varphi|_{W^{\perp_\varphi}\times W^{\perp_\varphi}})$ non dégénéré (Lemme 1.4 (2) (i) $\Rightarrow$ (iii)). Par hypothèse de récurrence, $(W^{\perp_\varphi}, \varphi|_{W^{\perp_\varphi}\times W^{\perp_\varphi}})$ admet une k-base $\varphi|_{W^{\perp_\varphi}\times W^{\perp_\varphi}}$-orthogonale $\underline{w}$; la famille $(v, \underline{w})$ fournit une k-base φ-orthogonale de V. □

Slogan: Si $(V,\varphi) \in \mathcal{C}^{Id}_k$ est non-dégénérée et $\underline{\epsilon} = \epsilon_1, \dots, \epsilon_r$ est une k-base φ-orthogonale de V, on a, $\varphi(\epsilon_i,\epsilon_i) \neq 0$, $i = 1,\dots,r$ et, pour tout $v \in V$,

$$v = \sum_{1\leq i\leq r} \frac{\varphi(v,\epsilon_i)}{\varphi(\epsilon_i,\epsilon_i)}\epsilon_i.$$

On va maintenant affiner ce résultat en prenant en compte les propriétés algébriques de k.

2.1.2. *Corps quadratiquement clos.* Dans ce paragraphe, on suppose que k est *quadratiquement clos viz* que le morphisme $N : k^\times \to k^\times$ est surjectif.

Ex.: Tout corps algébriquement clos ($\mathbb{C}$, $\overline{\mathbb{Q}}$, $\overline{\mathbb{F}}_p$ *etc*) est quadratiquement clos (puisque pour tout $x \in k$, $T^2 - x$ a une racine dans k) mais être quadratiquement clos est une propriété nettement plus faible que d'être algébriquement clos. Par exemple, la clôture quadratique de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{C}$ est le sous-corps $\mathbb{Q}^{\mathrm{quad}} \subset \overline{\mathbb{Q}}$ des nombres algébriques constructibles.

Corollaire 2.2. *Pour tout $(V,\varphi) \in \mathcal{L}^{Id}_{2,k}(V)$ non-dégénéré, il existe une k-base $\underline{\epsilon}$ de V tels que $(\varphi)_{\underline{\epsilon}} = I_r$.*

Une k-base comme dans le Corollaire 2.2 est dite *φ-orthonormale*.

Proof. D'après la Proposition 2.1, il existe une k-base φ-orthogonale $\underline{\epsilon}$ de V. Comme $(V,\varphi) \in \mathcal{C}^{Id}_k$ est non-dégénéré, $\varphi(\epsilon_i,\epsilon_i) \neq 0$, $1 \leq i \leq r$ (Lemme 1.4 (1)). Pour $i = 1,\dots,r$, et comme k est quadratiquement clos, il existe $x_i \in k$ tel que $x_i^2 = \varphi(\epsilon_i,\epsilon_i)$. La k-base $x_1^{-1}\epsilon_1, \dots, x_r^{-1}\epsilon_r)$ convient (utiliser $\varphi(x_i^{-1}\epsilon_i, x_i^{-1}\epsilon_i) = x_i^{-2}\varphi(\epsilon_i,\epsilon_i)$, $i = 1,\dots,r$). □

Corollaire 2.3. (Classification) *Pour tout k-espace vectoriel V, l'application $rang(-)$ induit un isomorphisme*

$$rang : \mathcal{L}^{Id}_{2,k}(V)/GL_k(V) \tilde{\to} \{0,\dots,dim_k(V)\}.$$

[3] Ici, en particulier, le fait que k soit de caractéristique $\neq 2$ est crucial.

Proof. On a déjà vu que l'application $rang : \mathcal{L}^{Id}_{2,k}(V)/GL_k(V) \to \{0, \dots, dim_k(V)\}$ était bien définie. Elle est également surjective; en effet si $\underline{\epsilon}_0$ est une k-base de V, la forme k-bilinéaire symétrique φ_s définie par

$$(\varphi_s)_{\underline{\epsilon}} = diag(0_{r-s}, I_s) =: I_{r,s}$$

est de rang s. Elle est injective car si $\varphi \in \mathcal{L}^{Id}_{2,k}(V)$ est de rang s, on peut trouver une k-base φ-orthogonale $\underline{\epsilon}$ telle que $\epsilon_1, \dots, \epsilon_{r-s}$ soit une k-base de $\ker(\varphi)$, et $\epsilon_{r-s+1}, \dots, \epsilon_s$ une k-base $\varphi|_{W\times W}$-orthonormale d'un supplémentaire W de $\ker(\varphi)$ dans V donc $(\varphi)_{\underline{\epsilon}} = I_{r,s}$ donc en considérant l'automorphisme $u \in GL_k(V)$ défini par $u(\underline{\epsilon}_0) = \underline{\epsilon}$, on a $u \cdot \varphi_s = \varphi$. $\square$

Interprétation matricielle:

(1) Pour tout $\Phi \in M_r(k)$, ${}^t\Phi = \Phi$ et $rang(\Phi) = s$ ssi il existe $U \in GL_r(k)$ tel que $\Phi = {}^tUI_{r,s}U$.

(2) Pour tout $r \geq 1$, on dit que le sous-groupe

$$O_r(k) := \{V \in GL_r(k) \mid {}^tVV = I_r\} \subset GL_r(k)$$

est le *groupe orthogonal* de rang r. Le groupe $O(I_{r,s})$ est une extension scindée

$$0 \to M_{r,s}(k) \to O(I_{r,s}) \to GL_{r-s}(k) \times O_r(k) \to 1$$

et, avec les notations de (1),

$$O(\Phi) = U^{-1}O(I_{r,s})U.$$

2.1.3. *Corps pré-euclidiens.* Dans ce paragraphe, on suppose que $k = (k, \leq)$ est pré-euclidien *viz* totalement ordonné. On note $x < y$ pour $x \leq y$, $x \neq y$.

2.1.3.1. *Lemme de Sylvester, classification.*

Corollaire 2.4. (Sylvester) *Pour tout $(V, \varphi) \in \mathcal{C}^{Id}_k$ non-dégénéré, pour toute k-base $\underline{\epsilon} = \epsilon_1, \dots, \epsilon_r$ φ-orthogonale de V l'entier*

$$s_+(\varphi) := s(\varphi, \underline{\epsilon}) = |\{1 \leq i \leq r \mid \varphi(\epsilon_i, \epsilon_i) > 0\}|$$

est indépendant de $\underline{\epsilon}$.

Proof. Soit $\underline{\epsilon}_1$, $\underline{\epsilon}_2$ deux k-base φ-orthogonales de V. Quitte à réordonner, on peut supposer que $\varphi(\epsilon_{j,i}, \epsilon_{j,i}) > 0$, $i = 1, \dots, s_j := s(\varphi, \underline{\epsilon}_j)$, $j = 1, 2$. On veut montrer que $s_1 = s_2$. Par symétrie, il suffit de montrer que $s_1 \leq s_2$. Pour cela, il suffit de montrer que $\epsilon_{1,1}, \dots, \epsilon_{1,s_1}, \epsilon_{2,s_2+1} \dots, \epsilon_{2,r}$ sont k-libres; en effet, cela impliquera $s_1 + r - s_2 \leq r$ donc $s_1 \leq s_2$. Soit donc $x_{1,1}, \dots, x_{1,s_1}, x_{2,s_2+1} \dots, x_{2,r} \in k$ tels que

$$v := \sum_{1\leq i\leq s_1} x_{1,i}\epsilon_{1,i} = -\sum_{s_2+1\leq i\leq r} x_{2,i}\epsilon_{2,i}.$$

En utilisant l'orthogonalité de $\epsilon_{1,1}, \dots, \epsilon_{1,s_1}$ et $\epsilon_{2,s_2+1} \dots, \epsilon_{2,r}$, on obtient

$$\varphi(v, v) = \sum_{1\leq i\leq s_1} x_{1,i}^2\varphi(\epsilon_{1,i}, \epsilon_{1,i}) \overset{(*)}{=} \sum_{s_2+1\leq i\leq r} x_{2,i}^2\varphi(\epsilon_{2,i}, \epsilon_{2,i}).$$

Comme le terme de gauche de (*) est ≥ 0 et celui de droite est ≤ 0 (on rappelle que dans un corps ordonné, les carrés sont ≥ 0), on a forcément

$$\sum_{1\leq i\leq s_1} x_{1,i}^2\varphi(\epsilon_{1,i}, \epsilon_{1,i}) = \sum_{s_2+1\leq i\leq r} x_{2,i}^2\varphi(\epsilon_{2,i}, \epsilon_{2,i}) = 0.$$

Mais comme $x_{1,i}^2\varphi(\epsilon_{1,i}, \epsilon_{1,i}) \geq 0$, $i = 1, \dots, s_1$, cela impose $x_{1,i}^2\varphi(\epsilon_{1,i}, \epsilon_{1,i}) = 0$ donc $x_{1,i}^2 = 0$ puisque $\varphi(\epsilon_{1,i}, \epsilon_{1,i}) \neq 0$, $i = 1, \dots, s_1$. De même $x_{2,i} = 0$, $i = s_2 + 1, \dots, r$. $\square$

On dit que $(V, \varphi) \in \mathcal{C}^{Id}_k$ est *défini positif* (ou que $\varphi \in \mathcal{L}^{Id}_{2,k}(V)$) est définie positive) si $\varphi(v, v) > 0$, $0 \neq v \in V$ et que $(V, \varphi) \in \mathcal{C}^{Id}_k$ est *défini négatif* (ou que $\varphi \in \mathcal{L}^{Id}_{2,k}(V)$) est définie négative) si $\varphi(v, v) < 0$, $0 \neq v \in V$. On notera $\mathcal{C}^{Id,>0}_k, \mathcal{C}^{Id,<0}_k \subset \mathcal{C}_k$, $\mathcal{S}^{>0}_{2,k}(V), \mathcal{S}^{Id,<0}_{2,k}(V) \subset \mathcal{L}^{Id}_{2,k}(V)$ les objets définis positifs et négatifs respectivement.

Pour tout $(V, \varphi) \in \mathcal{C}^{Id}_k$ notons $Sub^{>0}(V, \varphi)$ l'ensemble des sous-k-espaces vectoriels $W \subset V$ tels que $(W, \varphi|_{W\times W})$ est défini positif et $Sub^{<0}(V, \varphi)$ l'ensemble des sous-k-espaces vectoriels $W \subset V$ tels que

$(W, \varphi|_{W\times W})$ est défini négatif.

Slogan: Tout $(V,\varphi) \in \mathcal{C}_k^{Id,>0}$ (ou $(V,\varphi) \in \mathcal{C}_k^{Id,<0}$) est non-dégénéré et pour tout $0 \neq W \subset V$ sous-k-espace vectoriel, $(W, \varphi|_{W\times W}) \in \mathcal{C}_k^{Id,>0}$ donc, en particulier, est non-dégénéré, et on a

$$V = W \oplus^{\perp_\varphi} W^{\perp_\varphi}.$$

Plus généralement, pour tout $W \in Sub^{>0}(V,\varphi)$ (ou $W \in Sub^{<0}(V,\varphi)$), $(W, \varphi|_{W\times W})$ est non-dégénéré, donc (Lemme 1.4 (2)) $V = W \oplus^{\perp_\varphi} W^{\perp_\varphi}$ et $(W^{\perp_\varphi}, \varphi|_{W^{\perp_\varphi}\times W^{\perp_\varphi}})$ est non-dégénéré.

Corollaire 2.5. *Pour tout $(V,\varphi) \in \mathcal{C}_k^{Id}$ non-dégénéré,*

(1) Pour tout $W \in Sub^{>0}(V,\varphi)$ maximal pour l'inclusion dans $Sub^{>0}(V,\varphi)$, $W^{\perp_\varphi} \in Sub^{<0}(V,\varphi)$.

(2) Pour tout $W \in Sub^{>0}(V,\varphi)$, W est maximal pour l'inclusion dans $Sub^{>0}(V,\varphi)$ ssi $s_+(\varphi) = dim_k(W)$.

Proof. (1) Soit $W \in Sub^{>0}(V,\varphi)$ maximal pour l'inclusion dans $Sub^{>0}(V,\varphi)$. On a $V = W \oplus^{\perp_\varphi} W^{\perp_\varphi}$ et $(W^{\perp_\varphi}, \varphi|_{W^{\perp_\varphi}\times W^{\perp_\varphi}})$ non-dégénéré donc on peut fixer une k-base φ-orthogonale $\underline{\epsilon}_W$ de W et une k-base φ-orthogonale $\underline{\epsilon}_W^\perp$ de $W^{\perp_\varphi}$. Par construction, la concaténation $\underline{\epsilon} := \underline{\epsilon}_W, \underline{\epsilon}_W^\perp$ est une k-base φ-orthogonale de V telle que

$$s_+(\varphi) = s_+(\varphi, \underline{\epsilon}) = dim_k(W) + s_+(\varphi, \underline{\epsilon}_W^\perp).$$

Mais si $s_+(\varphi, \underline{\epsilon}_W^\perp) \neq 0$, il existe $w \in W^{\perp_\varphi}$ tel que $\varphi(w,w) > 0$ donc $W \subsetneq W \oplus kw \in Sub^{>0}(V,\varphi)$, contredisant la maximalité de W dans $Sub^{>0}(V,\varphi)$.

(2) La partie (1) montre déja que si $W \in Sub^{>0}(V,\varphi)$, est maximal pour l'inclusion dans $Sub^{>0}(V,\varphi)$, $dim_k(W) = s_+(\varphi)$. Inversement, si $W \in Sub^{>0}(V,\varphi)$ vérifie $dim_k(W) = s_+(\varphi)$ alors il est maximal car pour tout $W \in Sub^{>0}(V,\varphi)$, $dim_k(W) \leq s_+(\varphi)$. En effet, si $W_0 \in Sub^{>0}(V,\varphi)$ est maximal pour l'inclusion, par (1) $W_0^{\perp_\varphi} \in Sub^{<0}(V,\varphi)$ donc $W \cap W_0^{\perp_\varphi} = 0$ (pour tout $wv \in W \cap W_0^{\perp_\varphi}$ on a $\varphi(w,w) \geq 0$ car $w \in W$ et $\varphi(w,w) \leq 0$ car $w \in W_0^{\perp_\varphi}$ donc $\varphi(w,w) = 0$, ce qui implique $w = 0$ puisque $W \in Sub^{>0}(V,\varphi)$), et donc $dim_k(W) \leq dim_k(V) - dim_k(W_0^{\perp_\varphi}) = dim_k(W_0) = s_+(\varphi)$.

□

En général, pour tout $(V,\varphi) \in \mathcal{C}_k^{Id}$, pour tout $W \in Sub^{>0}(V,\varphi)$, les CSSE:

(i) $W \in Sub^{>0}(V,\varphi)$ et W est maximal pour l'inclusion dans $Sub^{>0}(V,\varphi)$;
(ii) $W(\hookrightarrow V/\ker(\varphi)) \in Sub^{>0}(V/\ker(\varphi), \overline{\varphi})$ est maximal pour l'inclusion dans $Sub^{>0}(V,\varphi)$;
(iii) $dim_k(W) = s_+(\overline{\varphi})$.

On note

$$s_+(\varphi) := s_+(\overline{\varphi}), \ \ s_-(\varphi) := dim_k(V/\ker(\varphi)) - s_+(\varphi) = rang(\varphi) - s_+(\varphi)$$

et on dit que

$$\underline{s}(\varphi) = (s_+(\varphi), s_-(\varphi))(= s(\overline{\varphi}))$$

est la *signature* de (V,φ).

En fait, on vérifie immédiatement que le Corollaire 2.4 s'étend au cas où $(V,\varphi) \in \mathcal{C}_k^{Id}$ n'est pas forcément non-dégénérée comme suit: pour toute k-base φ-orthogonale $\underline{\epsilon}$ de (V,φ), en notant

$$\underline{\epsilon}_0 := \{\epsilon \in \underline{\epsilon} \mid \varphi(\epsilon,\epsilon) = 0\} \subset \underline{\epsilon},$$
$$\underline{\epsilon}_+ := \{\epsilon \in \underline{\epsilon} \mid \varphi(\epsilon,\epsilon) > 0\} \subset \underline{\epsilon},$$
$$\underline{\epsilon}_- := \{\epsilon \in \underline{\epsilon} \mid \varphi(\epsilon,\epsilon) < 0\} \subset \underline{\epsilon},$$

on a que $\underline{\epsilon}_0$ est une k-base de $\ker(\varphi)$, $V(\underline{\epsilon})_+ := \oplus_{\epsilon\in\underline{\epsilon}_+} k\epsilon \in Sub^{>0}(V,\varphi)$ et $V(\underline{\epsilon})_- := \oplus_{\epsilon\in\underline{\epsilon}_-} k\epsilon \in Sub^{<0}(V,\varphi)$, donc que $s(\varphi) = (|\underline{\epsilon}_+|, |\underline{\epsilon}_-|)$.

Pour tout entier $r \geq 1$, notons

$$\Sigma(r) := \{\underline{s} = (s_+, s_-) \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq s_+, s_- \leq s_+ + s_- \leq r\}.$$

Pour tout $\varphi \in \mathcal{L}_{2,k}^{Id}(V)$ et $u \in \mathrm{GL}_k(V)$, $s(u \cdot \varphi) = s(\varphi)$ donc l'application signature se factorise en

$$\begin{tikzcd} \mathcal{L}_{2,k}^{Id}(V) \arrow[r, "\underline{s}"] \arrow[d] & \Sigma(dim_k(V)) \\ \mathcal{L}_{2,k}^{Id}(V)/GL_k(V) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

On suppose maintenant, et jusqu'à la fin de ce paragraphe, que k est euclidien. Pour tout $x \in k$, $x > 0$, on note $\sqrt{x} > 0$ la racine ≥ 0 de $T^2 - x$.

