Devoir maison 1

Exercice 1. On note E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à 2. On note $\mathcal{B}$ la base de E formée des polynômes $1, X, X^2$ et $\mathcal{B}^*$ la base duale de $\mathcal{B}$. On considère les trois formes linéaires sur E suivantes :

$$\ell_1(P) = P(1)$$
$$\ell_2(P) = P'(1)$$
$$\ell_3(P) = \int_0^1 P(x)dx$$

1. Quelles sont les coordonnées de ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 dans $\mathcal{B}^*$?
2. Montrer que (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3) est une base du dual E^*.
3. Trouver une base de E dont (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3) est la base duale.

Exercice 2.

1. On considère le plan affine $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}^3$, d'équation $2x - y + z = 3$. Donner un repère de $\mathcal{P}$. (Indication : commencer par donner une équation de du plan vectoriel P qui dirige $\mathcal{P}$, puis par trouver une base de P)
2. On considère la droite affine $\mathcal{D}$ passant par le point $(2, 1, -1)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u} = (-4, 1, 1)$. Trouver un système d'équations de la forme

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases},$$

dont $\mathcal{D}$ est l'ensemble des solutions. (Indication : commencer par trouver des équations pour la droite vectorielle D qui dirige $\mathcal{D}$)

Problème (Enveloppe convexe)**.** On rapelle que par définition, étant donnés deux points A, B de l'espace affine $\mathbb{R}^n$, le *segment* $[A, B]$ est l'ensemble des barycentres à coefficients positifs de A et B, ce qui peut aussi s'écrire :

$$[A, B] = \{M \in \mathbb{R}^n \mid \exists t \in [0, 1], M = tA + (1 - t)B\}.$$

Une partie $K \subset \mathcal{E}$ est dite *convexe* si pour tous points A, B de K, le segment $[A, B]$ est inclus dans K.

1. Parmi les cinq figures du plan suivantes, lesquelles sont convexes, lesquelles ne le sont pas : un cercle, un disque, une droite, un segment, la réunion de deux disques non confondus mais qui s'intersectent en au moins un point ? Pour chaque figure de la liste précédente qui n'est pas convexe, la dessiner ainsi qu'un segment qui contredit la définition (c'est à dire un segment ayant ses extrémités dans la figure en question mais n'étant pas entièrement inclus dedans)

Etant donnés $k + 1$ points $A_0, \ldots, A_k$ de $\mathbb{R}^n$, on appelle *enveloppe convexe* de $A_0, \ldots, A_k$, et on note $\mathcal{C}(A_0, \ldots, A_k)$ l'ensemble de tous les barycentres **à coefficients positifs** de $A_0, \ldots, A_k$.

2. Dessiner l'enveloppe convexe des ensembles de points du plan affine $\mathbb{R}^2$ suivants :
   – $(1, 2)$ et $(1, 3)$.
   – $(1, 1)$, $(1, 4)$ et $(4, 1)$.
   – $(1, 1)$, $(1, 4)$, $(4, 1)$ et $(2, 2)$.
3. Montrer que l'enveloppe convexe d'un ensemble de points est toujours convexe. (Indication : penser à l'associativité du barycentre)

On appelle demi-espace toute partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^n$ de la forme $\mathcal{D} = \{M \in \mathbb{R}^n \,|\, \ell(\overrightarrow{OM}) \geq a\}$, où ℓ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$, O est le point $(0, \dots, 0)$ et a est un réel.

4. Représenter les demi-espaces de $\mathbb{R}^2$ suivants : $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \geq 1\}$, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geq 1\}$, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, -x - y \geq -4\}$.

Etant donnés $k + 1$ points $A_0, \dots, A_k$ de $\mathbb{R}^n$, on note $\mathcal{I}(A_0, \dots, A_k)$ l'intersection de tous les demi-espaces qui contiennent $A_0, \dots, A_k$.

5. Montrer que si un demi-espace $\mathcal{D}$ contient des points $A_0, \cdots, A_k$, alors il contient leur enveloppe convexe. En déduire que l'on a toujours $\mathcal{C}(A_0, \dots, A_k) \subset \mathcal{I}(A_0, \dots, A_k)$.
6. On s'intéresse à présent à l'inclusion réciproque. Et on suppose dans cette question que $k = n$ et que la famille de vecteurs $\mathcal{B} = (\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n})$ forment une base de $\mathbb{R}^n$. Montrer que pour tous $t_0, t_1, \dots, t_n$ verifiant $t_0 + \cdots + t_n = 1$, un point M est le barycentre de $(A_0, t_0), \dots, (A_n, t_n)$ si et seulement si les coordonnées de $\overrightarrow{A_0M}$ dans la base $\mathcal{B}$ sont $(t_1, \cdots, t_n)$.
7. On suppose toujours que $\mathcal{B}$ est une base. Soit M un point de $\mathbb{R}^n$ qui s'écrit comme barycentre de $(A_0, t_0), \dots, (A_n, t_n)$ avec l'un des t_i strictement négatif. En considérant les formes linéaires $(t_1, \cdots, t_n) \mapsto t_i$ (c'est à dire la base duale de $\mathcal{B}$) et la forme linéaire $(t_1, \cdots, t_n) \mapsto -t_1 - \cdots - t_n$, montrer qu'il existe un demi-espace qui contient tous les $A_0, \dots, A_n$ mais ne contient pas M. En déduire que $\mathcal{C}(A_0, \dots, A_k) = \mathcal{I}(A_0, \dots, A_k)$.
8. Voyez-vous comment montrer que $\mathcal{C}(A_0, \dots, A_k) = \mathcal{I}(A_0, \dots, A_k)$ pour un ensemble quelconque de points ?

Remarque. Nous côtoyons des enveloppes convexes tous les jours ! En effet, un principe bien connu de mécanique du solide affirme que si l'on pose un solide sur un plan horizontal, le solide sera à l'équilibre (c'est à dire ne basculera pas) si et seulement si la verticale passant par le centre de gravité du solide intersecte le plan horizontal en un point de l'enveloppe convexe des points du solides qui sont en contact avec le plan de pose. Cette enveloppe convexe est appelée "polygone de sustentation".