Feuille d'Exercices 2

Séries numériques

Exercice 2.1.— Etudier la nature des séries dont voici le terme général

1) $1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)$ 2) $\frac{(n!)^3}{(3n)!}$ 3) $\frac{2^n+5}{3^n-11}$ 4) $\frac{n+\ln n}{n^2+1}$
5) $n^{\ln(a)}$ $(a>0)$ 6) $e^{-\sqrt{n}}$ 7) $n^2\sin(\frac{1}{2^n})$ 8) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^n$
9) $\frac{1+\log n}{n^2}$ 10) $\left(\frac{3n}{4n-1}\right)^{2n+1}$ 11) $\frac{(n+1)^4}{n!+1}$ 12) $n^2e^{-\sqrt{n}}$
13) $\frac{1}{(1+n)^\alpha}\ln(\cos(\frac{1}{n}))$ $(\alpha>0)$ 14) $n^{(n^{-k})}-1$ $(k\in\mathbb{R})$ 15) $n^{\frac{1}{1+n^2}}-1$ 16) $n.n^{\frac{1}{n}}$
17) $n!\left(\frac{x}{n}\right)^n$ $(x>0, x\neq e)$ 18) $\frac{1}{n\log n}$ 19) $\frac{n^{\log n}}{(\log n)^n}$
20) $(n^6+3)^a-(n^2+2)^{3a}$ $(a\in\mathbb{R})$

Exercice 2.2.— Soit α un nombre réel. Pour tout entier strictement positif n, on pose

$$u_n=\frac{1}{n^\alpha}\ ,\ v_n=\frac{1}{n^\alpha}-\frac{1}{(n+1)^\alpha}\ \text{et}\ w_n=\frac{1}{n^\alpha}-\frac{2}{(n+1)^\alpha}+\frac{1}{(n+2)^\alpha}.$$

1. Pour quelles valeurs de α la suite (u_n) est-elle convergente ?

2. Pour quelles valeurs de α la série de terme général v_n est-elle convergente ? Dans ce cas, calculer sa somme.

3. Pour quelles valeurs de α la série de terme général w_n est-elle convergente ? Dans ce cas, calculer sa somme.

Exercice 2.3.— Montrer que si la série de terme général u_n est convergente alors la série de terme général $v_n=u_{2n}+u_{2n+1}$ est convergente et on a $\displaystyle\sum_0^{+\infty}u_n=\sum_0^{+\infty}v_n$.

Exercice 2.4.— Pour quelles valeurs de $a\in\mathbb{R}_+^*$ la série de terme général $u_n=\dfrac{\cosh(n)}{a^n}$ converge-t-elle ?

Exercice 2.5.— Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels strictement positifs. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $S_n=u_0+\cdots+u_n$ et $v_n=\dfrac{u_n}{S_n}$.

1. Montrer que si la série de terme général u_n est convergente, alors la série de terme général v_n est convergente.

2. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1-v_k)=\frac{u_0}{S_n}$.

3. On suppose que la série de terme général v_n est convergente.

a. Quelle est la nature de la série de terme général $\log(1-v_n)$?

b. Montrer que la série de terme général u_n est convergente.

Exercice 2.6.— Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $u_n=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\exp\left(\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ et $v_n=u_n-\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

1. Montrer que la série de terme général v_n est divergente.

2. La série de terme général u_n est-elle convergente ?

Exercice 2.7.— Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies ? lesquelles sont fausses ? Justifier la réponse.

1. Si pour tout $n > 0$ $u_n > 0$ et si la suite (u_n) est décroissante et a pour limite 0, alors la série de terme général u_n est convergente.

2. Si pour tout $n > 0$ $u_n > 0$ et si la série de terme général u_n est convergente, alors la suite (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang.

3. Si pour tout $n > 0$ $u_n > 0$ et si la série de terme général u_n est convergente, alors la série de terme général $\sqrt{u_n}$ est convergente.