Corollaire 2.6. (Classification) *Pour tout $(V, \varphi) \in \mathcal{C}_k^{Id}$ de signature $\underline{s} = (s_+, s_-)$, il existe une k-base φ-orthogonale $\underline{\epsilon} = (\underline{\epsilon}_0, \underline{\epsilon}_+, \underline{\epsilon}_-)$ de V telle que*

$$\varphi(\epsilon, \epsilon) = 0,\ \ \epsilon \in \underline{\epsilon}_0;\ \ \varphi(\epsilon, \epsilon) = 1,\ \ \epsilon \in \underline{\epsilon}_+,\ \ \varphi(\epsilon, \epsilon) = -1,\ \ \epsilon \in \underline{\epsilon}_-,$$

(donc $(|\underline{\epsilon}_+|, |\underline{\epsilon}_-|) = \underline{s}$). En particulier, l'application signature induit une bijection

$$\underline{s} : \mathcal{L}_{2,k}^{Id}(V)/GL_k(V) \tilde{\to} \Sigma(dim_k(V)).$$

On dit encore qu'une k-base $\underline{\epsilon}$ de V comme dans le Corollaire 2.6 est φ-orthonormale.

Proof. Soit $\underline{\epsilon}$ une k-base φ-orthogonale de (V, φ); avec les notations $\underline{\epsilon}_0$, $\underline{\epsilon}_+$, $\underline{\epsilon}_-$ introduites ci-dessus, la k-base construite à partir de $\underline{\epsilon}$ en laissant inchangés les éléments de $\underline{\epsilon}_0$ et en remplaçant ϵ par $(\sqrt{\varphi(\epsilon, \epsilon)})^{-1}\epsilon$ si $\epsilon \in \underline{\epsilon}_+$ et par $(\sqrt{-\varphi(\epsilon, \epsilon)})^{-1}\epsilon$ si $\epsilon \in \underline{\epsilon}_-$ convient. Notons $r := dim_k(V)$. On a déjà vu que l'application $\underline{s} : \mathcal{L}_{2,k}^{Id}(V)/GL_k(V) \tilde{\to} \Sigma(r)$ était bien définie. Elle est également surjective; en effet si $\underline{\epsilon}_0$ est une k-base de V, pour tout $\underline{s} = (s_+, s_-) \in \Sigma(r)$, la forme k-bilinéaire symétrique $\varphi_{\underline{s}}$ définie par

$$(\varphi_{\underline{s}})_{\underline{\epsilon}_0} = diag(0_{r-s_+-s_-}, I_{s_+}, -I_{s_-}) =: I_{r,\underline{s}}$$

est de signature $\underline{s}$. Elle est injective car si $\varphi \in \mathcal{L}_{2,k}^{Id}(V)$ est de signature $\underline{s} = (s_+, s_-)$, on vient juste de voir que l'on peut trouver une k-base φ-orthogonale $\underline{\epsilon}$ de V telle que $(\varphi)_{\underline{\epsilon}} = diag(0_{r-s_+-s_-}, I_{s_+}, -I_{s_-})$ donc φ et $\varphi_{\underline{s}}$ sont équivalentes. $\square$

Interprétation matricielle:

(1) Pour tout $\underline{s} = (s_+, s_-) \in \Sigma(r)$ et $\Phi \in M_r(k)$, ${}^t\Phi = \Phi$ et $s(\Phi) = s$ ssi il existe $U \in GL_r(k)$ tel que $\Phi = {}^tUI_{r,\underline{s}}U$.

(2) Dans le cas où $s_+, s_- > 0$, la description du groupe orthogonal

$$O_{r,\underline{s}}(k) := \{V \in GL_r(k) \mid {}^tVI_{r,\underline{s}}V = I_{r,\underline{s}}\} \subset GL_r(k)$$

devient significativement plus compliqué que dans le cas algébriquement clos... Seul le cas $r = s_+$ est au programme.

2.1.3.2. *Produits scalaires.* Si k est pré-euclidien (resp. euclidien), on appelle *k-espaces vectoriels pré-euclidiens (resp. euclidien)* les éléments de $\mathcal{C}_k^{Id,>0}$. Si k est euclidien et $(V, \varphi) \in \mathcal{C}_k^{Id,>0}$, on dit que φ est un *produit scalaire euclidien* sur V.

Supposons k pré-euclidien et soit $(V, \varphi) \in \mathcal{C}_k^{Id,>0}$. On a l'inégalité fondamentale suivante.

Inégalité de Cauchy-Schwartz: pour tout $v_1, v_2 \in V$,

$$\varphi(v_1, v_2)^2 \leq \varphi(v_1, v_1)\varphi(v_2, v_2)$$

et $\varphi(v_1, v_2)^2 = \varphi(v_1, v_1)\varphi(v_2, v_2)$ ssi v_1 et v_2 sont k-liés.

Proof. La preuve est formellement la même que sur $\mathbb{R}$. Si $v_1 = 0$ ou $v_2 = 0$, c'est tautologique. Supposons donc $v_1, v_2 \neq 0$ *viz* $\varphi(v_1, v_1), \varphi(v_2, v_2) > 0$. On développe l'expression

$$\varphi(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) \geq 0$$

en utilisant les propriétés de φ (k-bilinéarité, symétrie) pour obtenir:

$$\lambda_1^2\varphi(v_1,v_1)+2\lambda_1\lambda_2\varphi(v_1,v_2)+\lambda_2^2\varphi(v_2,v_2)\geq 0$$

et on prend $\lambda_1=\varphi(v_2,v_2)$, $\lambda_2=-\varphi(v_1,v_2)$, ce qui donne:

$$\varphi(v_2,v_2)^2\varphi(v_1,v_1)-2\varphi(v_2,v_2)\varphi(v_1,v_2)^2+\varphi(v_2,v_2)\varphi(v_1,v_2)^2\geq 0,$$

que l'on réécrit (en utilisant que $\varphi(v_2,v_2)>0$)

$$\varphi(v_2,v_2)\varphi(v_1,v_1)\geq\varphi(v_1,v_2)^2.$$

□

Supposons maintenant k euclidien; pour tout $x\in k_{\geq 0}$ notons $\sqrt{x}\in k$ la racine ≥ 0 de $T^2-x\in k[T]$ et pour tout $x\in k$,$|x|=\sqrt{x^2}\geq 0$. Si (V,φ) est un k-espace vectoriel euclidien, la *norme associée à φ* est l'application

$$|-|_\varphi : V\to k,\ \ v\mapsto |v|_\varphi:=\sqrt{\varphi(v,v)}$$

Par définition, on a $|v|_\varphi\geq 0$, $v\in V$ et $|v|_\varphi=0$ ssi $v=0$. De plus, on retrouve les propriétés usuelles:

- **Inégalité de Cauchy-Schwartz:** pour tout $v_1,v_2\in V$,

$$|\varphi(v_1,v_2)|\leq |v_1|_\varphi|v_2|_\varphi$$

  et $|\varphi(v_1,v_2)|=|v_1|_\varphi|v_2|_\varphi$ ssi v_1 et v_2 sont k-liés.

- **Inégalité triangulaire:** pour tout $v_1,v_2\in V$,

$$|v_1+v_2|_\varphi\leq |v_1|_\varphi+|v_2|_\varphi,$$

  et $|v_1+v_2|_\varphi=|v_1|_\varphi+|v_2|_\varphi$ ssi $v_1\in k_{\geq 0}v_2$.

  Proof. On développe

$$\begin{aligned}|v_1+v_2|_\varphi^2 &=|v_1|_\varphi^2+2\varphi(v_1,v_2)+|v_2|_\varphi^2\\ &\leq |v_1|_\varphi^2+2|\varphi(v_1,v_2)|+|v_2|_\varphi^2\\ &\leq |v_1|_\varphi^2+2|v_1|_\varphi|v_2|_\varphi+|v_2|_\varphi^2=(|v_1|_\varphi+|v_2|_\varphi)^2,\end{aligned}$$

  où la deuxième inégalité est Cauchy-Schwartz. □

- **Orthonormalisation de Gram-Schmidt:** Pour toute k-base $\underline{v}$ de V il existe une unique k-base φ-orthonormale $\underline{\epsilon}$ de V telle que

  (i) $\oplus_{1\leq i\leq s}k\epsilon_i=\oplus_{1\leq i\leq s}kv_i$, $1\leq s\leq dim_k(V)$;

  (ii) $\varphi(\epsilon_i,v_i)>0$, $i=1,\dots,dim_k(V)$.

  Proof. Notons $r:=dim_k(V)$. On procède par analyse (unicité sous réserve d'existence) - synthèse (existence). Notons $V_s:=\oplus_{1\leq i\leq s}kv_i$, $1\leq s\leq dim_k(V)$. Comme φ est défini positif, pour tout $s\geq 1$, on a la décomposition en somme directe φ-orthogonale

$$V=V_s\oplus^{\perp_\varphi}V_s^{\perp_\varphi}.$$

  Pour tout $v\in V$, on note $v=v_s+v_s^\perp$ la décomposition de v selon cette somme directe.

  – Analyse: Supposons que $\underline{\epsilon}$ existe. En particulier, pour tout $s\geq 1$, $V_s=\oplus_{1\leq i\leq s}k\epsilon_i$, $V_s^{\perp_\varphi}=\oplus_{s+1\leq i\leq r}k\epsilon_i$ et

$$v_s=\sum_{1\leq i\leq r}\varphi(v_s,\epsilon_i)\epsilon_i=\sum_{1\leq i\leq s}\varphi(v_s,\epsilon_i)\epsilon_i,$$

  où la deuxième égalité résulte de

$$v_s-\sum_{1\leq i\leq s}\varphi(v_s,\epsilon_i)\epsilon_i=\sum_{s+1\leq i\leq r}\varphi(v_s,\epsilon_i)\epsilon_i\in V_s\cap V_s^{\perp_\varphi}=0.$$

Autrement dit, $v^{\perp}_{s,s-1} = \varphi(v_s, \epsilon_s)\epsilon_s$ *viz* $\epsilon_s = \lambda_s v^{\perp}_{s,s-1}$. Les conditions $\varphi(\epsilon_s, \epsilon_s) > 1$ et $\varphi(\epsilon_s, v_s) > 0$ imposent alors

$$\lambda = 1/\sqrt{\varphi(v^{\perp}_{s,s-1}, v^{\perp}_{s,s-1})}(> 0).$$

– Synthèse: On vérifie immédiatement par induction sur r que la famille

$$\epsilon_i = \frac{v^{\perp}_{i,i-1}}{\sqrt{\varphi(v^{\perp}_{i,i-1}, v^{\perp}_{i,i-1})}}, \quad i = 1, \dots, r$$

déterminée par l'analyse convient.

□

Exercice 2.7. Notons $\mathbb{R}[T]_{\leq 2} \subset \mathbb{R}[T]$ le sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 2, que l'on munit de la forme $\mathbb{R}$-bilinéaire symétrique $\varphi : \mathbb{R}[T]_{\leq 2} \times \mathbb{R}[T]_{\leq 2} \to \mathbb{R}$, $(P, Q) \mapsto P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1)$. Vérifier que $\varphi : \mathbb{R}[T]_{\leq 2} \times \mathbb{R}[T]_{\leq 2} \to \mathbb{R}$ définit un produit scalaire euclidien sur $\mathbb{R}[T]_{\leq 2}$ et calculer l'orthonormalisé de Gram-Schmidt de $1, X, X^2$ pour φ.

Exercice 2.8. (Interprétation matricielle - décomposition QR) Notons $T_n^{>0}(k) \subset GL_n(k)$ le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures dont les coefficients diagonaux sont > 0 et $O_n(k) \subset GL_n(k)$ le sous-groupe orthogonal. Montrer que l'application produit

$$O_n(k) \times T_n^{>0}(k) \to GL_n(k), \quad (Q, R) \mapsto QR$$

est bijective.

2.1.4. *Corps finis.* Dans ce paragraphe k est un corps fini de cardinal $|k| = p^s$ avec $p = car(k) \neq 2$, $s \geq 1$. Commençons par l'observation élémentaire suivante.

Lemme 2.9. *Pour tout $a, b \in k^\times$, $c \in k$, il existe $x, y \in k$ tels que $ax^2 + by^2 = c$.*

Proof. Considérons l'application

$$f : k \to k, \quad t \mapsto \frac{c - bt}{a},$$

et notons $\Sigma_2(k) := \{x^2 \mid x \in k\} = N(k^\times) \cup \{0\} \subset k$ l'ensemble des carrés. Il suffit de montrer que $f(\Sigma_2(k)) \cap \Sigma_2(k) \neq \emptyset$ et, comme $f : k \to k$ est bijective, il suffit de montrer que $2|\Sigma_2(k)| > |k|$. Or, comme $p \neq 2$, on a la suite exacte de groupes finis

$$1 \to \{\pm 1\} \to k^\times \xrightarrow{N} k^\times \to k^\times/N(k^\times) \to 1$$

En particulier, $[k^\times : N(k^\times)] = |\{\pm 1\}| = 2$ donc $|\Sigma_2(k)| = \frac{|k^\times|}{2} + 1 = \frac{|k|+1}{2}$. □

Soit V un k-espace vectoriel de dimension r. Notons

$$\Delta(k, r) := k^\times/(k^\times)^2 \times \{1, \dots, r\} \sqcup \{(0, 0)\} \subset k/(k^\times)^2 \times \{0, \dots, r\}.$$

et, pour $\varphi \in \mathcal{L}^{Id}_{2,k}(V)$, notons $\overline{\delta}(\varphi) := \delta(\overline{\varphi})$ le discriminant de la forme k-bilinéaire symétrique non-dégénérée associée

$$\overline{\varphi} : V/\ker(\varphi) \times V/\ker(\varphi) \to k$$

associée à φ.

Proposition 2.10. *L'application $\overline{\delta} \times rang : \mathcal{L}^{Id}_{2,k}(V) \to k/k^\times \times \{0, \dots, r\}$ induit une bijection*

$$\overline{\delta} \times rang : \mathcal{L}^{Id}_{2,k}(V)/GL_k(V) \tilde{\to} \Delta(k, r).$$

Proof. On a déjà vu que $\overline{\delta} \times rang : \mathcal{L}^{Id}_{2,k}(V)/GL_k(V) \tilde{\to} \Delta(k, r)$ est bien définie et que, si $\mathcal{S}^*_k(V) \subset \mathcal{L}^{Id}_{2,k}(V)$ est le sous-ensemble des $\varphi \in \mathcal{L}^{Id}_{2,k}(V)$ non-dégénérées, il suffit de montrer que $\delta : \mathcal{S}^*_k(V)/GL_k(V) \to k^\times/N(k^\times)$ est bijective. Elle est surjective car si $\underline{\epsilon}_0$ est une de V et si $\alpha \in k^\times \setminus N(k^\times)$ les éléments $\varphi_{r,1}, \varphi_{r,\alpha} \in \mathcal{L}^{Id}_{2,k}(V)$ définis par

$$(\varphi_{r,1})_{\underline{\epsilon}_0} = \Phi_{r,1} := I_r, \ (\varphi_{r,\alpha})_{\underline{\epsilon}_0} = \Phi_{r,\alpha} := diag(1, \dots, 1, \alpha)$$

vérifient $\delta(\varphi_{r,1}) = 1$, $\delta(\varphi_{r,\alpha}) = \alpha$. Il suffit donc de vérifier que pour tout $\varphi \in \mathcal{L}^{Id}_{2,k}(V)$ non dégénérée, φ est équivalente à $\varphi_{r,\tilde{\delta}(\varphi)}$, où $\tilde{\delta}(\varphi) \in \{1, \alpha\}$ est le représentant de $\delta(\varphi \in)k^\times/N(k^\times)$. On procède par récurrence sur r. Si $r = 1$, pour tout k-base ϵ de V on a $0 \neq a := (\varphi)_\epsilon \in k$ avec $a = \tilde{\delta}(\varphi)b^2$ donc quitte à remplacer ϵ par $b^{-1}\epsilon$, on peut supposer $(\varphi)_\epsilon = \Phi_{1,\tilde{\delta}(\varphi)}$. Supposons $r \geq 2$ et l'énoncé démontré en dimension $\leq r - 1$. Soit $\underline{\epsilon}$ une k-base φ-orthogonale de V et notons $W := k\epsilon_1 \oplus k\epsilon_2$, donc $W^{\perp_\varphi} := \oplus_{3 \leq i \leq r} k\epsilon_i$. La forme $(W, \varphi|_{W \times W})$ est encore non-dégénérée donc $(\varphi|_{W \times W})_{\epsilon_1, \epsilon_2} = diag(a, b)$ avec $a, b \in k^\times$. Par le Lemme 2.9, il existe $e_1 \in W$ tels que $\varphi(e_1, e_1) = 1$. En particulier, en posant $H := (ke_1)^{\perp_\varphi}$, $V = ke_1 \oplus^{\perp_\varphi} H$, donc $(H, \varphi|_{H \times H})$ est encore non-dégénérée avec $\delta(\varphi) = \delta(\varphi|_{H \times H})$; on conclut donc en appliquant l'hypothèse de récurrence à $(H, \varphi|_{H \times H})$. □

2.2. **Structure des espaces τ-hermitiens.** La théorie des espaces τ-hermitiens est très proche de celle des espaces symétriques. On rappelle (Lemme 0.1) qu'on peut toujours trouver $\iota \in k \setminus k^\tau$ tel que $\iota^2 \in k^\tau$. Comme $1, \iota$ est une k^τ-base de k, pour tout $(V, \varphi) \in \mathcal{C}^\tau_k$, on a une unique décomposition

$$\varphi(v_1, v_2) = R_\varphi(v_1, v_2) + \iota I_\varphi(v_1, v_2)$$

avec $R_\varphi \in \mathcal{L}^{Id}_{2,k}(V)$ et $I_\varphi \in \mathcal{L}^{\epsilon}_{2,k}(V)$. On obtient encore une

Identité de polarisation - variante τ-hermitienne:

$$R_\varphi(v_1, v_2) = \frac{1}{2}(\varphi(v_1 + v_2, v_1 + v_2) - \varphi(v_1, v_1) - \varphi(v_2, v_2)) = \frac{1}{4}(\varphi(v_1 + v_2, v_1 + v_2) - \varphi(v_1 - v_2, v_1 - v_2)),$$

$$I_\varphi(v_1, v_2) = \frac{1}{4\iota^2}(\varphi(\iota v_1 + v_2, \iota v_1 + v_2) - \varphi(\iota v_1 - v_2, \iota v_1 - v_2))$$

En particulier, l'application k^τ-linéaire de restriction

$$(-)|_{\Delta_V} : \mathcal{L}^\tau_{2,k^\tau}(V) \to k^V, \quad \varphi \mapsto \varphi|_{\Delta_V}$$

est encore injective et, puisque par définition $(\varphi|_{\Delta_V})^{-1}(0) = Iso(\varphi) \subset V$, on a

$$\varphi \neq 0 \Leftrightarrow Iso(\varphi) \subsetneq V.$$

On obtient donc, avec exactement la même preuve, la variante τ-hermitienne de la Proposition 2.1.

