Feuille de TD n°1 : espaces vectoriels, dual, opérations élémentaires

---

Exercice 1. VRAI ou FAUX ? Les applications suivantes sont des formes linéaires sur un espace vectoriel :

1. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto 2x - y$;
2. $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $x \mapsto x$;
3. $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 0$;
4. $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2$;
5. $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto -x$;
6. $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$;
7. $\mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $z \mapsto \mathrm{Re}(z)$;
8. $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \bar{z}$;
9. $\mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$, $P(x) \mapsto P(3)$;
10. $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto f'(0)f(1)$;
11. $C^0([0, 1]) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto \int_0^1 f(t)dt$;
12. $\{$suites réelles$\} \to \mathbb{R}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \lim_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 2.

1. Écrire la matrice dans la base canonique de l'application linéaire $u : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ définie par
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ x_1 - x_3 + 3x_4 \end{pmatrix}$$
2. Même question pour l'application linéaire $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -x + \sqrt{2}y + z \\ \sqrt{2}x + \sqrt{2}z \\ x + \sqrt{2}y - z \end{pmatrix}$.

Exercice 3. Soit $\mathbb{K}$ un corps. Pour toute matrice $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$, on définit sa *trace* $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ (somme des coefficients diagonaux).

1. Montrer que Tr est une forme linéaire sur $M_n(\mathbb{K})$.
2. Soient $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

Exercice 4. Soient $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace des polynômes de degré $\leq n$ et ϕ l'endomorphisme de E qui à tout $P \in E$ associe $P + P'$ (où P' est le polynôme dérivé de P). Montrer que ϕ est surjectif. (Indication : montrer d'abord que ϕ est injectif.)

Exercice 5. Soit $\mathcal{E}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels et soit Δ l'endomorphisme de $\mathcal{E}$ qui envoie toute suite $\mathbf{u} = (u_0, u_1, u_2, \dots)$ sur la suite $\Delta(\mathbf{u}) = (u_1, u_2, u_3, \dots)$. Montrer que Δ est surjectif mais n'est pas injectif. En déduire que $\mathcal{E}$ n'est pas de dimension finie.

Exercice 6. Soit D (resp. L) l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ qui à tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ associe le polynôme dérivé P' (resp. le polynôme XP).

1. Calculer l'image et le noyau de L, puis de D. Que constatez-vous ?
2. En utilisant 1., montrer que le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ n'est pas de dimension finie.

Exercice 7. Soient V un k-espace vectoriel, E et F deux sous-espaces vectoriels, de dimension p et q respectivement. Soit $\mathcal{B}_0 = (v_1, \dots, v_r)$ une base de $E \cap F$, on la complète en une base $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_{p-r}, v_1, \dots, v_r)$ de E et en une base $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_r, f_1, \dots, f_{q-r})$ de F.

1. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_{p-r}, v_1, \dots, v_r, f_1, \dots, f_{q-r})$ est libre. (Considérer une égalité $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_{p-r} e_{p-r} + \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_r v_r = t_1 f_1 + \cdots + t_{q-r} f_{q-r}$.)
2. Montrer que $\dim(E+F) = \dim(E) + \dim(F) - \dim(E \cap F)$.

Exercice 8. On considère dans $\mathbb{R}^5$ le sous-espace L, resp. M, engendré par les vecteurs

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \text{resp.} \quad v_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En faisant des opérations sur les colonnes de la ou les matrice(s) appropriée(s), donner des bases de L, M, $L+M$ et de $L \cap M$.

Exercice 9. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 8/3 & 5 & 22/3 \end{pmatrix} \in M_{4,5}(\mathbb{R})$.

1. En faisant des opérations élémentaires sur les colonnes, déterminer $\operatorname{rang}(A)$ et des bases de $\operatorname{Im}(A)$ et $\operatorname{Ker}(A)$.
2. Donner une base de F° où F est le sous-espace du dual de $\mathbb{R}^5$ engendré par les formes linéaires $x \mapsto x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5$, $x \mapsto 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 6x_5$, $x \mapsto 2x_1 + x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 3x_5$, et $x \mapsto 3x_1 + 2x_2 + \frac{8}{3}x_3 + 5x_4 + \frac{22}{3}x_5$.