4. Si pour tout $n > 0$ $u_n > 0$ et si la série de terme général u_n est convergente, alors la série de terme général ${u_n}^2$ est convergente.

5. Si $\lim_{n\to+\infty}((-1)^n n u_n) = 1$ alors la série de terme général u_n est convergente.

6. Si $\lim_{n\to+\infty}((-1)^n n^2 u_n) = 1$ alors la série de terme général u_n est convergente.

Exercice 2.8.— Démontrer, à l'aide d'un développement limité, que la suite de terme général u_n est convergente, avec $u_n = \sin\left(n\pi + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 2.9.— Etudier, en fonction du paramètre $\alpha > 0$, la convergence des séries de terme général :

$$(a)\quad n^{2-\alpha}\cos\left(\frac{1}{n}\right)\ ;\ (b)\quad \alpha^{\frac{n+\sqrt{\ln n}}{2}}\ ;\ (c)\quad \frac{(-\alpha)^n}{\ln n}.$$

Exercice 2.10.— Soit f une fonction de classe C^2 sur $[-1, 1]$ telle que $f(0) = 0$, $f'(0) = f''(0) = 1$. Etudier les séries de terme général

$$(a)\quad f\left(\frac{1}{n}\right)\ ;\ (b)\quad f\left(\frac{1}{n^2}\right)\ ;\ (c)\quad f\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)\ ;\ (d)\quad f\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right).$$

Exercice 2.11.— Former le produit des séries de terme général u_n et v_n où

$$u_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} \text{ et } v_n = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Exercice 2.12.— Calculer, si elles existent, les sommes des séries de terme général

$$(a)\quad \frac{1}{n^2 - \frac{1}{4}}\ (n > 0)\ ;\ (b)\quad \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\ (n > 1)\ ;\ (c)\quad \arctan\left(\frac{1}{2n^2}\right)\ (n > 0).$$

Exercice 2.13.— Etudier la nature des series dont voici le terme général

1) $\frac{(-1)^n}{(2n-1)^3}$ 2) $(-1)^n\frac{1+n}{n}$ 3) $\frac{(-1)^n}{n^2+\ln n}$ 4) $\frac{\sin(n\theta)}{2^n}$ $(\theta \in \mathbb{R})$

5) $\frac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$ 6) $\frac{(-1)^n}{n-\ln n}$ 7) $\frac{(-1)^n}{2n+\cos(n\alpha\pi)}$ *avec* $\alpha \in \mathbb{R}$

8) $(-1)^n\cosh(\frac{1}{n}\sin(\frac{1}{n}))$ 9) $\ln\left(n\cosh(\frac{1}{n}\sin(\frac{1}{n}))\right)$ 10) $\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}-1$ 11) $\left(\frac{1+n(2-i)}{n(3-2i)-3i}\right)^n$.

Exercice 2.14.— Soit u_n une suite positive telle que la série de terme général u_n converge. On pose $v_n = \dfrac{1}{1+n^2 u_n}$.

1. Monter que si la série $\sum V_n$ converge, alors la série $\sum \sqrt{U_n V_n}$ diverge.
2. Montrer, en raisonnant par l'absurde, que la série de terme général v_n est divergente. On pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$\sum_{k=0}^{n} U_k V_k \leq \left(\sqrt{\sum_{k=0}^{n} U_k^2}\right)^{1/2} \left(\sqrt{\sum_{k=0}^{n} V_k^2}\right)^{1/2}$$

Exercice 2.15.— Etudier en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$ la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha \ln(n)}$.

Exercice 2.16.— Etudier la nature de la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{(-1)^n + n^a}$ pour $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 2.17.— **[Ordre des termes]** Soient $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ et σ l'application de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$ définie par

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \sigma(3p-2) = 2p-1 \ ;\ \sigma(3p-1) = 4p-2 \ ;\ \sigma(3p) = 4p.$$

1. Montrer que σ est une bijection.

2. Comparer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_{\sigma(n)}$.