Proposition 2.11. *Pour tout $(V, \varphi) \in \mathcal{C}^\tau_k$, il existe une k-base de V qui est φ-orthogonale.*

avec le

Slogan: Si $(V, \varphi) \in \mathcal{C}^\tau_k$ est non-dégénéré et si $\underline{\epsilon} = \epsilon_1, \ldots, \epsilon_r$ est une k-base φ-orthogonale de V, on a, $\varphi(\epsilon_i, \epsilon_i) \neq 0$, $i = 1, \ldots, r$ et, pour tout $v \in V$,

$$v = \sum_{1 \leq i \leq r} \frac{\varphi(v, \epsilon_i)}{\varphi(\epsilon_i, \epsilon_i)} \epsilon_i.$$

Pour obtenir une variante τ-hermitienne du Corollaire 2.2, il ne faut plus supposer que $k = \overline{k}$ est algébriquement clos mais que $N_\tau : k^\times \to k^{\tau\times}$ **est surjective**; Dans ce cas, on a à nouveau que

Corollaire 2.12. *Supposons que $N_\tau : k^\times \to k^{\tau\times}$ est surjective. Pour tout $(V, \varphi) \in \mathcal{C}^\tau_k$ non-dégénéré, il existe une k-base $\underline{\epsilon}$ de V tels que $(\varphi)_{\underline{\epsilon}} = I_r$ et pour tout k-espace vectoriel V, l'application $rang(-)$ induit un isomorphisme*

$$rang : \mathcal{L}^{Id}_{2,k}(V)/GL_k(V) \tilde{\to} \{0, \ldots, dim_k(V)\}.$$

Ex.

(1) Si k est un corps fini de cardinal $|k| = p^s$ avec $p = car(k) \neq 2$, $s \geq 1$, notons

$$F_k : k \tilde{\to} k, \quad x \mapsto x^p$$

l'automorphisme de Frobenius. On rappelle que le groupe des automorphismes du corps k est $\mathbb{Z}/s$, engendré par F_k. En particulier, k est muni d'une involution $Id \neq \tau$ ssi $2|s$, auquel cas $\tau = F_k^{s/2}$. On en déduit facilement:

Lemme 2.13. *Le morphisme norme $N_\tau : k^\times \to k^{\tau\times}$ est surjectif.*

Proof. Comme τ est d'ordre 2, $[k : k^\tau] = 2$ donc $|k^\tau| = |k|/2 =: q$ (ici, on peut le vérifier à la main puique, explicitement, $k^\tau = \{x \in k \mid x^q = x\} \simeq \mathbb{F}_q$) et il suffit de montrer que $|N_\tau(k^\times)| = q - 1$. Pour cela, on peut utiliser que $k^\times$ est cyclique; soit $\alpha \in k^\times$ un générateur, donc d'ordre exactement $q^2 - 1$. On a $N_\tau(\alpha) = \alpha^{q+1}$ d'ordre exactement $(q^2 - 1)/q + 1 = q - 1$. $\square$

(2) (HP) Il existe d'autres corps k que les corps finis pour lesquels la norme $N_\tau : k^\times \to k^{\tau\times}$ est surjective. En fait, cette propriété est lié à la cohomologie galoisienne; en effet, on a toujours une suite exacte de groupes abéliens

$$k^\times \stackrel{N_\tau}{\to} k^{\tau\times} \to Br(k^\tau) \stackrel{res}{\to} Br(k),$$

(où $Br(K) = H^2(K, \overline{K}^\times)$ est le groupe de Brauer de K); en particulier, $k^{\tau\times}/N_\tau(k^\times) \hookrightarrow Br(k^\tau)$ donc, si $Br(k^\tau) = 0$, $N_\tau : k^\times \to k^{\tau\times}$ est surjective. C'est le cas par exemple si $k^\tau = Q(t)$ pour Q un corps algébriquement clos ou plus généralement le corps des fonctions d'une courbe algébrique lisse sur un corps algébriquement clos.

Pour obtenir une variante τ-hermitienne du Lemme de Sylvester (Corollaire 2.4) et de ses corollaires, il faut supposer - ce que l'on fait jusqu'à la fin de cette section - que k **est pré-hermitien**. Là encore, avec exactement la même preuve (en observant que pour tout $v \in V$, $\varphi(v, v) = \tau(\varphi(v, v)) \in k^\tau$) que dans le cas symétrique, on obtient

Corollaire 2.14. (Sylvester - variante τ-hermitienne) *Pour tout $(V, \varphi) \in \mathcal{C}_k^\tau$ non-dégénéré, pour toute k-base $\underline{\epsilon} = \epsilon_1, \dots, \epsilon_r$ φ-orthogonale de V l'entier*

$$s_+(\varphi) := s(\varphi, \underline{\epsilon}) = |\{1 \le i \le r \mid \varphi(\epsilon_i, \epsilon_i) > 0\}|$$

est indépendant de $\underline{\epsilon}$.

Pour $(V, \varphi) \in \mathcal{C}_k^\tau$ arbitraire, on pose

$$s_+(\varphi) = s_+(\overline{\varphi}), \ \ s_-(\varphi) = s_-(\overline{\varphi}) = rang(\overline{\varphi}) - s_+(\overline{\varphi}),$$

et on dit encore que

$$\underline{s}(\varphi)(= \underline{s}(\overline{\varphi})) = (s_+(\varphi), s_-(\varphi))$$

est la signature de $(V, \varphi) \in \mathcal{C}_k^\tau$, que $(V, \varphi) \in \mathcal{C}_k^\tau$ est défini positif (ou que $\varphi \in \mathcal{L}_{2,k}^\tau(V)$) est définie positive) si $\varphi(v, v) > 0$, $0 \neq v \in V$ et que $(V, \varphi) \in \mathcal{C}_k^\tau$ est défini négatif (ou que $\varphi \in \mathcal{L}_{2,k}^\tau(V)$) est définie négative) si $\varphi(v, v) < 0$, $0 \neq v \in V$. Pour tout $(V, \varphi) \in \mathcal{C}_k^\tau$ notons $Sub^{>0}(V, \varphi)$ l'ensemble des sous-k-espaces vectoriels $W \subset V$ tels que $(W, \varphi|_{W\times W})$ est défini positif et $Sub^{<0}(V, \varphi)$ l'ensemble des sous-k-espaces vectoriels $W \subset V$ tels que $(W, \varphi|_{W\times W})$ est défini négatif.

(1) $s_+(\varphi)$ (resp. $s_-(\varphi)$) est la k-dimension des éléments maximaux de $Sub^{>0}(V, \varphi)$ (resp. $Sub^{<0}(V, \varphi)$);

(2) Pour toute k-base φ-orthogonale $\underline{\epsilon}$ de V, en notant

$$\underline{\epsilon_0} := \{\epsilon \in \underline{\epsilon} \mid \varphi(\epsilon, \epsilon) = 0\} \subset \underline{\epsilon},$$

$$\underline{\epsilon_+} := \{\epsilon \in \underline{\epsilon} \mid \varphi(\epsilon, \epsilon) > 0\} \subset \underline{\epsilon},$$

$$\underline{\epsilon_-} := \{\epsilon \in \underline{\epsilon} \mid \varphi(\epsilon, \epsilon) < 0\} \subset \underline{\epsilon},$$

on a que $\underline{\epsilon_0}$ est une k-base de $\ker(\varphi)$, $V(\underline{\epsilon})_+ := \oplus_{\epsilon\in\underline{\epsilon_+}} k\epsilon \in Sub^{>0}(V, \varphi)$ et $V(\underline{\epsilon})_- := \oplus_{\epsilon\in\underline{\epsilon_-}} k\epsilon \in Sub^{<0}(V, \varphi)$, donc que $s(\varphi) = (|\underline{\epsilon_+}|, |\underline{\epsilon_-}|)$;

(3) Si on suppose de plus que k **est hermitien**, il existe une k-base φ-orthogonale $\underline{\epsilon} = (\underline{\epsilon_0}, \underline{\epsilon_+}, \underline{\epsilon_-})$ de V telle que $|\underline{\epsilon_+}| = s_+$, $\underline{\epsilon_-} = s_-$

- $\varphi(\epsilon, \epsilon) = 0$, $\epsilon \in \underline{\epsilon_0}$;
- $\varphi(\epsilon, \epsilon) = 1$, $\epsilon \in \underline{\epsilon_+}$;
- $\varphi(\epsilon, \epsilon) = -1$, $\epsilon \in \underline{\epsilon_-}$.

En particulier, l'application signature induit une bijection

$$\underline{s} : \mathcal{L}^{\tau}_{2,k}(V)/GL_k(V)\tilde{\to}\Sigma(dim_k(V)).$$

On dit qu'une telle k-base $\underline{\epsilon}$ de V est φ-orthonormale. On a aussi,

Interprétation matricielle:

(i) Pour tout $\underline{s} = (s_+, s_-) \in \Sigma(r)$, et pour tout $\Phi \in M_r(k)$, ${}^t\Phi = {}^\tau\Phi$ et $\underline{s}(\Phi) = \underline{s}$ ssi il existe $U \in GL_r(k)$ tel que $\Phi = {}^tUI_{r,\underline{s}}{}^\tau U$.

(ii) Dans le cas où $r = s_+$, on dit que

$$U_r(k) := Stab_{GL_r(k)}(I_r) = \{U \in GL_r(k) \mid {}^tU^\tau U = I_r\} \subset GL_r(k)$$

est le *groupe unitaire* de rang r. (On pourrait bien sûr définir aussi des groupes unitaires généralisés

$$U_{r,\underline{s}}(k) := Stab_{GL_r(k)}(I_{r,\underline{s}}) = \{U \in GL_r(k) \mid {}^tI_{r,\underline{s}}{}^\tau U = I_{r,\underline{s}}\} \subset GL_r(k)$$

mais ils ne sont pas au programme).

(4) Enfin, si $(V, \varphi) \in \mathcal{C}^\tau_k$ est défini positif, on dit que (V, φ) est un k-espace vectoriel τ-hermitien ou que φ est un produit scalaire τ-hermitien sur V. On retrouve (avec exactement la même preuve que dans le cas symétrique),

Inégalité de Cauchy-Schwartz: pour tout $v_1, v_2 \in V$,

$$N_{k|k^\tau}(\varphi(v_1, v_2)) = \varphi(v_1, v_2)\tau(\varphi(v_1, v_2)) \le \varphi(v_1, v_1)\varphi(v_2, v_2)$$

et $N_{k|k^\tau}(\varphi(v_1, v_2)) = \varphi(v_1, v_1)\varphi(v_2, v_2)$ ssi v_1 et v_2 sont k-liés.

Si, de plus, on suppose que tout élément ≥ 0 de k^τ est un carré dans k^τ, on peut munir k de la norme

$$| - | : k \to k^\tau_{\ge 0}, \;\; x \mapsto \sqrt{x\tau(x)},$$

et V de la norme

$$| - |_\varphi : V \to k^\tau_{\ge 0}, \;\; v \mapsto \sqrt{\varphi(v, v)}.$$

On a encore

- **Inégalité de Cauchy-Schwartz:** pour tout $v_1, v_2 \in V$,

$$|\varphi(v_1, v_2)|_\tau \le |v_1|_\varphi |v_2|_\varphi$$

  et $|\varphi(v_1, v_2)|_\tau = |v_1|_\varphi |v_2|_\varphi$ ssi v_1 et v_2 sont k-liés.

- **Inégalité triangulaire:** pour tout $v_1, v_2 \in V$,

$$|v_1 + v_2|_\varphi \le |v_1|_\varphi + |v_2|_\varphi,$$

  et $|v_1 + v_2|_\varphi = |v_1|_\varphi + |v_2|_\varphi$ ssi $v_1 \in k_{\ge 0}v_2$.

- **Orthonormalisation de Gram-Schmidt:** Pour toute k-base $\underline{v}$ de V il existe une unique k-base φ-orthonormale $\underline{\epsilon}$ de V telle que

  (i) $\oplus_{1\le i\le s} k\epsilon_i = \oplus_{1\le i\le s} kv_i$, $1 \le s \le dim_k(V)$;

  (ii) $\varphi(\epsilon_i, v_i) > 0$, $i = 1, \dots, dim_k(V)$.

  On a également la même interprétation matricielle (décomposition QR) que dans le cas symétrique. Notons $T^{>0}_n(k) \subset GL_n(k)$ le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures dont les coefficients diagonaux sont dans $k^\tau_{>0}$ et $U_n(k) \subset GL_n(k)$ le sous-groupe τ-unitaire. L'application produit

$$U_n(k) \times T^{>0}_n(k) \to GL_n(k), \;\; (Q, R) \mapsto QR$$

  est bijective.

Exercice 2.15. (Inégalité de Hadamard) On munit $\mathbb{C}^r$ du produit scalaire $(V_1,V_2)\mapsto {}^t\overline{V}_1V_2$ et on note $V\mapsto ||V||=\sqrt{{}^t\overline{V}V}$ la norme associée. Soit $M\in M_r(\mathbb{C})$ et $C_1,\dots,C_r$ ses vecteurs colonnes. Montrer que $|det(M)|\leq ||C_1||\cdots||C_r||$ avec égalité ssi $C_1,\dots,C_r$ sont orthogonaux.

2.3. **Formes quadratiques et formes τ-hermitiennes.** Pour tout k-espace vectoriel V on note

$$\mathcal{Q}_k(V):=Im((-)|_{\Delta_V}:\mathcal{L}^{Id}_{2,k}(V)\to k^V)\subset k^V$$

le sous-k-espace vectoriel des *formes quadratiques sur* V. Comme $(-)|_{\Delta_V}:\mathcal{L}^{Id}_{2,k}(V)\to k^V$ est injective, on obtient donc par restriction un isomorphisme de k-espaces vectoriels

$$q_-:=(-)|_{\Delta_V}:\mathcal{L}^{Id}_{2,k}(V)\tilde{\to}\mathcal{Q}_k(V),\ \ \varphi\mapsto q_\varphi:=\varphi|_{\Delta_V}$$

dont l'inverse est donné par l'identité de polarization

$$\varphi_-:\mathcal{Q}_k(V)\tilde{\to}\mathcal{L}^{Id}_{2,k}(V),\ \ q\mapsto\varphi_q$$

viz

$$\varphi_q(v_1,v_2)=\frac{1}{2}(q(v_1+v_2)-q(v_1)-q(v_2))=\frac{1}{4}(q(v_1+v_2)-q(v_1-v_2)).$$

De même, si k est muni d'une involution τ, pour tout k-espace vectoriel V on note

$$\mathcal{H}^\tau_k(V):=Im((-)|_{\Delta_V}:\mathcal{L}^\tau_{2,k}(V)\to k^V)\subset k^V$$

le sous-k^τ-espace vectoriel des *formes quadratiques τ-hermitiennes sur* V. Là encore, comme $(-)|_{\Delta_V}:\mathcal{L}^\tau_{2,k}(V)\to k^V$ est injective, on obtient par restriction un isomorphisme de k^τ-espaces vectoriels

$$q_-:=(-)|_{\Delta_V}:\mathcal{L}^\tau_{2,k}(V)\tilde{\to}\mathcal{H}^\tau_k(V),\ \ \varphi\mapsto q_\varphi:=\varphi|_{\Delta_V}$$

dont l'inverse est donné par l'identité de polarisation

$$\varphi_-:\mathcal{H}^\tau_k(V)\tilde{\to}\mathcal{L}^\tau_{2,k}(V),\ \ q\mapsto\varphi_q$$

viz

$$\varphi_q(v_1,v_2)=\frac{1}{4}(q(v_1+v_2)-q(v_1-v_2))+\frac{1}{4\iota}(q(\iota v_1+v_2)-q(\iota v_1-v_2))$$

On transporte les terminologies de rang, noyau, non-dégénérée, signature, définie positive ou négative *etc* de φ_q à q. Par dualité, on peut interpréter l'existence d'une k-base φ-orthogonale / orthonormale en termes de formes k-linéaires. Notons $r:=dim_k(V)$.

