

Feuille 0 : Raisonnements et quantificateurs

Exercice 1 Compléter les pointillés par le connecteur logique qui s'impose \iff , \implies , \impliedby .

- 1) Soit un réel x . On a $x^2 = 4 \dots\dots x = 2$.
- 2) Soit un complexe z . On a $z = \bar{z} \dots\dots z \in \mathbb{R}$.
- 3) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $x = \pi \dots\dots e^{2ix} = 1$.

Modifier les assertions pour obtenir des équivalences.

Exercice 2 André, Bernard et Claude sont trois frères. L'un est médecin, l'autre pharmacien et le troisième dentiste. On cherche à déterminer la profession de chacun d'eux sachant que: si André est médecin, alors Bernard est dentiste; si André est dentiste, alors Bernard est pharmacien; si Bernard n'est pas médecin, alors Claude est dentiste; si Claude est pharmacien, alors André est dentiste.

En utilisant les notations de la logique pour exprimer les propositions ci dessus, trouver la profession de chacun.

Exercice 3 Examiner les relations logiques existant entre les assertions suivantes:

- A Tous les hommes sont mortels
- B Tous les hommes sont immortels
- C Aucun homme n'est mortel
- D Aucun homme n'est immortel
- E Il existe au moins un homme immortel
- F Il existe au moins un homme mortel

Exercice 4 Soient f et g deux fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Traduire en termes de quantificateurs les expressions suivantes.

- 1) f est majorée.
- 2) f est bornée.
- 3) f est paire.
- 4) f est impaire.
- 5) f ne s'annule jamais.
- 6) f est périodique.
- 7) f est croissante.
- 8) f est strictement décroissante.
- 9) f n'est pas la fonction nulle.
- 10) f n'a jamais la même valeur en deux points distincts.
- 11) f atteint toutes les valeurs de \mathbb{N} .
- 12) f est inférieure à g .
- 13) f n'est pas inférieure à g .

Exercice 5 Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses?

(a) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$.

(b) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y > 0$

(c) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$

(d) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y^2 > x$.

Exercice 6 Soit f une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Nier les énoncés qui suivent :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq 1$
2. L'application f est croissante.
3. $\exists x \in \mathbb{R}^+, f(x) \leq 0$

Exercice 7 1) Soit p_1, p_2, \dots, p_r r nombres premiers. Montrer que l'entier $N = p_1 p_2 \dots p_r + 1$ n'est divisible par aucun des entiers p_i .

2) Utiliser la question précédente pour montrer par l'absurde qu'il existe une infinité de nombres premiers.