Exercice 10. Reprendre la question 1 de l'exercice précédent avec la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_5(\mathbb{R}).$$

Deviner la question suivante et la résoudre !

Exercice 11. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 8 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$.

1. Déterminer A^{-1}.
2. Justifier que la famille $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$ est une base de $\mathbb{R}^4$ et trouver sa base duale.

Exercice 12. En faisant des opérations élémentaires sur les colonnes, déterminer, en fonction du paramètre $t \in \mathbb{R}$, une base de l'image et du noyau de la matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 2-t & 2-t & t-1 & t-2 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R}).$$

Exercice 13 (Défi chrono !). Inverser le plus vite possible et sans erreur les matrices suivantes...

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 14. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $V = \mathbb{R}^4$, soit V^* l'espace dual de V et $\mathcal{B}^* = (e_1^*, e_2^*, e_3^*, e_4^*)$ la base duale de $\mathcal{B}$.

1. Soit P le plan de V engendré par les vecteurs $v_1 = e_1+2e_2+e_3+e_4$ et $v_2 = e_2+e_3+e_4$. Pour $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$, sous quelles conditions la forme linéaire $f = a_1e_1^* + a_2e_2^* + a_3e_3^* + a_4e_4^*$ s'annule-t-elle sur P ?
2. Déterminer une base $(f_1, \dots, f_d)$ du sous-espace $P^\perp = \{f \in V^* \mid f(v) = 0, \quad \forall v \in P\}$ de V^* (où $d = \dim P^\perp$). Puis, de façon équivalente, donner d équations linéaires, linéairement indépendantes, définissant P.
3. Considérons maintenant les formes linéaires $\phi = e_1^* + e_2^* - e_3^*$ et $\psi = e_1^* + e_4^*$. Déterminer la dimension et une base du sous-espace $E = \{v \in V \mid \phi(v) = 0 = \psi(v)\}$ de V.

Exercice 15. Soit $V = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace des polynômes de degré $\leq n$ et soit $\mathcal{B}$ la base $(1, X, \dots, X^n)$ de V. Soit ∂ l'endomorphisme de V qui à tout $P \in V$ associe son polynôme dérivé P'. On pose $\partial^i = \partial \circ \dots \circ \partial$ (i facteurs) pour $i \in \mathbb{N}^*$, et $\partial^0 = \mathrm{id}_V$. On fixe $n = 4$ (mais on peut faire l'exercice pour n arbitraire).

1. Pour $i = 0, \dots, n$, on considère la forme linéaire $\phi_i : V \to \mathbb{R}$, $P \mapsto \frac{(\partial^i P)(0)}{i!}$; montrer que $(\phi_0, \dots, \phi_n)$ est la base duale $\mathcal{B}^*$ de la base $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$ de V.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Écrire la matrice A_λ exprimant la famille de vecteurs $\mathcal{C}_\lambda = (1, X - \lambda, (X - \lambda)^2, \dots, (X - \lambda)^n)$ dans la base $\mathcal{B}$ et montrer que $\mathcal{C}_\lambda$ est une base de V.
3. Soit u_λ l'endomorphisme de V tel que $\mathrm{Mat}_\mathcal{B}(u_\lambda) = A_\lambda$. Si $\mu \in \mathbb{R}$, pouvez-vous déterminer sans calcul la matrice de $u_\mu \circ u_\lambda$ puis celle de u_λ^{-1} ? Sinon, calculez A_λ^{-1}.
4. Soit $\mathcal{C}_\lambda^*$ la base duale de $\mathcal{C}_\lambda$. Écrire la matrice de passage $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}^*}(\mathcal{C}_\lambda^*)$.

Exercice 16 (Pour aller plus loin...). Trouver toutes les formes linéaires ϕ sur $M_n(\mathbb{R})$ qui sont multiplicatives, c'est à dire telles que pour toutes matrices $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, on ait $\phi(AB) = \phi(A)\phi(B)$.