- Pour tout $q\in\mathcal{Q}_k(V)$ il existe r formes k-linéaires $f_1,\dots,f_r:V\to k$ k-libres et $\lambda_1,\dots,\lambda_r\in k$ tels que $q=\sum_{1\leq i\leq r}\lambda_if_i^2$. De plus, pour toute décomposition de cette forme,

  $$rang(q)=|\{1\leq i\leq r\mid\lambda_i\neq 0\}|$$

  et si k est pré-euclidien,

  $$s_+(q)=|\{1\leq i\leq r\mid\lambda_i>0\}|$$

  En effet, il suffit de considérer une k-base φ-orthogonale $\underline{\epsilon}$ de (V,φ) et de prendre

  $$f_i:=\varphi(-,\epsilon_i):V\to k,\ \ \lambda_i=\frac{1}{\varphi(\epsilon_i,\epsilon_i)},\ \ i=1,\dots,r.$$

  On dit que $q=\sum_{1\leq i\leq r}\lambda_if_i^2$ est une réduction de Gauss de q. Dans le cas où $V=k^r$, on peut construire algorithmiquement les décompositions de Gauss en utilisant les formules

$$ax^2+2xy=a(x+\frac{y}{a})^2-\frac{y^2}{a},2axy+2xu+2yv=2(ax+v)(y+\frac{1}{a}u)-\frac{2}{a}uv,\ \ xy=\frac{1}{4}((x+y)^2-(x-y)^2).$$

  Algorithme de Gauss: On procède par récurrence sur le nombre de variables. Si $n=1$ ou si $q=0$, c'est tautologique. Si on sait construire une réduction de Gauss pour $\leq n$ variable et qu'on a une forme quadratique non nulle

  $$q(\underline{x})=\sum_{1\leq i\leq n+1}a_{i,i}x_i^2+2\sum_{1\leq i<j\leq n+1}a_{i,j}x_ix_j$$

  sur k^{n+1}, on distingue deux cas:

(1) il existe $1 \leq i \leq n+1$ tel que $a_{i,i} \neq 0$. On peut supposer que $a_{1,1} \neq 0$. On a donc
$$q(\underline{x}) = a_{1,1}x_1^2 + 2x_1 f(x_2, \ldots, x_{n+1}) + q'(x_2, \ldots, x_{n+1}),$$
avec f linéaire et q' quadratique. En appliquant la première formule, on obtient
$$\begin{aligned} q(\underline{x}) &= a_{1,1}(x_1 + \tfrac{1}{a_{1,1}} f(x_2, \ldots, x_{n+1}))^2 - \tfrac{1}{a_{1,1}} f(x_2, \ldots, x_{n+1})^2 + q'(x_2, \ldots, x_{n+1}) \\ &= a_{1,1}(x_1 + \tfrac{1}{a_{1,1}} f(x_2, \ldots, x_{n+1}))^2 + q''(x_2, \ldots, x_{n+1}) \end{aligned}$$
avec q'' quadratique. On pose $f_1(\underline{x}) = x_1 + \frac{1}{a_{1,1}} f(x_2, \ldots, x_{n+1})$ et, en appliquant l'hypothèse de récurrence à q'', on construit une famille k-libre $f_2, \ldots, f_{n+1}$ de formes k-linéaires en les $x_2, \ldots, x_{n+1}$ telle que $q'' = \sum_{2 \leq i \leq n+1} \lambda_i f_i^2$. On vérifie enfin que $f_1, \ldots, f_{n+1}$ est bien k-libre en utilisant que $f_2, \ldots, f_{n+1}$ l'est et que x_1 n'intervient pas dans l'expression des $f_2, \ldots, f_{n+1}$.

(2) pour tout $1 \leq i \leq n+1$, $a_{i,i} = 0$. Dans ce cas, il existe $1 \leq i < j \leq n+1$ tel que $a_{i,j} \neq 0$. On peut supposer que $a_{1,2} \neq 0$. On a donc
$$q(\underline{x}) = 2a_{1,2}x_1^2 + 2x_1 g_1(x_3, \ldots, x_{n+1}) + 2x_2 g_2(x_3, \ldots, x_{n+1}) + q'(x_3, \ldots, x_{n+1}),$$
avec g_1, g_2 linéaires et q' quadratique. En appliquant la deuxième formule, on obtient
$$\begin{aligned} q(\underline{x}) &= 2(a_{1,2}x_1 + g_2(x_3, \ldots, x_{n+1}))(x_2 + \tfrac{1}{a_{1,2}} f_1(x_3, \ldots, x_{n+1})) - \tfrac{2}{a_{1,2}} g_1(x_3, \ldots, x_{n+1}) g_2(x_3, \ldots, x_{n+1}) + q'(x_3, \ldots, x \\ &= 2(a_{1,2}x_1 + g_2(x_3, \ldots, x_{n+1}))(x_2 + \tfrac{1}{a_{1,2}} g_1(x_3, \ldots, x_{n+1})) + q''(x_3, \ldots, x_{n+1}), \end{aligned}$$
avec q'' quadratique. Enfin, en appliquant la troisième formule,
$$q(\underline{x}) = \frac{1}{2}((a_{1,2}x_1 + x_2 + g_1'(x_3, \ldots, x_{n+1}))^2 - (a_{1,2}x_1 - x_2 + g_2'(x_3, \ldots, x_{n+1}))^2 + q''(x_3, \ldots, x_{n+1})),$$
avec f_1', f_2' linéaires. On pose $f_1(\underline{x}) = a_{1,2}x_1 + x_2 + g_1'(x_3, \ldots, x_{n+1})$, $f_2(\underline{x}) = a_{1,2}x_1 - x_2 + g_2'(x_3, \ldots, x_{n+1})$, et on applique l'hypothèse de récurrence à q'' pour construire une famille k-libre $f_3, \ldots, f_{n+1}$ de formes k-linéaires en les $x_3, \ldots, x_{n+1}$ telle que $q'' = \sum_{3 \leq i \leq n+1} \lambda_i f_i^2$. Là encore, on vérifie facilement que la famille $f_1, \ldots, f_{n+1}$ ainsi obtenue est bien k-libre.

- Pour tout $q \in \mathcal{H}_k^\tau(V)$ il existe r formes k-linéaires $f_1, \ldots, f_r : V \to k$ k-libres et $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in k^\tau$ tels que $q = \sum_{1 \leq i \leq r} \lambda_i f_i{}^\tau f_i$. De plus, pour toute décomposition de cette forme,
$$rang(q) = |\{1 \leq i \leq r \mid \lambda_i \neq 0\}|$$
et si k^τ est pré-hermitien,
$$s_+(q) = |\{1 \leq i \leq r \mid \lambda_i > 0\}|$$
On laisse au lecteur la formulation de l'algorithme de Gauss dans le cas τ-hermitien...

3. Endomorphismes normaux et théorèmes spectraux

Dans ce qui suit, $\# = Id, \tau$. On dira que l'hypothèse (PS) est vérifiée si k est euclidien ou hermitien et dans ce cas, si $(V, \varphi) \in \mathcal{C}_k^\#$ est défini positif, on dira simplement que (V, φ) est un produit scalaire. On rappelle qu'alors, pour tout sous-k-espace vectoriel $W \subset V$, la restriction $(W, \varphi|_{W \times W})$ est encore un produit scalaire et toute k-base $\underline{\epsilon = \epsilon_1, \ldots, \epsilon_r}$ φ-orthogonale de V peut être φ-orthonormalisée en la remplaçant par $\alpha_1^{-1}\epsilon_1, \ldots, \alpha_r^{-1}\epsilon_r$, où $\alpha_i \in k$ est tel que $N_\#(\alpha_i) = \varphi(\epsilon_i, \epsilon_i)$.

3.1. **Adjoints.** Soit $(V, \varphi), (V', \varphi') \in \mathcal{C}_k^\#$ non-dégénérés. Pour tout $f : V \to V'$ k-linéaire il existe un unique $f^* : V' \to V$ k-linéaire tel que
$$\varphi'(f(v), v') = \varphi(v, f^*(v')), \quad v \in V,\ v' \in V'.$$
On dit que $f^* : W \to V$ est *l'adjoint de* $f : V \to W$ *relativement à* φ, φ'. L'opérateur d'adjonction
$$(-)^* : \mathrm{Hom}_k(V, V') \to \mathrm{Hom}_k(V', V)$$
vérifie les propriétés suivantes:

(1) (Involutif) $(-)^* \circ (-)^* = Id : \mathrm{Hom}_k(V, V') \to \mathrm{Hom}_k(V, V')$;

(2) (Contravariant) Si $(V'',\varphi'')\in\mathcal{C}_k^{\#}$, pour tout $f:V\to V'$, $f':V'\to V''$ k-linéaires, $(f'\circ f)^*=f^*\circ f'^*$; :

(3) (#-semilinéarité)
$$(f+\lambda g)^*=f^*+\#(\lambda)g^*,\ \ f,g\in \mathrm{Hom}_k(V,V'),\ \lambda\in k$$
(autrement dit, $(-)^*:\mathrm{Hom}_k(V,V')\to {}^{\#}\mathrm{Hom}_k(V',V)$ est k-linéaire);

(4) Si $V=V'$, pour tout $f:V\to V$ k-linéaire,

(i) $(f^n)^*=(f^*)^n$, $n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$;

(ii) $f\in GL_k(V)$ ssi $f^*\in GL_k(V)$, auquel cas $(f^*)^{-1}=(f^{-1})^*$.

(5) Si $(V,\varphi)=(V',\varphi')$, pour tout $f\in GL_k(V)$, $(f^n)^*=(f^*)^n$, $n\in\mathbb{Z}$.

Proof. On procède par analyse-synthèse.

- Analyse (unicité sous réserve d'existence): Supposons que $f^*:V'\to V$ existe. Alors il doit faire commuter le diagramme canonique de k-espaces vectoriels

(1)
$$\begin{tikzcd} {}^{\#}(V'^{\vee}) \arrow[r, "f^{\vee}"] & {}^{\#}(V^{\vee}) \\ V' \arrow[u, "v'\mapsto\varphi(-,v')"] \arrow[r, "f^*"'] & V \arrow[u, "v\mapsto\varphi(-,v)"'] \end{tikzcd},$$

et comme (V,φ) est non-dégénéré, la flèche
$$V\tilde{\to}{}^{\#}(V^{\vee}),\ v\mapsto\varphi(v,-)$$
est un isomorphisme, ce qui donne l'unicité de f^*

- Synthèse (existence): Il suffit de vérifier que la construction de $f^*:V'\to V$ donnée dans (1) convient.

Les propriétés (1) à (5) se démontrent en utilisant l'unicité de f^*. Par exemple, pour tout $v\in V$, $v'\in V'$
$$\varphi(f^*(v'),v)=\#(\varphi(v,f^*(v')))=\#(\varphi(f(v),v'))=\varphi(v',f(v))$$
donc $(f^*)^*=f$, ce qui montre (1) *etc.* □

Interpétation matricielle. Si $\underline{\epsilon}$ est une k-base de V et $\underline{\epsilon}'$ est une k-base de V', et que l'on note
$$\Phi:=(\varphi)_{\underline{\epsilon}}\in M_r(k),\ \ \Phi':=(\varphi')_{\underline{\epsilon}'}\in M_{r',r'}(k),\ \ M:=(f)_{\underline{\epsilon},\underline{\epsilon}'}\in M_{r',r}(k)$$
On a ${}^t\Phi={}^{\#}\Phi$, ${}^t\Phi'={}^{\#}\Phi'$ et $\Phi\in GL_r(k)$. La matrice $M^*:=(f^*)_{\underline{\epsilon}',\underline{\epsilon}}$ est l'unique matrice $M^*\in M_{r,r'}(k)$ telle que ${}^tM\Phi'=\Phi^{\#}M^*$ *viz*
$$M^*={}^{\#}\Phi^{-1t\#}M^{\#}\Phi'.$$
En particulier, si (V,φ), (V',φ') sont des produits scalaires, et $\underline{\epsilon}$ est une k-base φ-orthonormale de V et $\underline{\epsilon}'$ une k-base φ'-orthonormale de V', on a simplement $M^*={}^{t\#}M$.

Lorsque $(V,\varphi)=(V',\varphi')$, on dit que $f:V\to V$ est

auto-adjoint	si $f^*=f$;
anti auto-adjoint	si $f^*=-f$;
normal	si $ff^*=f^*f$;
unitaire	si $ff^*=f^*f=Id_V$;
positif	si $\varphi(f(v),v)\in Im(N_{\#})$, $v\in V$.

Commençons par lister quelques sorites, qui nous serviront dans la démonstration des théorèmes spectraux, reliant les propriétés de f et f^*.

Lemme 3.1. *Soit $(V,\varphi),(V',\varphi')\in\mathcal{C}_k^{\#}$ non-dégénérés, et $f:V\to V'$ k-linéaire.*

(1) *On a toujours* $(Im(f))^{\perp_{\varphi'}} = \ker(f^*)$, $\ker(f) = (Im(f))^{\perp_{\varphi'}}$. *Si, de plus,* $(V,\varphi), (V',\varphi')$ *sont anisotrope, on a aussi* $\ker(f) = \ker(f^*f), \ker(f^*) = \ker(ff^*)$.

Supposons de plus $(V,\varphi) = (V',\varphi')$. *On note* $Vp(f) \subset k$ *le sous-ensemble des valeurs propres de* f.

(2) *On a toujours* $rang(f) = rang(f^*)$ *et si* (V,φ) *est anisotrope,* $rang(f^*f) = rang(f) = rang(f^*) = rang(ff^*)$.

(3) *Pour tout sous-*k*-espace vectoriel* $W \subset V$, $f(W) \subset W \Rightarrow f^*(W^{\perp_\varphi}) \subset W^{\perp_\varphi}$. *Si, de plus,* (V,φ) *est un produit scalaire et* f *est normal, on a aussi* $f(W^{\perp_\varphi}) \subset W^{\perp_\varphi}$ *donc* $f^*(W) \subset W$ *et les restrictions* $f|_W^W$, $f|_{W^{\perp_\varphi}}^{W^{\perp_\varphi}}$ *sont encore normales avec* $(f|_W^W)^* = f^*|_W^W$, $(f|_{W^{\perp_\varphi}}^{W^{\perp_\varphi}})^* = f^*|_{W^{\perp_\varphi}}^{W^{\perp_\varphi}}$.

(4) $Vp(f^*) = \#Vp(f)$. *Si* (V,φ) *est anisotrope, et* f *est normal, pour tout* $\lambda \in k$ *on a*

$$\ker(f - \lambda Id_v) = \ker(f^* - \#\lambda Id_V).$$

De plus,

f	$Vp(f) \subset$
autoadjoint $(f^* = f)$	$k^{\#}$
antiautoadjoint $(f^* = -f)$	$\iota k^{\#}$
unitaire $(ff^* = f^*f = Id_V)$	$\ker(N_{\#})$

Si (V,φ) *est anisotrope et positive, on a aussi*

f	$Vp(f) \subset$
positif	$Im(N_{\#})$

Proof. (1) Comme $(f^*)^* = f$, il suffit de montrer $(Im(f))^{\perp_{\varphi'}} = \ker(f^*)$. Or, pour tout $v_2' \in V'$,

$$\begin{aligned} v_2' \in \ker(f^*) &\overset{(a)}{\Leftrightarrow} \text{pour tout } v_1 \in V,\ \varphi(v_1, f^*(v_2')) = 0 \\ &\overset{(b)}{\Leftrightarrow} \text{pour tout } v_1 \in V,\ \varphi'(f(v_1), v_2') = 0 \\ &\overset{(c)}{\Leftrightarrow} v_2' \in (Im(f))^{\perp_{\varphi'}}, \end{aligned}$$

où (a) résulte du fait que (V,φ) est non-dégénéré, (b) est la définition de f^*, et (c) est la définition de $(-)^{\perp_\varphi}$. Si, de plus, $(V,\varphi), (V',\varphi')$ sont anisotrope, là encore, comme $(f^*)^* = f$, il suffit de montrer $\ker(f) = \ker(f^*f)$. On a toujours $\ker(f) \subset \ker(f^*f)$. Inversement, pour tout $v \in \ker(f^*f)$, on a $\varphi(f(v), f(v)) = \varphi(v, f^*f(v)) = 0$ donc, comme (V,φ) est anisotrope, $f(v) = 0$.

(2) La seconde partie de l'assertion résulte de la deuxième partie de (1). Pour la première partie, comme (V,φ) est non-dégénéré, pour tout sous-k-espace vectoriel $W \subset V$ on a

$$dim_k(V) = dim_k(W) + dim_k(W^{\perp_\varphi}).$$

L'assertion résulte alors de la première partie de (1):

$$rang(f) = dim_k(imf) = dim_k(V) - dim_k((imf)^{\perp_\varphi}) \overset{(1)}{=\!=} dim_k(V) - dim_k(\ker(f^*)) = dim_k(im(f^*)) = rang(f^*).$$

(3) Pour tout $w^\perp \in W^{\perp_\varphi}$, et pour tout $w \in W$ on a

$$\varphi(w, f^*(w^\perp)) = \varphi(f(w), w^\perp) \in \varphi(W \times W^{\perp_\varphi}) = 0.$$

Si on suppose de plus que (V,φ) est un produit scalaire sur V, on a une décomposition en somme directe φ-orthogonale

$$V = W \oplus^{\perp_\varphi} W^{\perp_\varphi}$$

et $(W, \varphi|_{W\times W})$, $(W^{\perp_\varphi}, \varphi|_{W^{\perp_\varphi}\times W^{\perp_\varphi}})$ sont encore des produits scalaires donc admettent des bases φ-orthonormales $\underline{\epsilon}_W$, $\underline{\epsilon}_{W^{\perp_\varphi}}$. La concaténation $\underline{\epsilon}$ de $\underline{\epsilon}_W$, $\underline{\epsilon}_{W^{\perp_\varphi}}$ est une base φ-orthonormale de (V,φ)

adaptée à la décomposition $V = W \oplus^{\perp_\varphi} W^{\perp_\varphi}$. On a alors

$$M := (f)_{\underline{\epsilon}} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}, \quad M^* := (f^*)_{\underline{\epsilon}} = {}^{t\#}M = \begin{pmatrix} {}^{t\#}A & 0 \\ {}^{t\#}B & {}^{t\#}C \end{pmatrix}$$

et la condition f normal se réécrit $MM^* = M^*M$, ce qui équivaut à

(i) ${}^{t\#}BA = C^{t\#}B$;
(ii) ${}^{t\#}AA = A^{t\#}A + B^{t\#}B$;
(iii) ${}^{t\#}BB + {}^{t\#}CC = C^{t\#}C$.

En prenant la trace dans (ii), on obtient $tr(B^{t\#}B) = 0$, et donc, comme $(M_1, M_2) \mapsto tr(M_1{}^{t\#}M_2)$ définit un produit scalaire sur $M_r(k)$, on a $B = 0$. Donc $MM^* = M^*M$ ssi $B = 0$, ${}^{t\#}AA = A^{t\#}A$, ${}^{t\#}CC = C^{t\#}C$ ce qui, en revenant à l'interprétation vectorielle, est exactement la conclusion annoncée.

(4) Pour tout $\lambda \in k$,

$$\begin{aligned} \lambda \notin Vp(f) &\Leftrightarrow f - \lambda Id_V \in GL_k(V) \\ &\Leftrightarrow rang(f - \lambda Id_V) = dim_k(V) \\ &\overset{(a)}{\Leftrightarrow} rang((f - \lambda Id_V)^*) = dim_k(V) \\ &\overset{(b)}{\Leftrightarrow} rang(f^* - \#\lambda Id_V) = dim_k(V) \\ &\Leftrightarrow \#\lambda \in Vp(f^*), \end{aligned}$$

où (a) résulte de (2) et (b) de la $\#$-semilinéarité de $(-)^*$. Si on suppose de plus (V, φ) anisotrope et f normal, on a aussi $f - \lambda Id_V$ normal puisque $(f - \lambda Id_V)^* = f^* - \#\lambda Id_V$ donc, par (1),

$$\ker(f - \lambda Id_V) = \ker((f - \lambda Id_V)(f - \lambda Id_V)^*) = \ker((f - \lambda Id_V)^*(f - \lambda Id_V)) = \ker((f - \lambda Id_V)^*) = \ker(f^* - \#\lambda Id_V)$$

Soit maintenant $\lambda \in Vp(f)$ et $0 \neq v \in \ker(f - \lambda Id_V)$. Notons que si f est unitaire, f est inversible donc, dans ce cas, $\lambda \neq 0$. On a

$$\begin{aligned} \lambda\varphi(v, v) = \varphi(\lambda v, v) = \varphi(f(v), v) = \varphi(v, f^*(v)) &= \varphi(v, f(v)) = \#\lambda\varphi(v, v) \text{ si } f^* = f; \\ &= -\varphi(v, f(v)) = -\#\lambda\varphi(v, v) \text{ si } f^* = -f; \\ &= \varphi(v, f^{-1}(v)) = \#\lambda^{-1}\varphi(v, v) \text{ si } f^* = f^{-1}, \end{aligned}$$

ce qui donne la deuxième partie de (4). Enfin, si φ est positive et f est positive, si $\lambda = 0$, il n'y a rien à démontrer, si $\lambda \neq 0$, on a $\varphi(v, v) \in N_\#(k^\times)$ et $\lambda\varphi(v, v) = \varphi(\lambda v, v) = \varphi(f(v), v) \in N_\#(k^\times)$ donc $\lambda \in N_\#(k^\times)$ puisque $N_\#(k^\times) \subset k^{\#\times}$ est un sous-groupe.

□

3.2. **Réduction des endormorphismes normaux.** Soit $(V, \varphi) \in \mathcal{C}_k^\#$ non-dégénéré.

3.2.1. *Cas où k est algébriquement clos et (V, φ) anisotrope.* Supposons $k = \overline{k}$ algébriquement clos et (V, φ) anisotrope.

Proposition 3.2. *Pour tout $f : V \to V$ k-linéaire $ff^* = f^*f$ ssi f est diagonalisable dans une k-base φ-orthogonale de V.*

Proof. Le sens $\Leftarrow$ découle immédiatement de l'interprétation matricielle (et n'utilise pas les hypothèses $k = \overline{k}$ et (V, φ) anisotrope). En effet, s'il existe une k-base φ-orthogonale $\underline{\epsilon}$ de V tel que $M := (f)_{\underline{\epsilon}} \in M_r(k)$ soit diagonale, comme $\underline{\epsilon}$ est φ-orthogonale $D := (\varphi)_{\underline{\epsilon}}$ est diagonale, á coefficients dans $k^{\tau\times}$, donc $(f^*)_{\underline{\epsilon}} = D^{-1t\#}MD = {}^{t\#}M \in M_r(k)$ est aussi diagonale donc commute avec M. Prouvons le sens $\Rightarrow$. On raisonne par récurrence sur $r = dim_k(V)$. Si $r = 1$, c'est tautologique. Supposons $r \geq 2$ et l'énoncé démontré en dimension $\leq r-1$. Comme $k = \overline{k}$, f admet au moins une valeur propre $\lambda \in k$. Fixons $0 \neq v_\lambda \in \ker(f - \lambda Id_V)$ et notons $W := kv_\lambda \subset V$. Comme (V, φ) est anisotrope, $(W, \varphi|_{W\times W})$ est encore non-dégénéré donc, par le Lemme 1.4 (2), on a une décomposition en somme directe φ-orthogonale $V = W \oplus^{\perp_\varphi} W^{\perp_\varphi}$ avec $(W^{\perp_\varphi}, \varphi|_{W^{\perp_\varphi}\times W^{\perp_\varphi}})$ non-dégénéré et toujours anisotrope. Par le Lemme 3.1 (4), $v_\lambda \in \ker(f^* - \#\lambda Id_V)$ donc W est à la fois f- et f^*-stable. Par le Lemme 3.1 (3), $W^{\perp_\varphi}$ est aussi f- et f^*-stable. En particulier, sur $(W^{\perp_\varphi}, \varphi|_{W^{\perp_\varphi}\times W^{\perp_\varphi}})$, on a $(f|_{W^{\perp_\varphi}}^{W^{\perp_\varphi}})^* = f^*|_{W^{\perp_\varphi}}^{W^{\perp_\varphi}}$ donc $f|_{W^{\perp_\varphi}}^{W^{\perp_\varphi}}$ est normal et on peut appliquer l'hypothèse de récurrence pour construire une k-base $\underline{\epsilon}$ $\varphi|_{W^{\perp_\varphi}\times W^{\perp_\varphi}}$-orthogonale de $W^{\perp_\varphi}$ de diagonalisation de $f|_{W^{\perp_\varphi}}^{W^{\perp_\varphi}}$. La k-base $v_\lambda, \underline{\epsilon}$ convient. □

Ex: (Produits scalaires hermitiens) Les hypothèses de la Proposition 3.3 sont vérifiées si (V,φ) est un produit scalaire τ-hermitien (en particulier, (PS) est vérifiée). Dans ce cas, toute k-base $\underline{\epsilon} = \epsilon_1, \dots, \epsilon_r$ φ-orthogonale de V peut être φ-orthonormalisée en la remplaçant par $\alpha_1^{-1}\epsilon_1, \dots, \alpha_r^{-1}\epsilon_r$, où $\alpha_i \in k$ est tel que $N_\tau(\alpha_i) == \varphi(\epsilon_i, \epsilon_i)$, $i = 1, \dots, r$. On obtient donc, plus précisément:

Corollaire 3.3. *Supposons de plus que (V,φ) est un produit scalaire τ-hermitien. Pour tout $f : V \to V$ k-linéaire $ff^* = f^*f$ ssi f est diagonalisable dans une k-base φ-orthonormale de V.*

Interprétation matricielle: Supposons que (PS) est vérifiée. On rappelle que le groupe τ-unitaire de rang r est le sous-groupe

$$U_r^\tau(k) := \{U \in GL_r(k) \mid {}^{t\tau}UU = U^{t\tau}U = I_r\} \subset GL_r(k).$$

Pour tout $M \in M_r(k)$ on a

$${}^{t\tau}MM = M^{t\tau}M \text{ ssi il existe } U \in U_r(k) \text{ telle que } UMU^{-1}(= UM^{t\tau}U) \text{ est diagonale.}$$

En utilisant le Lemme 1.4 (4), on peut préciser le résultat ci-dessus comme suit

$$\begin{array}{rcl}
M \text{ vérifie} & \iff & UMU^{-1} \text{ est à coefficients dans} \\
{}^{t\tau}M = M & & k^\tau \\
{}^{t\tau}M = -M & & \iota k^\tau \\
{}^{t\tau}M = M^{-1} & & \ker(N_\tau) \\
{}^{t\tau}MM = M^{t\tau}M \text{ et } {}^{t\tau}X^{t\tau}MMX \geq 0,\ X \in M_{r,1}(k) & & \mathrm{im}(N_\tau)
\end{array}$$

3.2.2. *Cas où (V,φ) est un produit scalaire euclidien.* Dans cette section, on suppose que $(V,\varphi) \in \mathcal{C}_k^{Id}$ est un produit scalaire (en particulier, (PS) est vérifiée) et k **est réellement clos**. On rappelle que le groupe orthogonal de rang r est le sous-groupe

$$O_r(k) := \{U \in GL_r(k) \mid {}^tOO = O^tO = I_r\} \subset GL_r(k).$$

Dans ce cadre, l'analogue de la Proposition 3.3 est

Proposition 3.4. *Pour tout $f : V \to V$ k-linéaire $ff^* = f^*f$ ssi il existe une k-base φ-orthonormale $\underline{\epsilon}$ de V telle que*

$$(f)_{\underline{\epsilon}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \dots & & & & \\ & & \lambda_s & & & \\ & & & \mu_1 R_1 & & \\ & & & & \dots & \\ & & & & & \mu_t R_t \end{pmatrix} =: Diag(\underline{\lambda}, \underline{\mu R}),$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in k$, $\mu_1, \dots, \mu_t \in k^\times$, $\pm I_2 \neq R_1, \dots, R_t \in O_2(k)$.

Commençons par traiter un cas particulier qui va nous servir dans la preuve du cas général.

Lemme 3.5. *Supposons que $r = dim_k(V) = 2$. Pour tout $f : V \to V$ k-linéaire si $ff^* = f^*f$ et si f n'est pas diagonalisable, alors, pour toute k-base φ-orthonormale $\underline{\epsilon}$ de V, il existe*[4] *$\mu \in k^\times$ et $\pm I_2 \neq R \in O_2(k)$ tels que $(f)_{\underline{\epsilon}} = \mu R$.*

Proof. Fixons une k-base φ-orthonormale $\underline{\epsilon}$ de V et écrivons

$$(f)_{\underline{\epsilon}} = M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

[4]Autrement dit, tout endormorphisme normal non-diagonalisable d'un plan quadratique euclidien est produit d'une homothétie non nulle et d'une rotation $\neq \pm Id$.

La condition ${}^tMM = M{}^tM$ se réécrit

$$\begin{aligned} & b^2 = c^2,\ \ ac + bd = ab + cd \\ \iff & b = \epsilon c \text{ avec } \epsilon = \pm 1,\ b(\epsilon a + d) = b(a + \epsilon d) \\ \iff & b = \epsilon c \text{ avec } \epsilon = \pm 1,\ (\epsilon - 1)a = (\epsilon - 1)d, \end{aligned}$$

où la deuxième equivalence vient du fait que $b \neq 0$ puisque M n'est pas diagonalisable. Le cas $\epsilon = 1$ n'est pas possible car, sinon, $b = c$ et le polynôme caractéristique de M s'écrirait

$$\chi(T) = (T - a)(T - d) - b^2 = T^2 - (a + d)T + ad - b^2$$

avec

$$\Delta = (a + d)^2 - 4(ad - b^2) = (a - d)^2 + 4b^2 > 0.$$

En particulier, $\chi(T)$ serait simplement scindé sur k (ici, on utilise $(-)^2 : k^\times \twoheadrightarrow k^\times_{>0}$), contredisant là-encore le fait que M n'est pas diagonalisable. Donc $\epsilon = -1$, $b = -c$ et $a = d$. En notant $\delta = det(M) = a^2 + b^2 > 0$, on peut prendre $\mu = \sqrt{\delta}$, $R = \mu^{-1}M$. □

Proof. (de la Proposition 3.4) Le sens $\Leftarrow$ découle là encore immédiatement de l'interprétation matricielle. En effet, s'il existe une k-base φ-orthonormale $\underline{\epsilon}$ de V tel que $M := (f)_{\underline{\epsilon}} \in M_r(k)$ soit comme dans l'énoncé, comme $\underline{\epsilon}$ est φ-orthonormale $(\varphi)_{\underline{\epsilon}} = I_r$ donc $(f^*)_{\underline{\epsilon}} = {}^tM \in M_r(k)$ et on vérifie immédiatement que M et ${}^tM$ commutent. Prouvons le sens $\Rightarrow$. On raisonne à nouveau par récurrence sur $r = dim_k(V)$. Si $r = 1$, c'est tautologique. Supposons $r \geq 2$ et l'énoncé démontré en dimension $\leq r - 1$. Si f admet une valeur propre $\lambda \in k$, on raisonne exactement comme dans la preuve de la Proposition 3.3 à ceci-près qu'on veut une base φ-orthonormale (et pas seulement φ-orthogonale) mais par hypothèse de récurrence, on peut prendre la k-base $\underline{\epsilon}$ de $W^{\perp_\varphi}$ $\varphi|_{W^{\perp_\varphi} \times W^{\perp_\varphi}}$-orthonormale et considérer la k-base φ-orthonormale $\varphi(v_\lambda, v_\lambda)^{-1}v_\lambda, \underline{\epsilon}$. Supposons donc que f n'a pas de valeur propre dans k; les facteurs irréductible de son polynôme minimal $P(T) \in k[T]$ sont donc tous de degré 2. Choisissons-en un $P_0 \in k[T]$ (unitaire) et notons $P(T) = P_0(T)Q(T)$. La stratégie est de construire une sous-k-espace vectoriel $W \subset V$ f-stable et de k-dimension 2 (sur lequel on pourra appliquer le Lemme 3.5). Comme $Q(f) \neq 0$, il existe $v \in V$ tel que $w := Q(f)(v) \neq 0$. Par propriété universelle de $k[T]$, il existe un unique morphisme de k-algèbres $ev_f : k[T] \to End_k(V)$, $T \mapsto f$. On peut le composer avec le morphisme de k-espaces vectoriels $ev_w : End_k(V) \to V$, $g \mapsto g(w)$. On vérifie facilement que le noyau du morphisme composé $ev_{f,w} := ev_w \circ ev_f : k[T] \to V$ est un idéal non nul (puisque V est de k-dimension finie) et strict (puisque $ev_{f,w} : k[T] \to V$ est non nul) de $k[T]$ donc de la forme $\Pi(T)k[T]$ pour un certain $\Pi(T) \in k[T]$ unitaire de degré ≥ 1. On a donc un isomorphisme de k-espaces vectoriels

$$k[T]/\Pi(T)k[T] \tilde{\to} im(ev_{f,w}) = k[f](w) =: W;$$

en particulier, $dim_k(W) = deg(\Pi)$. Par construction W est f-stable. De plus, par construction encore, $P_0(T)k[T] \subset \ker(ev_{f,w}) = \Pi(T) \in k[T]$ *viz* $\Pi | P_0$ dans $k[T]$. Comme P_0 est irréductible et Π de degré ≥ 1, on a $\Pi = P_0$ de degré 2. Par le Lemme 3.1 (3), W est aussi f^*-stable. On conclut ensuite exactement comme ci-dessus en utilisant le Lemme 3.5 sur W (en observant que le polynôme minimal de $f|_W^W$ est P_0 donc que f n'est pas diagonalisable sur k) et l'hypothèse de récurrence sur $W^{\perp_\varphi}$. □

Interprétation matricielle: Pour tout $M \in M_r(k)$ on a

$${}^tMM = M{}^tM \text{ ssi il existe } O \in O_r(k) \text{ telle que } M = ODO^{-1} (= OD{}^tO) = Diag(\underline{\lambda}, \underline{\mu}\underline{R})$$

avec $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in k$, $\mu_1, \dots, \mu_t \in k^\times$, $\pm I_2 \neq R_1, \dots, R_t \in O_2(k)$. De plus,

M vérifie	$\iff$ $OMO^{-1} = Diag(\underline{\lambda}, \underline{\mu}\underline{R})$ avec
${}^tM = M$	$t = 0$
${}^tM = -M$	$\lambda_i = 0$, $i = 1, \dots, s$, $\mu_i R_i = \begin{pmatrix} 0 & -b_i \\ b_i & 0 \end{pmatrix}$ avec $0 \neq b_1, \dots, b_t$.
${}^tM = M^{-1}$	$\lambda_1, \dots, \lambda_s, \mu_1, \dots, \mu_t = \pm 1$

3.3. **Deux applications classiques de la réduction des endormorphismes normaux (autoadjoints).**

3.3.1. *Réduction simultanée de deux formes bilinéaires dont l'une est un produit scalaire.* Soit $(V, \varphi) \in \mathcal{C}_k^{\#}$ un produit scalaire et $\varphi' \in \mathcal{L}_{2,k}^{\#}(V)$. On note $f : V \to V$ l'adjoint de $Id_V : V \to V$ relativement à φ, φ' *i.e.* l'unique morphisme k-linéaire $f : V \to V$ tel que le diagramme suivant commute

$$(*) \qquad \begin{tikzcd} {}^{\#}(V^\vee) \arrow[r, equal, "Id_{V^\vee}"] & {}^{\#}(V^\vee) \\ V \arrow[u, "v \mapsto \varphi'(-,v)"] \arrow[r, "f"'] & V \arrow[u, "\simeq"', "v \mapsto \varphi(-,v)"] \end{tikzcd} ,$$

ou encore, tel que

$$\varphi'(v, v') = \varphi(v, f(v')), \ \ v, v' \in V.$$

Lemme 3.6. *(1) $f \in GL_k(V)$ ssi $(V, \varphi') \in \mathcal{C}_k^{\#}$ est non-dégénéré;*
(2) $f : V \to V$ est autoadjoint dans (V, φ) i.e. $\varphi(f(v), v') = \varphi(v, f(v'))$, $v, v' \in V$;
(3) Pour toute k-base φ-orthogonale $\underline{\epsilon}$ de (V, φ), $f : V \to V$ est diagonalisable dans $\underline{\epsilon}$ ssi $\underline{\epsilon}$ est aussi φ'-orthogonale.

Proof. (1) est une conséquence immédiate de la définition de $f : V \to V$ par le diagramme (*). Pour (2), il suffit d'observer que pour tout $v, v' \in V$,

$$\varphi(v, f(v')) = \varphi'(v, v') = \#\varphi'(v', v) = \#\varphi(v', f(v)) = \#\#\varphi(f(v), v') = \varphi(f(v), v').$$

Enfin, (3) résulte du fait que si $\underline{\epsilon}$ est une k-base de V, on a

$$(\varphi')_{\underline{\epsilon}} = (\varphi)_{\underline{\epsilon}} (f)_{\underline{\epsilon}}$$

et que, comme $(V, \varphi) \in \mathcal{C}_k^{\#}$ est non-dégénéré, $(\varphi)_{\underline{\epsilon}} \in GL_k(V)$ donc, si $(\varphi)_{\underline{\epsilon}}$ est diagonale, $(\varphi')_{\underline{\epsilon}}$ est diagonale ssi $(f)_{\underline{\epsilon}}$ est diagonale. □

Corollaire 3.7. *Pour tout $(V, \varphi) \in \mathcal{C}_k^{\#}$ non-dégénéré, $(V, \varphi) \in \mathcal{C}_k^{\#}$ produit scalaire ssi pour tout $(V, \varphi') \in \mathcal{C}_k^{\#}$, il existe une k-base $\underline{\epsilon}$ de V qui soit à la fois φ- et φ'-orthogonales.*

Proof. Le sens $\Rightarrow$ résulte presque immédiatement du Lemme 3.6 et du théorème spectral. En effet, pour tout $(V, \varphi') \in \mathcal{C}_k^{\#}$, et en notant encore $f : V \to V$ l'adjoint de $Id_V : V \to V$ relativement à φ, φ', par le Lemme 3.6 (2), $f : V \to V$ est autoadjoint dans (V, φ) donc, par le théorème spectral (que l'on peut effectivement invoquer puisque (V, φ) est un produit scalaire), il existe une k-base φ-orthonormale $\underline{\epsilon}$ de V tel que $f : V \to V$ soit diagonalisable dans $\underline{\epsilon}$. Par le Lemme 3.6 (3), $\underline{\epsilon}$ est alors automatiqement φ'-orthogonale.
Pour le sens $\Leftarrow$, raisonnons par la contraposée. Si $(V, \varphi) \in \mathcal{C}_k^{\#}$ n'est pas un produit scalaire, il existe une k-base $\underline{\epsilon}$ de V telle que $\Phi := (\varphi)_{\underline{\epsilon}} = diag(1, -1, \epsilon_3, \ldots, \epsilon_r)$ avec $\epsilon_3, \ldots, \epsilon_r = \pm 1$. Considérons $(V, \varphi') \in \mathcal{C}_k^{\#}$ telle que $\Phi' := (\varphi')_{\underline{\epsilon}} = diag(M, \epsilon_3, \ldots, \epsilon_r)$, où

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

On a alors $(f)_{\underline{\epsilon}} = \Phi^{-1}\Phi' = diag(N, 1, \ldots, 1)$, où

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par le Lemme 3.6 (3), il suffit de montrer qu'on ne peut pas trouver de matrice $U \in GL_r(k)$ telle que ${}^{t\#}UU = I_r = U^{t\#}U$ et UNU^{-1} soit diagonalisable. Notons $\Pi(T) = T^2 - 2T + 5 \in k[T]$ le polynôme minimal de N. Si $\# = Id$, c'est immédiat car le polynôme minimal de N est irréductible dans $k[T]$ ($\Delta = -16 < 0$). Si $\# = \tau$, $\Pi(T) = (T - \lambda)(T - \tau(\lambda))$ avec $\lambda \neq \tau(\lambda) \in k$. Mais alors

$$diag(\lambda, \tau(\lambda)) = UNU^{-1} = {}^{t\tau}U^{-1}N^{t\tau}U = {}^{t\tau}(UNU^{-1}) = diag(\tau(\lambda), \lambda),$$

ce qui contredit $\lambda \neq \tau(\lambda)$. □

3.3.2. *Décomposition polaire.* Dans ce paragraphe, on va vraiment utiliser la topologie du corps k et pas seulement ses propriétés (semi)algébriques. On note $S_r^{\geq 0}(\mathbb{R}) \subset M_r(\mathbb{R})$ le sous-ensemble des matrices symétriques définies positives *viz* des $S \in M_r(\mathbb{R})$ telles que ${}^tM = M$ et ${}^tXMX \geq 0$, $X \in M_{r,1}(\mathbb{R})$, et $S_r^{>0}(\mathbb{R}) = S_r^{\geq 0}(\mathbb{R}) \cap GL_r(\mathbb{R}) \subset S_r^{\geq 0}(\mathbb{R})$ celui des matrices symétriques définies positives. De même, on note $H_r^{\geq 0}(\mathbb{C}) \subset M_r(\mathbb{C})$ le sous-ensemble des matrices hermitiennes positives *viz* des $H \in M_r(\mathbb{C})$ telles que ${}^t\overline{M} = M$ et ${}^tXM\overline{X} \geq 0$, $X \in M_{r,1}(\mathbb{C})$, et $H_r^{>0}(\mathbb{C}) = H_r^{\geq 0}(\mathbb{C}) \cap GL_r(\mathbb{C}) \subset H_r^{\geq 0}(\mathbb{C})$ celui des matrices hermitiennes définies positives.

Théorème 3.8. (Décomposition polaire)

(1) (Variante réelle) L'application produit matriciel induit un homéomorphisme

$$O_r(\mathbb{R}) \times S_r^{>0}(\mathbb{R}) \tilde{\to} GL_r(\mathbb{R}), \quad (O, S) \mapsto OS.$$

(2) (Variante complexe) L'application produit matriciel induit un homéomorphisme

$$U_r(\mathbb{R}) \times H_r^{>0}(\mathbb{C}) \tilde{\to} GL_r(\mathbb{C}), \quad (U, H) \mapsto UH.$$

Proof. On ne traite que (1); la preuve de (2) est similaire et on la laisse en exercice. Montrons d'abord que $O_r(\mathbb{R}) \times S_r^{>0}(\mathbb{R}) \to GL_r(\mathbb{R})$ est bijective *viz* que pour tout $M \in GL_r(\mathbb{R})$ il existe un unique couple $(O, S) \in O_r(\mathbb{R}) \times S_r^{>0}(\mathbb{R})$ tel que $M = OS$. Si un tel couple existe, on aura en particulier $\Sigma := {}^tMM = {}^tS{}^tOOS = S^2$. Comme $\Sigma \in S_r^{>0}(\mathbb{R})$, par le théorème spectral, il existe $Q \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $Q\Sigma Q^{-1} = \Delta$ soit diagonale a coefficients dans $\mathbb{R}_{>0}$. Notons $\Delta = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$, et $\sqrt{\Delta} := diag(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_r})$. Par construction $S := Q^{-1}\sqrt{\Delta}Q = {}^tQ\sqrt{\Delta}Q \in S_r^{>0}(\mathbb{R})$ et $O := MS^{-1} \in O_r(\mathbb{R})$ car

$${}^t(MS^{-1})MS^{-1} = {}^tS^{-1t}MMS^{-1} = S^{-1}S^2S^{-1} = I_r.$$

Cela montre l'existence. Pour l'unicité, si $M = OS = O'S'$, on doit encore avoir $S^2 = S'^2 = \Sigma$. En utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange, on peut trouver $P \in \mathbb{R}[T]$ (de degré $|Vp(\Sigma_M)|$) tel que $P(\lambda) = \sqrt{\lambda}$, pour tout $\lambda \in Vp(\Sigma)$. En particulier, $P(S'^2) = P(S^2) = Q^{-1}P(\Delta)Q = Q^{-1}\sqrt{\Delta}Q = S$ donc S' et $S = P(S')$ commutent donc sont codiagonalisables: il existe $A \in GL_r(\mathbb{R})$ tels que $ASA^{-1} = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ et $AS'A^{-1} = diag(\lambda'_1, \dots, \lambda'_r)$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_r, \lambda'_1, \dots, \lambda'_r > 0$. Comme $S^2 = S'^2$, $\lambda_i^2 = \lambda_i'^2$ donc $\lambda_i = \lambda'_i$, $i = 1, \dots, r$ et $S = S'$ (donc $O = O'$). Il reste à voir que l'application $O_r(\mathbb{R}) \times S_r^{>0}(\mathbb{R}) \to GL_r(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme. Elle est continue car le produit matricielle l'est. Pour vérifier que son inverse est aussi continue, on va utiliser le critère séquentiel de continuité *viz* que si M_n, $n \geq 0$ est une suite de $GL_r(\mathbb{R})$ et que pour chaque $n \geq 0$, $M_n = O_nS_n$ est la décomposition polaire de M_n alors $M_n \to M \in GL_r(\mathbb{R})$ de décomposition polaire $M = OS$ (si et) seulement si $O_n \to O$ et $S_n \to S$. Comme $O_r(\mathbb{R})$ est compact (car fermé borné dans $M_r(\mathbb{R})$ - écrire les détails), $O_n \to O$ ssi O est l'unique valeur d'adhérence de O_n, $n \geq 0$. Soit donc $O_{\phi(n)}$, $n \geq 0$ une suite extraite convergent de O_n, $n \geq 0$ et $O_{\phi(n)} \to O_0 \in O_r(\mathbb{R})$ sa limite. On a donc $S_{\phi(n)} \to S_0 := O_0^{-1}M$. Par construction S_0 est à la fois dans $GL_r(\mathbb{R})$ et dans l'adhérence $S_r^{\geq 0}(\mathbb{R})$ de $S_r^{>0}(\mathbb{R})$ dans $M_r(\mathbb{R})$, donc dans $S_r^{>0}(\mathbb{R})$. Mais $M = O_0S_0$ est donc la décomposition polaire de M; en particulier, par unicité de la décomposition polaire, $O_0 = O$. On a gagné! □

Corollaire 3.9. (Composantes connexes) *Le groupe* $O_r(\mathbb{R})$ *a exactement deux composantes connexes,* $SO_r(\mathbb{R}) := \ker(det : O_r(\mathbb{R}) \to \{\pm 1\})$ *et* $O_r(\mathbb{R}) \setminus SO_r(\mathbb{R})$. *Le groupe* $GL_r(\mathbb{R})$ *a lui-aussi exactement deux composantes connexes,* $GL_r^{>0}(\mathbb{R}) := det^{-1}(\mathbb{R}_{>0})$ *et* $GL_r(\mathbb{R}) \setminus GL_r^{>0}(\mathbb{R})$. *Les groupes* $U_r(\mathbb{C})$, $SU_r(\mathbb{C})$ *et* $GL_r(\mathbb{C})$ *sont connexes.*

Proof. Observons d'abord que, comme $det(S_r^{>0}(\mathbb{R})) \subset \mathbb{R}_{>0}$, la décomposition polaire pour $GL_r(\mathbb{R})$ se restreint en des homéomorphismes,

$$SO_r(\mathbb{R}) \times S_r^{>0}(\mathbb{R}) \tilde{\to} GL_r^{>0}(\mathbb{R}), \quad (O_r(\mathbb{R}) \setminus SO_r(\mathbb{R})) \times S_r^{>0}(\mathbb{R}) \tilde{\to} GL_r(\mathbb{R}) \setminus GL_r^{>0}(\mathbb{R}),$$

et que, pour tout $O_- \in O_r(\mathbb{R}) \setminus SO_r(\mathbb{R})$, la multiplication par O_- induit un homéomorphisme

$$(O_r(\mathbb{R}) \setminus SO_r(\mathbb{R})) \tilde{\to} SO_r(\mathbb{R}).$$

Comme un produit de connexe est connexes et que l'image d'un connexe par une application continue est connexe, il suffit donc de montrer que $SO_r(\mathbb{R})$, $S_r^{>0}(\mathbb{R})$, $U_r(\mathbb{C})$, $H_r^{\geq 0}(\mathbb{C})$ et $SU_r(\mathbb{C})$ sont connexes. On va en fait montrer qu'ils sont connexes par arcs en construisant à chaque fois, à l'aide du théorème spectral, un chemin continu d'un élément quelconque de l'un de ces ensembles vers I_r. Pour $M \in SO_r(\mathbb{R})$, il existe $O \in O_r(\mathbb{R})$ tel que $OMO^{-1} = diag(1, \ldots, 1, R_{\theta_1}, \ldots, R_{\theta_s})$ avec

$$R_\theta = \begin{pmatrix} cos(\theta) & sin(\theta) \\ -sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}$$

(on autorise $\theta = \pi$). On peut donc prendre

$$c_M : [0,1] \to SO_r(\mathbb{R}),\ t \mapsto O^{-1} diag(1, \ldots, 1, R_{(1-t)\theta_1}, \ldots, R_{(1-t)\theta_s})O.$$

Pour $M \in S_r^{>0}(\mathbb{R})$, il existe $O \in O_r(\mathbb{R})$ tel que $OMO^{-1} = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_r > 0$. On peut donc prendre

$$c_M : [0,1] \to S_r^{>0}(\mathbb{R}),\ t \mapsto {}^tO diag((1-t)\lambda_1 + t, \ldots, (1-t)\lambda_r + t)O.$$

Pour $M \in U_r(\mathbb{C})$ (resp. $M \in SU_r(\mathbb{C})$), il existe $U \in U_r(\mathbb{C})$ tel que $UMU^{-1} = diag(e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_r})$ avec $\theta_1, \ldots, \theta_r \in \mathbb{R}$ (resp. et $\theta_1 + \cdots, \theta_r = 0$). On peut donc prendre

$$c_M : [0,1] \to U_r(\mathbb{C}) \text{ resp. } SU_r(\mathbb{C}),\ t \mapsto U^{-1} diag(e^{i(1-t)\theta_1}, \ldots, e^{i(1-t)\theta_r})U.$$

Enfin, pour $M \in H_r^{>0}(\mathbb{C})$, il existe $U \in U_r(\mathbb{C})$ tel que $UMU^{-1} = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_r > 0$. On peut donc prendre

$$c_M : [0,1] \to H_r^{>0}(\mathbb{C}),\ t \mapsto {}^tU diag((1-t)\lambda_1 + t, \ldots, (1-t)\lambda_r + t)U.$$

□

4. Structure des espaces antisymétriques

La structure des espaces antisymétriques est étonnament simple. On suppose dans cette section que k est quelconque (de caractéristique $\neq 2$). Soit $(V, \varphi) \in \mathcal{C}_k^\epsilon$. Par définition, tout sous k-espace vectoriel $W \subset V$ de dimension ≤ 1 est φ-isotrope.

(1) Supposons d'abord $r := dim_k(V) = 2$ et (V, φ) non dégénéré *viz* pour tout $0 \neq \epsilon_1 \in V$ il existe $\epsilon_2 \in V$ tels que $\varphi(\epsilon_1, \epsilon_2) \neq 0$. En particulier, $\underline{\epsilon} = \epsilon_1, \epsilon_2$ est une k-base de V. Quitte à remplacer ϵ_1 par $\varphi(\epsilon_1, \epsilon_2)^{-1}\epsilon_1$, on peut supposer que $\varphi(\epsilon_1, \epsilon_2) = 1$. Donc,

$$(\varphi)_{\underline{\epsilon}} = J_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) En général, tout sous-k-espace vectoriel $W \subset V$ supplémentaire de $\ker(\varphi)$ dans V se décompose en somme directe φ-orthogonale

$$W = \oplus_{1 \leq i \leq s}^{\perp_\varphi} P_i$$

avec $dim_k(P_i) = 2$ et $(P_i, \varphi|_{P_i \times P_i}) \in \mathcal{C}_k^\epsilon$ non-dégénéré, $i = 1, \ldots, s$, donc il existe une k-base $\underline{\epsilon}$ de V tel que

$$(\varphi)_{\underline{\epsilon}} = Diag(0, \ldots, 0, J_1, \ldots, J_1)$$

où le nombre de 0 est $dim_k(\ker(\varphi))$. En particulier, $2|rang(\varphi)$ et l'application rang induit une bijection

$$rang : \mathcal{L}_{2,k}^\epsilon(V)/GL_k(V) \tilde{\to} 2\mathbb{Z} \cap \{0, \ldots, dim_k(V)\}.$$

Proof. On raisonne par récurrence sur $r = dim_k(W)$. Comme $(W, \varphi|_{W \times W}) \in \mathcal{C}_k^\epsilon$ est non-dégénéré, donc pour tout $0 \neq \epsilon_1 \in V$ il existe $\epsilon_2 \in V$ tels que $\varphi(\epsilon_1, \epsilon_2) \neq 0$. En particulier, $\underline{\epsilon} = \epsilon_1, \epsilon_2$ est k-libre. Quitte à remplacer ϵ_1 par $\varphi(\epsilon_1, \epsilon_2)^{-1}\epsilon_1$, on peut aussi supposer que $\varphi(\epsilon_1, \epsilon_2) = 1$. Notons $P_1 := k\epsilon_1 \oplus k\epsilon_2$. Comme $(W, \varphi|_{W \times W})$ et $(P_1, \varphi|_{P_1 \times P_1})$ sont non dégénérés, par le Lemme 1.4 (2), on a une décomposition en somme directe φ-orthogonale

$$W = P_1 \oplus^{\perp_\varphi} P_1^{\perp_\varphi}$$

avec $(P_1^{\perp_\varphi}, \varphi|_{P_1^{\perp_\varphi} \times P_1^{\perp_\varphi}}) \in \mathcal{C}_k^\epsilon$ non dégénéré, et on applique l'hypothèse de récurrence à $(P_1^{\perp_\varphi}, \varphi|_{P_1^{\perp_\varphi} \times P_1^{\perp_\varphi}})$. □

En réordonnant les vecteurs de la k-base $\underline{\epsilon}$ construite en (2), on peut réénoncer (2) en disant qu'il existe une k-base $\underline{\epsilon}$ de V tel que

$$(\varphi)_{\underline{\epsilon}} = J_{r,s} := \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \cdots & & \\ & & 0 & \\ & & & J_s \end{pmatrix}, \quad \text{où } J_s := \begin{pmatrix} 0 & I_s \\ -I_s & 0 \end{pmatrix}$$

Interprétation matricielle:

(1) Pour tout entier pair $0 \leq 2s \leq r$ et pour tout $\Phi \in M_r(k)$, ${}^t\Phi = -\Phi$ et $rang(\Phi) = 2s$ ssi il existe $U \in GL_r(k)$ tel que $\Phi = {}^tUJ_{r,s}U$.

(2) Pour tout entier $s \geq 1$, on dit que le sous-groupe

$$Sp_{2s}(k) := \{V \in GL_{2s}(k) \mid {}^tVJ_sV = J_s\} \subset GL_{2s}(k)$$

est le groupe symplectique de rang $2s$. Avec les notations de (1), si $rang(\Phi) = 2s = r$, on a

$$O(\Phi) = U^{-1}Sp_{2s}(k)U.$$

5. Groupes orthogonaux (et unitaires)

5.1. **Groupe orthogonal.** On suppose ici $(V, \varphi) \in \mathcal{C}_k^{Id}$ non dégénéré. On va s'intéresser à la structure du groupe orthogonal de (V, φ) *viz*

$$O(\varphi) = \{u \in GL_k(V) \mid u \cdot \varphi = \varphi\} \subset GL_k(V).$$

On dit que le sous-groupe normal

$$SO(\varphi) := \ker(det : O(\varphi) \to k^\times) \lhd O(\varphi)$$

est le groupe *spécial orthogonal* (on note aussi parfois $O^+(\varphi) := SO(\varphi)$). On a vu que tout choix d'une k-base ϕ-orthogonale $\underline{\epsilon}$ de V induit un isomorphisme de groupes

$$(-)_{\underline{\epsilon}} : O(\varphi) \tilde{\to} O(\Phi) = \{O \in GL_r(k) \mid {}^tO\Phi O = O\Phi^tO = \Phi\} \subset GL_r(k),$$

où $\Phi = (\varphi)_{\underline{\epsilon}}$. *via* cet isomorphism,

$$SO(\varphi) \tilde{\to} (O^+(\Phi) =) SO(\Phi) := \ker(det : O(\Phi) \to k^\times) \lhd O(\Phi).$$

Comme $det(O)^2 = det(O^tO)$, on a que $im(det : O(\Phi) \to k^\times) \subset \{\pm 1\}$ et comme la matrice $Diag(-1, 1, \dots, 1) \in O(\Phi)$ est de déterminant -1, on a en fait une suite exacte courte scindée de groupes

$$1 \to SO(\varphi) \to O_(\varphi) \stackrel{det}{\to} \{\pm 1\} \to 1$$

5.1.1. *Symétries orthogonales.* On appelle *symétries* de V les éléments d'ordre exactement 2 de $GL_k(V)$ et *symétries φ-orthogonales* ceux de $O(\varphi)$. En particulier, si $u \in GL_k(V)$ est une symétrie, on a $V = \ker(u - Id_V) \oplus \ker(u + Id_V)$ et c'est l'unique décomposition en somme directe u-stable $V = V^+(u) \oplus V^-(u)$ telle que $u|_{V^+(u)} = Id_{V^+(u)}$, $u|_{V^-(u)} = -Id_{V^-(u)}$.

Lemme 5.1. *Si $u \in GL_k(V)$ est une symétrie, $u \in O(\varphi)$ ssi $V^+(u) \perp_\varphi V^-(u)$. En particulier, $v^+(u)^{\perp_\varphi} = V^-(u)$, $V^-(u)^{\perp_\varphi} = V^+(u)$, et $(V^+(u), \varphi|_{V^+(u)\times V^+(u)})$, $(V^-(u), \varphi|_{V^-(u)\times V^-(u)})$ sont tout deux non-dégénérés. Inversement, pour tout sous-k-espace vectoriel $W \subset V$ tel que $(W, \varphi|_{W\times W})$ est non-dégénéré, il existe une unique symétrie $\sigma_W \in O(\varphi)$ telle que $W = V^+(\sigma_W)$.*

Proof. $\Leftarrow$: Si $V^+(u) \perp_\varphi V^-(u)$, la décomposition $V = V^+(u) \oplus V^-(u)$ est φ-orthogonale donc si $\underline{\epsilon}^+$ est une k-base φ-orthogonale de $(V^+(u), \varphi|_{V^+(u)\times V^+(u)})$ et $\underline{\epsilon}^-$ une k-base φ-orthogonale de $(V^-(u), \varphi|_{V^-(u)\times V^-(u)})$, la concaténation $\underline{\epsilon} = \underline{\epsilon}^+, \underline{\epsilon}^-$ est une k-base φ-orthogonale de V. Par construction

$$U := (u)_{\underline{\epsilon}} = diag(1, \dots, 1, -, \dots, -1)$$

et $\Phi := (\varphi)_{\underline{\epsilon}}$ est diagonale inversible donc ${}^tU\Phi U = \Phi^tUU = I_r$. $\Leftarrow$: si $u \in O(\varphi)$, pour tout $v^+ \in V^+(u)$, $v^- \in V^-(u)$, on a

$$\varphi(v^+, v^-) = -\varphi(u(v^+), u(v^-)) = -\varphi(v^+, v^-),$$

donc $\varphi(v^+, v^-) = 0$. Enfin, si $W \subset V$ est un sous-k-espace vectoriel tel que $(W, \varphi|_{W\times W})$ est non-dégénéré, on a une décomposition en somme directe φ-orthogonale

$$V = W \oplus^{\perp_\varphi} W^{\perp_\varphi}$$

et on peut prendre $\sigma_W = Id_W \oplus -Id_{W^{\perp_\varphi}}$. $\square$

Pour tout entier $1 \leq s \leq r$, notons $\Omega_2^s(O(\varphi)) \subset O(\varphi)$ le sous-ensemble des symétries orthogonales $\sigma \in O(\varphi)$ telles que $dim_k(V^-(\sigma)) = s$, $Gr(s, V)$ l'ensemble des sous-k-espaces vectoriels $W \subset V$ tels que $dim_k(W) = s$ et $Gr^\varphi(s, V) \subset Gr(s, V)$ le sous-ensemble des $W \in Gr(s, V)$ tels que $(W, \varphi|_{W\times W})$ est non-dégénéré. L'application $W \mapsto \sigma_W$ induit donc une bijection

$$\sigma_- : Gr^\varphi(s, V) \tilde{\to} \Omega_2^s(O(\varphi))$$

d'inverse l'application $V^+(-) : \Omega_2^s(O(\varphi)) \tilde{\to} Gr^\varphi(s, V)$. Notons de plus que $O(\varphi)$ agit naturellement sur $Gr^\varphi(s, V)$ (par $u{\cdot}W = u(W)$) et sur $\Omega_2(O(\varphi))$ (par $u{\cdot}\sigma = u\sigma u^{-1}$) et que l'application $\sigma_- : Gr^\varphi(s, V) \tilde{\to} \Omega_2^s(O(\varphi))$ est $O(\varphi)$-équivariante. En effet, pour tout $W \in Gr^\varphi(s, V)$ et $u \in O(\varphi)$, on a encore $u\sigma_W u^{-1} \in O(\varphi)$ d'ordre exactement deux et $\ker(u\sigma_W u^{-1} - Id) = u(\ker(\sigma_W - Id)) = u(W)$, donc $u\sigma_W u^{-1} = \sigma_{u(W)}$.

On appelle parfois aussi *reflexions φ-orthogonales* (resp. *renversements φ-orthogonaux*) les éléments de $\Omega_2^1(\varphi)$ (resp. $\Omega_2^2(\varphi)$). Si $W \subset V$ est un sous-k-espace vectoriel, on note $r_W := \sigma_{W^{\perp_\varphi}} = -\sigma_W$. Donc les reflexions φ-orthogonales (resp. renversements φ-orthogonaux) sont les r_D (resp. r_P) avec $D \subset V$ droite vectoriel (resp. $P \subset V$ plan vectoriel).

A partir de maintenant, on va supposer k euclidien et que $(V, \varphi) \in \mathcal{C}_k^{Id}$ est définie positif. On a alors $Gr^\varphi(s, V) = Gr(s, V)$ et l'action de $SO(\varphi)$ sur $Gr(s, V)$ est transitive. En effet, si $W_1, W_2 \in Gr(s, V)$, on a

$$V = W_1 \oplus^{\perp_\varphi} W_1^{\perp_\varphi} = W_2 \oplus^{\perp_\varphi} W_2^{\perp_\varphi}.$$

En particulier, pour $i = 1, 2$, si $\underline{\epsilon}_i$ est une k-base φ-orthonormale de W_i et $\underline{\epsilon}_i^\perp$ est une k-base φ-orthonormale de $W_i^{\perp_\varphi}$, la concaténation $\underline{e}_i = \underline{\epsilon}_i, \underline{\epsilon}_i^\perp$ est une k-base φ-orthonormale de V. soit alors $u \in GL_k(V)$ défini par $u(\underline{e}_1) = \underline{e}_2$. Par construction $u(W_1) = W_2$, et comme $\underline{e}_1, \underline{e}_2$ sont des k-bases φ-orthonormales, $u \in O(\varphi)$,et si $u \notin SO(\varphi)$, on peut toujours remplacer u par $u \circ \sigma_{(kw_1)^{\perp_\varphi}}$ pour n'importe quel $0 \neq v_1 \in W_1$.

5.1.2. *Le cas $dim_k(V) = 2$.*

5.1.2.1. *Groupe des angles*. Pour tout $a, b \in k$, notons

$$R_{(a,b)} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

En reprenant la preuve du Lemme 3.5 en ajoutant la contrainte $M^tM = I_2 = {}^tMM$ et $det(M) = 1$, on voit immédiatement que l'application $R_- : k^2 \to M_2(k)$ se restreint en un isomorphisme de groupes

$$R_- : S_1(k) \tilde{\to} SO_2(k),$$

où $S_1(k) := \{(a, b) \in k^2 \mid a^2 + b^2 = 1\} \subset k^2$, muni de la loi de composition

$$(a_1, b_1) * (a_2, b_2) = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_1 + a_2b_2),$$

ce qui en fait un groupe abélien d'élément neutre $(1, 1)$.

Rem.: Si $k = \mathbb{R}$, on a un diagramme commutatif canonique de groupes topologiques

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}, +) \arrow[r, "t\mapsto e^{it}"] \arrow[rr, bend left, "t\mapsto(cos(t),sin(t))"] \arrow[d] & (\ker(|-|), \cdot) & (S_1(\mathbb{R}), *) \arrow[l, "(a,b)\mapsto a+ib"', "\simeq"] \arrow[r, "R_-", "\simeq"'] & SO_2(\mathbb{R}) \\
(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, +) \arrow[ur, "\simeq"'] & & &
\end{tikzcd}$$

Notons encore $R_- : (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, +)\tilde{\to}SO_2(\mathbb{R})$ l'isomorphisme de groupe ainsi obtenu. Pour tout $M \in SO_2(\mathbb{R})$ on dit que l'unique $\overline{\theta} \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ tel que $R_{\overline{\theta}} = M$ est l'angle de M et on dit que $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, +)$ est le groupe des angles. Dans un corps euclidien arbitraire, on dit parfois encore que $(S_1(k), *)$ est le groupe des angles.

Si on considère maintenant un plan euclidien $(V, \varphi) \in \mathcal{C}_k^{Id}$ et que l'on fixe une k-base φ-orthonormale $\underline{\epsilon}_0$ de V, comme $SO_2(k)$ *viz* $SO(\varphi)$ est abélien, pour toute k-base φ-orthonormale $\underline{\epsilon}$ de V, l'isomorphisme de groupe

$$(-)_{\underline{\epsilon}} : SO(\varphi)\tilde{\to}SO_2(k)$$

ne dépend que de $det_{\underline{\epsilon}_0}(\underline{\epsilon}) = \pm 1$. On dit que le choix de $\underline{\epsilon}_0$ définit une orientation de (V, φ) et que les k-bases φ-orthonormales $\underline{\epsilon}$ de V telles que $det_{\underline{\epsilon}_0}(\underline{\epsilon}) = 1$ (resp. $det_{\underline{\epsilon}_0}(\underline{\epsilon}) = -1$) sont directes (resp. indirectes) dans le k-espace vectoriel euclidien orienté $(V, \varphi, \underline{\epsilon}_0)$. On définit alors l'angle de d'un élément $u \in SO(\varphi)$ comme l'unique $(a, b) \in S_1(k)$ tel que $(u)_{\underline{\epsilon}_0} = R_{(a,b)}$.

5.1.2.2. *Générateurs en dimension* 2.

Lemme 5.2. *Si $dim_k(V) = 2$, tout $Id_V \neq u \in O(\varphi)$, s'écrit comme produit d'au plus* 2 *reflexions φ-orthogonales.*

Proof. Comme $u \neq Id_V$, il existe $v \in V$ tel que $v' = u(v) \neq v$. On a alors

$$\varphi(v - v', v + v') = \varphi(v, v) - \varphi(v', v') = \varphi(v, v) - \varphi(u(v), u(v)) = \varphi(v, v) - \varphi(v, v) = 0.$$

Notons $D_1 = k(v - v')$ donc $D_1^{\perp_\varphi} = k(v - v')$. Par définition $r_{D_1}(v + v') = v + v'$, $r_{D_1}(v - v') = v' - v$ donc $2r_{D_1}(v') = 2v$ *viz* $r_{D_1} \circ u(v) = v$. Donc, comme $dim_k(V) = 2$, en notant $D_2 := (kv)^{\perp_\varphi}$, on a $V = kv \oplus^{\perp_\varphi} D_2$ avec $D_2 \subset V$ une droite $r_{D_1} \circ u$-stable. Comme $r_{D_1} \circ u \in O(\varphi)$, ses seules valeurs propres sont ± 1 donc soit $D_2 \subset V^+(\sigma_{D_1} \circ u)$ et $u = r_{D_1}$, soit $D_2 \subset V^-(r_{D_1} \circ u)$ et $u = r_{D_1} \circ r_{D_2}$. □

5.1.3. *Centre, générateurs, sous-groupe dérivé.*

Proposition 5.3. *On a $Z(O(\varphi)) = \{\pm Id_V\}$ et, si $dim_k(V) \geq 3$, $Z(SO(\varphi)) = Z(O(\varphi)) \cap SO(\varphi)$.*

Proof. On remarque que $\{\pm Id_V\} = O(\varphi) \cap k^\times Id_V$. Les inclusions $\supset$ étant évidentes, il suffit de montrer que tout $u \in Z(O(\varphi))$ (resp. $u \in Z(SO(\varphi))$) est une homothétie. Pour cela, on utilise la caractéristion classique: pour tout $u \in GL_k(V)$, $u \in k^\times Id_V$ ssi pour toute droite vectorielle $D \subset V$, $u(D) = D$. Traitons d'abord le cas de $O(\varphi)$. Soit donc $u \in Z(O(\varphi))$. Pour toute droite vectorielle $D \subset V$, on a $\sigma_D \overset{(1)}{=} u\sigma_D u^{-1} \overset{(2)}{=} \sigma_{u(D)}$, où (1) vient du fait que $\sigma_D \in O(\varphi)$ et $u \in Z(O(\varphi))$ et (2) du fait que $u\sigma_D u^{-1} \in O(\varphi)$ est encore d'ordre exactement 2 avec $V^+(u\sigma_D u^{-1}) = u(V^+(\sigma_D)) = u(D)$. On a donc bien $u(D) = D$. Soit maintenant $u \in Z(SO(\varphi))$. Comme $dim_k(V) \geq 3$, toute droite vectorielle $D \subset V$ peut s'écrire comme intersection de deux plans vectoriels $P_1, P_2 \subset V$. On applique l'argument précédent aux symétries orthogonales $\sigma_{P_i^{\perp_\varphi}} \in SO(\varphi)$, $i = 1, 2$ pour obtenir $u(P_i^{\perp_\varphi}) = P_i^{\perp_\varphi}$ donc $u^*(P_i) = u^{-1}(P_i) = P_i$ donc $u(P_i) = P_i$, $i = 1, 2$, ce qui implique $u(P_1 \cap P_2) = P_1 \cap P_2$. □

Proposition 5.4. *Pour tout $u \in O(\varphi)$, notons $r_+(u) := dim_k(V^+(u))$. Alors u s'écrit comme produit d'au plus $r - r_+(u)$ reflexions φ-orthogonales. Si $r \geq 3$ et $u \in O(\varphi)$, u s'écrit aussi comme produit d'au plus $r - r_+(u)$ retournements φ-orthogonaux.*

Proof. Par le théorème spectral pour les automorphismes orthogonaux, pour tout $u \in O(\varphi)$ il existe une décomposition en somme directe φ-orthogonale u-stable

$$V = V^+(u) \oplus^{\perp_\varphi} V^-(u) \oplus^{\perp_\varphi} \oplus_{1 \leq i \leq t}^{\perp_\varphi} W_i,$$

oú $dim_k(W_i) = 2$, $i = 1, \ldots, t$. D'après le Lemme 5.2, il existe des droites vectorielles $D_{i,1}, D_{i,2} \subset W_i$ telles que $u|_{W_i} = r_{D_{i,1}} \circ r_{D_{i,2}}$ dans $O(\varphi|_{W_i \times W_i})$, $i = 1, \ldots, t$. Si on note $r_- := r_-(u) := dim_k(V^-(u))$, que l'on fixe $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_{r_-}$ une k-base φ-orthogonale de $V^-(u)$ et que l'on pose $D_i = k\epsilon_i$, $i = 1, \ldots, r_-$, on obtient:

$$u = r_{D_1} \circ \cdots \circ r_{D_{r_-}} \cdot r_{D_{1,1}} \circ r_{D_{1,2}} \circ \cdots \circ r_{D_{t,1}} \circ r_{D_{t,2}}.$$

Pour la deuxième partie de l'énoncé, comme tout $u \in SO(\varphi)$ est produit d'un nombre *pair* $\leq r_-(u)$ de réflexions φ-orthogonales de la forme $r_{D_1} \circ r_{D_2}$ avec $D_1 \neq D_2$, il suffit de montrer que pour toutes droites vectorielles $D_1 \neq D_2 \subset V$, il existe des plans vectoriels $P_1, P_2 \subset V$ tels que

$$\pi := r_{D_1} \circ r_{D_2} = r_{P_1} \circ r_{P_2}.$$

Notons $H_i := D_i^{\perp_\varphi}$, $i = 1, 2$. Comme $H_1 \neq H_2$, $dim_k(H_1 \cap H_2) = r - 2$ donc, comme $r \geq 3$, on peut trouver $W \subset H_1 \cap H_2$ tel que $dim_k(W) = r - 3$; notons $H := W^{\perp_\varphi}$. Par construction, $\pi|_W = Id_W$; en particulier, $\pi(H) = H$ et on a encore $det(\pi|_H) = 1$ *viz* $\pi|_H \in SO(\varphi|_{H\times H})$. Comme $dim_k(H) = 3$, il existe $\Delta_1, \Delta_2 \subset H$ droites vectorielles telles que

$$\pi|_H = r_{\Delta_1} \circ r_{\Delta_2} = \sigma_{P_1} \circ \sigma_{P_2} = (-\sigma_{P_1}) \circ (-\sigma_{P_2}) = r_{P_1} \circ r_{P_2}.$$

Où on a noté $P_i := \Delta_i^{\perp_{\varphi|_{H\times H}}} \subset W$, $i = 1, 2$. On vérifie sur la construction que cette égalité reste vraie dans V. □

Corollaire 5.5. *Si $r \geq 2$ on a $D(O(\varphi)) = SO(\varphi)$ et si $r \geq 3$, $D(SO(\varphi)) = SO(\varphi)$.*

Proof. L'inclusion $D(O(\varphi)) \subset SO(\varphi)$ vient du fait que $det([u_1, u_2]) = 1$ et l'inclusion $D(SO(\varphi)) \subset SO(\varphi)$ est tautologique. Montrons les inclusions réciproques.

(1) On a vu qu'on avait un isomorphisme canonique $O(\varphi)$-équivariant $\sigma_- : Gr(s, V)\tilde{\to}\Omega_2^s(\varphi)$. Observons en outre que l'action de $SO(\varphi)$ sur $Gr(s, V)$ est transitive. En effet, pour tout $W_1, W_2 \in Gr(s, V)$ en considérant les décompositions en somme directe φ-orthogonale $V = W_1 \oplus^{\perp_\varphi} W_1^{\perp_\varphi} = W_2 \oplus^{\perp_\varphi} W_2^{\perp_\varphi}$ et en choisissant des k-bases φ-orthonormales $\underline{\epsilon}_i$, $\underline{\epsilon}_i^\perp$ de W_i et $W_i^{\perp_\varphi}$, $i = 1, 2$, tout $u \in GL_k(V)$ tel que $u(\underline{\epsilon}_1) = \underline{\epsilon}_2$, $u(\underline{\epsilon}_1^\perp) = \underline{\epsilon}_2^\perp$ est dans $O(\varphi)$ et vérifie $u(W_1) = W_2$. Si $u \notin SO(\varphi)$, on le remplace par $u \circ r_D$ pour n'importe quelle droite vectorielle $D \subset W_1$. On en déduit que les éléments de $\Omega_2^s(\varphi)$ sont donc tous conjugués sous $SO(\varphi)$.

(2) On est dans la situation où on a $D(G) \subset H \subset G$ avec $H \subset G$ normal, et engendré par une famille $S \subset H$ d'éléments qui sont tous conjugués sous H. Pour montrer que $D(G) = H$ il suffit donc de montrer que $S \cap D(G) \neq \emptyset$.

   (a) Dans le premier cas, montrons que $D(O(\varphi))$ contient un produit de deux reflexions φ-orthogonales. Pour cela, il suffit d'observer que si r_1, r_2 sont 2 reflexions φ-orthogonales, pour tout $u \in SO(\varphi)$ tel que $ur_1u^{-1} = r_2$, on a $r_1r_2 = r_1ur_1u^{-1} = [r_1, u] \in D(O(\varphi))$.

   (b) Dans le second cas, montrons que $D(SO(\varphi))$ contient un retournement φ-orthogonal. Pour cela, fixons $W \subset V$ tel que $dim_k(W) = 3$ et $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ une k-base φ-orthonormale de W. Pour $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$, notons $P_k = k\epsilon_i \oplus k\epsilon_j$ (en particulier $r_{P_k}(\epsilon_i) = -\epsilon_i$, $r_{P_k}(\epsilon_j) = -\epsilon_j$, $r_{P_k}(v) = v$, $v \in P_k^{\perp_\varphi} \ni \epsilon_k$). Donc $r_{P_i} \circ r_{P_j} = r_{P_k}$. Soit maintenant $u \in SO(\varphi)$ tel que $r_{P_j} = ur_{P_i}u^{-1}$; on a

$$r_{P_k} = r_{P_i} \circ r_{P_j} = r_{P_i} \circ ur_{P_i}u^{-1} = [r_{P_i}, u] \in D(SO(\varphi)).$$

□

5.1.4. *Simplicité de $PSO(\varphi)$ pour $r = 3, \geq 5$.* L'objectif de ce paragraphe est de montrer l'énoncé suivant. Soit $(V, \varphi) \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}^{Id}$ un produit scalaire. On note

$$PSO(\varphi) := SO(\varphi)/Z(SO(\varphi)).$$

(si $r := dim_{\mathbb{R}}(V)$ est impaire, on a donc simplement $PSO(\varphi) = SO(\varphi)$).

Théorème 5.6. *Si $r = 3$, ou $r \geq 5$, le groupe $PSO(\varphi)$ est simple.*

Rem. On peut montrer que si $r = 4$, $PSO(\varphi)\tilde{\to}SO_3(\mathbb{R}) \times SO_3(\mathbb{R})$ - *cf. e.g.* [VII.4, P96]).

Proof. La stratégie générale est la suivante. Soit G un groupe muni d'une classe de conjugaison $C \subset G$ qui engendre G. Pour montrer que G est simple, il suffit alors de montrer que pour tout sous-groupe normal $1 \neq N \subset G$, $N \cap C \neq \emptyset$. En effet, on aura alors automatiquement $C \subset N$ puisque N est normal dans G donc $G = \langle C \rangle \subset N$. Pour construire un élément de $C \cap N$, on part d'un élément $1 \neq g_0 \in N$ et on essaye de le "transformer" de façon *ad-hoc* en un élément de $C \cap N$. Une première idée - naïve - serait simplement de conjuguer g_0 par un élément de $g \in G$. On aura bien encore $gg_0g^{-1} \in N$ puisque N est normal dans G mais si $g_0 \notin C$, il n'y a bien sûr aucune chance pour que $gg_0g^{-1} \in C$! Ce n'est donc pas la bonne idée... Ce qui s'avère souvent plus fructueux, c'est de considérer les commutateurs $[g, g_0]$, $g \in G$. Là encore, on a $[g, g_0] = (gg_0g^{-1})g_0^{-1} \in N$ puisque N est normal mais comme g_0 et $[g, g_0]$ ne sont *a priori* pas conjugués, même si $g_0 \notin C$, il y a des chances qu'on trouve des $g \in G$ tels que $[g, g_0] \in C$. Dans notre cas, ce sont les retournements qui vont jouer le rôle de C. On va d'abord traiter le cas $r = 3$, puis se ramener à ce cas dans le cas général.

(1) Le cas $r = 3$. Soit donc $1 \neq N \subset SO(\varphi)$ un sous-groupe normale et $1 \neq g_0 \in N$. Considérons l'application continue
$$\alpha_{g_0} : SO(\varphi) \to \mathbb{R},\ \ g \mapsto tr([g, g_0]).$$
Comme $SO(\varphi)$ est compact connexe (*cf.* Corollaire 3.9), l'image de α_{g_0} est un compact connexe de $\mathbb{R}$ *viz* un segment fermé borné $[a, b]$. De plus, par le théorème spectral, pour tout $u \in SO(\varphi)$ il existe une $\mathbb{R}$-base φ-orthonormale $\underline{\epsilon}$ de V tel que $(u)_{\underline{\epsilon}} = diag(1, R_\theta)$ donc $tr(u) = 1 + 2cos(\theta) \leq 3$ et $tr(u) = 3$ ssi $cos(\theta) = 1$ *viz* $u = Id$ (donc, sur $SO(\varphi)$, la trace détecte l'identité). En particulier, $b \leq 3$ et comme $\alpha_{g_0}(g_0) = 3$, $b = 3$. On a aussi $a < 3$ sinon, pour tout $g \in SO(\varphi)$, $[g, g_0] = Id$ *viz* $g_0 \in Z(SO(\varphi)) = \{1\}$: contradiction. En particulier, $1 + 2cos(\pi/n) \in [a, 3]$ pour $n \gg 0$ ce qui signifie qu'il existe $g_n \in SO(\varphi)$ tel que $u_n := [g_n, g_0] \in N$ vérifie $(u)_{\underline{\epsilon}} = diag(1, R_{\pi/n})$ (ou $= diag(1, R_{-\pi/n}) = diag(1, R_{-\pi/n})^{-1}$) dans une $\mathbb{R}$-base φ-orthonormale $\underline{\epsilon}$ de V. En particulier $u_n^n \in N$ est un retournement.

(2) Le cas $r \geq 5$. Soit $1 \neq \overline{N} \subset PSO(\varphi)$ un sous-groupe normal et notons $Z(SO(\varphi)) \subsetneq N \subset SO(\varphi)$ son image inverse dans $SO(\varphi)$; c'est encore un sous-groupe normal de $SO(\varphi)$ et on veut montrer que $N = SO(\varphi)$. Pour tout sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel $W \subset V$ tel que $dim_{\mathbb{R}}(W) = 3$, on a un plongement naturel $\alpha_W : SO(\varphi|_{W\times W}) \hookrightarrow SO(\varphi)$, $u \mapsto u \oplus Id_{W^{\perp_\varphi}}$ et, par construction, l'image par α_W d'un retournement de $(W, \varphi_{W\times W})$ est encore un retournement de (V, φ). Il suffit donc de construire un tel W tel que $N \cap im(\alpha_W) \neq 1$ car, dans ce cas, comme $N \cap im(\alpha_W) \subset im(\alpha_W)$ est encore un sous-groupe normal et que $im(\alpha_W) \simeq SO(\varphi|_{W\times W})$ est simple par le cas $r = 3$, on aura $N \supset N \cap im(\alpha_W) = im(\alpha_W)$; en particulier N contiendra tous les retournements de $SO(\varphi)$ contenu dans $im(\alpha_W)$ et on aura gagné! Mais si $g \in SO(\varphi)$ vérifie $r_+(g) = dim_{\mathbb{R}}(V^+(g)) \geq r - 3$, on peut toujours construire un sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel $W \subset V$ tel que $dim_{\mathbb{R}}(W) = 3$ et $g \in im(\alpha_W)$; en effet, par le théorème spectral, $r_+(g) =\geq r - 3$ n'est possible que si $g = Id$ ou $r_+(g) = r - 2$ et, dans ce cas, on peut prendre $W = V^+(g)^{\perp_\varphi} \oplus^{\perp_\varphi} D$ où $D \subset V^+(g)$ est une droite vectorielle quelconque. Il suffit donc de construire $g \in N$ tel que $dim_{\mathbb{R}}(V^+(g)) \geq r - 3$. Pour cela, fixons $g_0 \in N$, $g_0 \notin Z(SO(\varphi))$ et observons que si $D_1, D_2 \subset V$ sont deux droites vectorielles, on a
$$[r_{D_1} r_{D_2}, g_0] = r_{D_1} r_{D_2} r_{g_0(D_2)} r_{g_0(D_1)}$$
En particulier, s'il existe une droite vectorielle $D_2 \subset V$ telle que $g_0(D_2) = D_2$ alors, pour n'importe quelle autre droite vectorielle $D_1 \subset V$, on aura $g := [r_{D_1} r_{D_2}, g_0] = r_{D_1} r_{g_0(D_1)}$ donc $V^+(g) \supset D_1^{\perp_\varphi} \cap D_2^{\perp_\varphi}$, qui est de codimension $\leq 1 + 1 = 2$ dans V. Il suffit donc en fait de construire $g \in N$, $g \notin Z(SO(\varphi))$ tel que $dim_{\mathbb{R}}(V^+(g)) \geq 1$. C'est ici qu'on utilise $r \geq 5$. En effet, si $P \subset V$ plan vectoriel, on a
$$N \ni g_P = [r_P, g_0] = r_P r_{g_0(P)}$$
et $V^+(g_P) \supset P^{\perp_\varphi} \cap g_0(P)^{\perp_\varphi}$, qui est de codimension $\leq 2 + 2 = 4 < 5 \leq r$ dans V. Il suffit donc de vérifier qu'on peut trouver un plan vectoriel $P \subset V$ tel que $g_P \notin Z(SO(\varphi))$; mais c'est en effet le cas puisque, comme $-Id_V$ n'a pas de point fixe, si $g_P \in Z(SO(\varphi))$, on a forcément $g_P = Id$. Mais si $g_P = Id$ pour tout plan vectoriel $P \subset V$, alors $g_0 \in Z(SO(\varphi))$ puisque les retournements engendrent $SO(\varphi)$. On a gagné!

□

5.2. **Quelques mots sur le groupe unitaire.** Soit $(V, \varphi) \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}^{\tau}$ un produit scalaire hermitien (où $\tau = \overline{(-)}$ est la conjugaison complexe). Disons quelques mots des groupes unitaire et spécial unitaire. Notons $U_1(\mathbb{C}) := \ker(|-| : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{R}_{>0}) \subset \mathbb{C}^\times$ le sous-groupe des complexes de module 1 et, pour tout $r \geq 1$,

$\mu_r(\mathbb{C}) := \ker((-)^r : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times) \subset U_1(\mathbb{C})$ le sous-groupe des racines r-ièmes de l'unité. On a encore une suite exacte courte scindée de groupes

$$1 \to SU(\varphi) \to U(\varphi) \stackrel{det}{\to} U_1(\mathbb{C}) \to 1.$$

Pour chaque droite vectorielle $D \subset V$, et $\zeta \in U_1(\mathbb{C})$, notons $r_{(D,\zeta)} \in U(\varphi)$ défini par

$$r_{(D,\zeta)} = \zeta Id_D \oplus Id_{D^{\perp_\varphi}};$$

on dit que c'est la pseudo-refléxion définie par (D, ζ). Pour tout couple $D \subset P \subset V$ d'une droite vectorielle contenue dans un plan vectoriel de V, et $\zeta \in U_1(\mathbb{C})$, notons $r_{(D,P,\zeta)} \in SU(\varphi)$ défini par

$$r_{(D,P,\zeta)} = \zeta Id_D \oplus \zeta^{-1} Id_{D^{\perp_{\varphi|P\times P}}} \oplus Id_{P^{\perp_\varphi}};$$

on dit que c'est le pseudo-retournement défini par (D, P, ζ). Il résulte alors du théorème spectral que tout élément u de $U(\varphi)$ s'écrit comme produit d'au plus $r - r^+(u)$ pseudo-réflexions et que, si $r \geq 2$, tout élément u de $SU(\varphi)$ s'écrit comme produit d'au plus $r - r^+(u)$ pseudo-retournements. On a encore

$$Z(U(\varphi)) = \{\zeta Id_V \mid \zeta \in U_1(\mathbb{C})\} \simeq U_1(\mathbb{C}), \quad Z(SU(\varphi)) = Z(U(\varphi)) \cap SU(\varphi) = \{\zeta Id_V \mid \zeta \in \mu_r(\mathbb{C})\} \simeq \mu_r(\mathbb{C}),$$

et, pour $r \geq 2$, $D(U(\varphi)) = SU(\varphi)$ et $PSU(\varphi) = SU(\varphi)/Z(SU(\varphi))$ simple.

Eléments de bibliographie:

[CG13] Ph. Caldero et J. Germoni, *Histoires hédonistes de groupes et de géométries (tome 1)*, Calvage et Mounet, 2013.

[L93] S. Lang, *Algebra (3rd edition) - Chap. XV*, Addison- Wesley, 1993.

[P96] D. Perrin, *Cours d'algèbre*, Ellipses, 1996.

anna.cadoret@imj-prg.fr
IMJ-PRG – Sorbonne Université